Sulle involuzioni di ordine n e specie $n-1$ in un campo binario

Di Ambrogio Longhi, Lugano

Il presente articolo ha lo scopo di porre in rilievo alcune semplici proprietà di ogni serie lineare g_n^{n-1} sopra una curva razionale: le quali non sembra siano state finora esplicitamente notate, benchè si prestino a varie applicazioni non prive d'interesse.

1. In un campo binario Γ (ente razionale ∞^1, irriducibile) abbiasi una involuzione I_n^{n-1} d'ordine n e di specie $n-1$: cioè una serie lineare g_n^{n-1}, senza punti fissi.

Su Γ esistono allora infinite coppie di elementi ε, ε' tali che il gruppo:

$$\varepsilon + (n-1)\varepsilon'$$

appartenga alla involuzione. Dato ε' resta individuato ε; mentre, dato ε, risultano determinati $n-1$ elementi ε': quelli che sono $(n-1)$-upli per la involuzione I_{n-1}^{n-2} (di ordine $n-1$ e specie $n-2$) *residua dell'elemento ε rispetto alla I_n^{n-1}*, ossia costituita dai gruppi di I_n^{n-1} passanti per ε e privati dell'elemento ε stesso.

Gli elementi ε ed ε', supposti variabili, riescono quindi omologhi in una corrispondenza $(1, n-1)$; la quale, se $n > 2$, non è simmetrica e possiede pertanto:

$$\tfrac{1}{2}[1+(n-1)^2-n] = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

coppie di elementi corrispondentisi in doppio modo. Dunque:

Una involuzione d'ordine $n > 2$ e di specie $n-1$, entro un campo binario, ammette $\binom{n-1}{2}$ coppie di elementi caratterizzate dalla proprietà che ciascun elemento di una tal coppia è $(n-1)$-uplo per un gruppo della involuzione il quale contiene anche l'altro elemento della stessa coppia[1]).

Per brevità, siffatte coppie di elementi si chiameranno *le coppie principali* della involuzione.

[1]) Per un teorema generale, di cui questo è caso particolarissimo, vedasi: *F. Severi*, Sopra alcune singolarità delle curve di un iperspazio [Memorie della R. Accademia di Torino, 51 (2), 1902], n. 3, ultima nota.

2. In uno spazio S_n, di dimensione $n > 2$, una curva razionale normale C_n sia sostegno di una involuzione I_n^{n-1}. I gruppi della I_n^{n-1} si possono allora ottenere segando C_n con gl'iperpiani passanti per un certo punto O, non situato su C_n[2]).

Detto P un punto generico di C_n, la retta OP è incidente ad $n-1$ spazi S_{n-2} osculatori a C_n in altrettanti punti $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ diversi da P: che sono i punti $(n-1)$-upli della involuzione I_{n-1}^{n-2} residua (n. 1) di P rispetto alla I_n^{n-1}.

Al variare di P su C_n, il gruppo:

$$G_n = P + \sum_{i=1}^{n-1} P_i \quad ,$$

che può dirsi *relativo* al punto P, descrive una serie algebrica γ_n^1 d'ordine n; e di indice 2: infatti, i soli gruppi di γ_n^1 che contengono P sono il G_n relativo (nel senso suddetto) a P, e l'altro analogamente relativo al punto ulteriore intersezione di C_n con l'iperpiano per O e per l'S_{n-2} osculatore a C_n in P.

Ne segue che l'iperpiano π congiungente i punti del gruppo variabile G_n di γ_n^1, essendo in generale privo di contatti con C_n, deve inviluppare un cono quadrico V_{n-1}^2.

È poi noto[3]) che π corrisponde al punto O in una correlazione involutoria singolare (col punto fondamentale P): precisamente in un sistema nullo o polare secondochè n è pari o dispari. Nel primo caso l'iperpiano variabile π passa quindi sempre per O; mentre nel secondo l'appartenenza di O a π non si verifica che due volte (quando cioè π viene a coincidere con uno dei due iperpiani per O tangenti al cono V_{n-1}^2). Pertanto:

Data in un campo binario una involuzione I_n^{n-1} d'ordine $n > 2$ e di specie $n-1$, gli ∞^1 gruppi costituiti ciascuno da un elemento ε e dagli elementi $(n-1)$-upli della involuzione I_{n-1}^{n-2} residua (n. 1) *di ε rispetto a I_n^{n-1}, riempiono una serie algebrica γ_n^1 d'ordine n e di indice 2: la quale è totalmente contenuta nella I_n^{n-1} quando n è pari, mentre ha due soli gruppi*[4]) *in comune con la I_n^{n-1} quando n è dispari.*

Tale serie γ_n^1 si dirà *inerente* alla involuzione I_n^{n-1}.

---

[2]) E neppure sopra alcuno spazio S_k osculatore a C_n di dimensione $k < n-1$: se, come è sempre da sottintendere nel seguito, la involuzione I_n^{n-1} ha i suoi n elementi n-upli tutti distinti.

[3]) *A. Brambilla*, Intorno alle curve razionali in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni. (Rend. del R. Istituto Lombardo, 19 (2), 1886).

[4]) È subito visto che, nell'ipotesi (sempre sottintesa) di cui alla nota [2]), tali due gruppi sono distinti.

