Sur les zéros de quelques classes de fonctions.

Autor(en): **Obrechkoff, Nikola**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **12 (1939-1940)**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-12793

Sur les zéros de quelques classes de fonctions

Par Nikola Obrechkoff, Sofia

1. M. Pólya[1]) a démontré des théorèmes pour les zéros des fonctions

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^q}\right), \quad \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{x^{q-1}}{1+x^q}\right) \tag{1}$$

où q est un nombre entier positif. Par une autre méthode nous démontrons des résultats nouveaux pour les zéros d'une classe assez générale de fonctions qui contient les fonctions (1) aussi dans le nouvel cas où q n'est pas un nombre entier.

I. *Soit $f(x)$ un polynome arbitraire dont les zéros sont tous réels et positifs. Soient encore p et q deux nombres arbitraires réels et positifs et considérons la fonction*

$$y(x) = x^p f(x^q) \ . \tag{2}$$

Alors la fonction $y^{(n)}(x^{\frac{1}{q}})$, s'annulle seulement pour x réel et non négatif si $n < p + 1$. Si p est un nombre entier cette propriété est vraie pour $n < p + q + 1$. Si encore q est entier le même est valable pour chaque $n = 1, 2, 3, \ldots$

En effet on obtient facilement la formule

$$y^{(n)}(x) = x^{p-n} P_n(x^q) \ , \tag{3}$$

$$P_n(x) = (p + 1 - n) P_{n-1}(x) + q\, x P'_{n-1}(x) \ , \quad P_0(x) = f(x) \ . \tag{4}$$

Supposons que le polynome $P_{n-1}(x)$ a seulement des zéros réels et positifs. De (4), en appliquant un raisonnement de Laguerre[2]) on voit tout de suite que dans le cas $n < p + 1$ les zéros du polynome $P_n(x)$ sont réels. Ils seront positifs puisque les cœfficients de $P_n(x)$ ont seulement des variations des signes.

Considérons maintenant le cas où p est un nombre entier. Alors on a

$$y^{(p)}(x) = P_p(x^q) \ ,$$

où $P_p(x)$ a tous ses zéros réels et positifs. On obtient

$$y^{(p+m)}(x) = q\, x^{q-m} P_{p+m}(x^q) \ .$$

---

[1]) *G. Pólya,* The Tôhoku Mathematical Journal, 19, 1921, p. 241—248.
G. Pólya und *G. Szegö,* Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, t. II, 1925, Berlin, p. 46, 231.

[2]) *E. Laguerre,* Oeuvres, t. I, Paris, 1898, p. 200; voir la première formule de cette page.

D'après le résultat obtenu $P_{p+m}(x)$ a seulement des zéros réels et positifs si $m < q + 1$. Si q est entier le même sera valable pour $P_{p+q}(x)$ et suivant la même marche de démonstration on voit que tous les polynomes $P_n(x)$ ont seulement des zéros réels positifs.

On voit facilement que le théorème reste valable si l'on suppose que $f(x)$ a tous ses zéros réels.

D'après un théorème de Laguerre chaque fonction entière qui est limite d'une suite de polynomes, dont les zéros sont réels et positifs, a la forme

$$f(x) = A\, e^{-\lambda x}\, x^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right) ,$$

où $\lambda \geqq 0$, $\alpha_n > 0$ et la série $\sum_1^\infty \frac{1}{\alpha_n}$ est convergente. Pour simplicité nous dirons que $f(x)$ est du type I. Suivant Laguerre chaque fonction entière limite des polynomes dont les zéros sont réels a la forme

$$f(x) = B e^{-\gamma x^2 + \delta x}\, x^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right) e^{\frac{x}{\alpha_n}} ,$$

où $\gamma \geqq 0$, δ, α_n réels, $\sum_1^\infty \frac{1}{\alpha_n^2}$ convergente. Disons avec M. Pólya que $f(x)$ est du type II.

Alors du théorème I par une passage à la limite on obtient tout de suite.

II. *Soit $f(x)$ une fonction du type I et soient p et q deux nombres positifs. Désignons par*

$$y(x) = x^p f(x^q) .$$

Alors la fonction $y^{(n)}(x^{\frac{1}{q}})$ pour $n < p + 1$ s'annulle seulement pour $x \geqq 0$. Si p est entier cela est vraie pour $n < p + q + 1$ et si encore q est entier le même est valable pour chaque n. Si la fonction $f(x)$ est du type II il reste la meme conclusion pour la fonction $y^{(n)}(x^{\frac{1}{q}})$ en remplaçant l'intervalle $x \geqq 0$ par $-\infty < x < \infty$, c'est-à-dire cette fonction s'annulle seulement pour x réel.

Considérons par exemple le cas où

$$f(x) = e^{-\gamma x^2 + \delta x} ,$$

$\gamma > 0$, δ réel. Alors si p et q sont nombres entier et positifs les zéros de la fonction

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^p e^{-\gamma x^{2q} + \delta x^q}\right) , \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

sont situés sur les démi-droites sortant de l'origine et passant respectivement par les points $exp\left(\frac{2\pi k i}{q}\right)$, $exp\left(\frac{2k+1}{q}\pi i\right)$, $n=0, 1, 2, \ldots, q-1$. En suivant la même marche de démonstration on obtient le théorème:

III. *Soient p et q deux nombres entiers négatifs et soit $f(x)$ une fonction entière du type I. Alors, en posant $y(x) = x^p f(x^q)$, la fonction $y^{(n)}(x^{\frac{1}{q}})$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, s'annulle seulement pour $x \geqq 0$. Si $f(x)$ est du type II la fonction $y^{(n)}(x^{\frac{1}{q}})$ s'annulle seulement pour x réel.*

De la même manière on peut démontrer des théorèmes pour les zéros des fonctions de la forme

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{x^p f(x^q)}{(1+x^q)^m}\right].$$

2. Des recherches de M. Pólya[3]) on peut tirer le théorème suivant:

IV. *Soit D la région du plan de z, bornée par deux droites parallèles qui font avec l'axe réel l'angle φ. Considérons les suites*

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \tag{5}$$

qui ont la propriété suivante: pour chaque polynome $f(z)$ dont les zéros se trouvent dans D, le polynome

$$\lambda_0 f(z) + \lambda_1 f'(z) + \lambda_2 f''(z) + \cdots \tag{6}$$

a aussi tous ses zéros dans D. La condition nécessaire et suffisante pour que la suite (5) a cette propriété est que la fonction $\lambda(ze^{-i\varphi})$, où

$$\lambda(z) = \lambda_0 + \lambda_1 z + \lambda_2 z^2 + \cdots \tag{7}$$

soit entière du type II. Si $P(z)$ est un polynome réel arbitraire, le polynome

$$\lambda_0 P(z) + \lambda_1 P'(z) + \lambda_2 P''(z) + \cdots \tag{8}$$

a au moins autant de zéros réels que $P(z)$.

---

[3]) *G. Pólya*, Comptes Rendus, 183, 1926, p. 413—414.
N. Obrechkoff, Annuaire de l'Université à Sofia, 23, 1927, p. 177—200.
E. Benz, Comment. Mathem. Helv., 7, 1935, p. 243—289.

Nous donnons quelques applications nouvelles. Soit $F(x)$ une fonction intégrable dans l'intervalle $(-a, a)$, $a > 0$, et soit $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Supposons que les zéros du polynome $f(z)$ de degré m se trouvent dans D et considérons le polynome

$$g(z) = \int_{-a}^{a} F(x) f(z + x)\, dx\,. \tag{9}$$

Nous avons

$$g(z) = \lambda_0 f(z) + \lambda_1 f'(z) + \cdots + \lambda_m f^{(m)}(z)\,,$$

où

$$\lambda_p = \frac{1}{p!} \int_{-a}^{a} F(x)\, x^p\, dx\,.$$

Pour la fonction $\lambda(iz)$ nous avons

$$\lambda(iz) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i^p z^p}{p!} \int_{-a}^{a} F(x)\, x^p\, dx = \int_{-a}^{a} F(x)\, e^{izx} dx\,. \tag{10}$$

Ainsi nous avons obtenu le théorème suivant:

V. *Si la fonction* (10) *est entière et du type II le polynome* (9) *a tous ses zéros dans* D. $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$.

Dans le cas particulier $F(x) = 1$, $\lambda(iz) = 2\frac{\sin az}{z}$, on obtient un théorème de M. Meisner[4]), qu'il a démontré en se basant sur un de mes résultats[5]). Soit $F(x)$ une fonction intégrable dans $(0, a)$ et posons $\overline{F(x)} = F(-x)$. La fonction

$$\varphi(z) = \int_{-a}^{a} F(x)\, e^{izx} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{-a}^{a} F(x)\, (ix)^n dx \tag{11}$$

est réelle et de genre $\leqq 1$. Donc si elle a seulement des zéros réels elle sera du type II. D'après la deuxième partie du théorème cité, le polynome

$$\Sigma \frac{P^{(n)}(z)}{n!} \int_{-a}^{a} F(x)\, (ix)^n dx = \int_{-a}^{a} F(x) P(z + ix)\, dx$$

a au moins autant de zéros réels que $P(z)$. Ainsi nous avons:

VI. *Soit* $F(x)$ *une fonction intégrable dans* $(-a, a)$, *telle que* $F(-x) = \overline{F(x)}$, *et supposons que la fonction entière*

$$\int_{-a}^{a} F(x)\, e^{izx} dx \tag{12}$$

---

4) *L. Meisner*, The Tôhoku Mathematical Journal, 44, 1938, p. 175—177.

5) *N. Obrechkoff*, The Tôhoku Mathematical Journal, 38, 1933, p. 93—100.

a seulement des zéros réels. Si $P(z)$ est un polynome réel arbitraire, le polynome

$$\int_{-a}^{a} F(x)\, P(z + i x)\, dx \tag{13}$$

a au moins autant de zéros réels que $P(z)$.

On doit à M. Pólya et Schur[6]) le théorème suivant:

Si la fonction (14) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est entière et du type II et le polynome

$$Q\,(z) = b_0 + e_1 z + b_2 z^2 + \cdots$$

a tous ses zéros réels et négatifs, le polynome

$$a_0 b_0 + 1!\, a_1 b_1 z + 2!\, a_2 b_2 z^2 + \cdots \tag{15}$$

a aussi tous ses zéros réels.

En prenant pour (14) la fonction (12) on voit que (15) a la forme $\int_{-a}^{a} F(x)\, Q\,(izx)\, dx$, et on obtient le théorème:

VII. *Supposons que la fonction* (12) *a seulement des zéros réels et soit $Q\,(z)$ un polynome dont tous les zéros sont réels et négatifs. Alors le polynome*

$$\int_{-a}^{a} F(x)\, Q\,(izx)\, dx$$

a seulement des zéros réels.

(Reçu le 3 juillet 1939.)

[6]) *G. Pólya* und *I. Schur*, Journal für die reine und angew. Mathematik, 144, 1914, p. 89—113.