3. L'involuzione coniugata alla I_n^{n-1} riducendosi al gruppo dei punti n-upli di I_n^{n-1}, la polare mista, rispetto a tal gruppo, di $n - 1$ qualsiansi fra gli n punti (distinti o no) di ogni gruppo della I_n^{n-1} è il rimanente punto del gruppo stesso. Ne consegue che:

Detto U_n *il gruppo degli* n *elementi* n*-upli di una involuzione* I_n^{n-1} *entro un campo binario, le* $\binom{n-1}{2}$ *coppie principali* (n. 1) *di* I_n^{n-1} *sono le coppie di elementi appartenenti ciascuno al* (*primo*) *gruppo polare dell'altro rispetto a* U_n.

E la serie γ_n^1 *inerente* (n. 2) *ad* I_n^{n-1} *è quella descritta dal gruppo somma di un elemento variabile del campo col suo* (*primo*) *gruppo polare rispetto a* U_n.

4. Il cono V_{n-1}^2, introdotto al n. 2, avrà per vertice un certo spazio S_{n-3}^* ad $n - 3$ dimensioni. Segando allora con gl'iperpiani della stella di centro S_{n-3}^* la curva C_n, si ottiene su questa una involuzione di 2ª specie I_n^2: la quale è la serie lineare di dimensione minima fra tutte quelle d'ordine n che contengono la serie algebrica γ_n^1, d'indice 2, inerente (n[i] 2, 3) alla involuzione I_n^{n-1}. Si può aggiungere che, se n è pari, in S_{n-3}^* trovasi il punto O (n. 2): onde la I_n^2 è contenuta nella I_n^{n-1}.

Siano ora P e P' due punti di C_n costituenti una coppia principale (n[i] 1, 3) della involuzione I_n^{n-1}. Ciò significa che entrambi i gruppi:

$$P + (n-1)P' \quad , \quad P' + (n-1)P$$

fanno parte di I_n^{n-1}, ossia giacciono ciascuno in un iperpiano per O. Ne deriva che gli spazi ad $n - 2$ dimensioni osculatori a C_n in P e in P' incontrano rispettivamente la retta OP' e la OP; quindi per i punti P, P' passano ad un tempo due gruppi della serie γ_n^1 inerente (n[i] 2, 3) alla involuzione I_n^{n-1}: il G_n relativo a P (nel senso precisato al n. 2), e il G'_n analogo relativo a P'.

Importa osservare che i gruppi G_n e G'_n non possono coincidere: diversamente esisterebbero punti di C_n (distinti da P e da P') con lo spazio S_{n-2} ivi osculatore appoggiantesi, altrove che in O, alle due rette OP, OP'; e la curva C_n, contro l'ipotesi che sia normale, apparterrebbe all'iperpiano (OS_{n-2}).

Siccome G_n e G'_n sono pure gruppi della involuzione I_n^2 in cui la serie γ_n^1 è contenuta, ne discende che i punti P e P' offrono una sola condizione ai gruppi di I_n^2 obbligati ad includerli: cioè formano una coppia *neutra* per la I_n^2. Riassumendo:

Le $\binom{n-1}{2}$ *coppie principali* (n[i] 1, 3) *di una involuzione* I_n^{n-1}, *con* $n > 2$, *entro un campo binario, sono tutte neutre per una stessa involuzione* I_n^2*: contenuta o no totalmente nella* I_n^{n-1} *secondochè* n *è pari o dispari, ed individuata da tre generici gruppi della serie* γ_n^1 *(cui la* I_n^2 *sempre contiene) inerente* (n[i] 2, 3) *alla* I_n^{n-1}.

5. Nel teorema del n. 4 suppongasi n dispari. La involuzione I_n^2 non è allora contenuta nella I_n^{n-1}; però ha comuni con questa ∞^1 gruppi che costituiscono un'involuzione di prima specie I_n^1: fra i quali, due appartenenti alla serie γ_n^1 (n. 2). Poichè ogni coppia neutra per la I_n^2 è tale anche per la I_n^1, si conclude:

Quando n *è dispari, le* $\binom{n-1}{2}$ *coppie principali* (n[i] 1, 3) *di una involuzione* I_n^{n-1} *in un campo binario, son tutte neutre per una medesima involuzione* I_n^1 *totalmente contenuta nella* I_n^{n-1}*: ed individuata dai due gruppi che l'involuzione* I_n^{n-1} *ha in comune con la serie* γ_n^1 *ad essa inerente* (n[i] 2, 3).

6. Sia J_n^{n-1} una seconda involuzione d'ordine n e di specie $n-1$ col medesimo sostegno della I_n^{n-1}. La serie γ_n^1 inerente (n[i] 2, 3) a I_n^{n-1}, essendo d'indice 2, ha due suoi gruppi (se non tutti) appartenenti alla J_n^{n-1}: e per la involuzione I_n^1 da questi determinata, la quale può considerarsi estratta dalla I_n^2 che contiene la γ_n^1 (n. 4), è neutra ogni coppia principale (n[i] 1, 4) di I_n^{n-1}. Dunque:

Date genericamente, in uno stesso campo binario, due diverse involuzioni d'ordine n *e di specie* $n-1$*, le* $\binom{n-1}{2}$ *coppie principali* (n[i] 1, 3) *di una qualunque di esse son tutte neutre per una medesima involuzione d'ordine* n *e di prima specie contenuta nell'altra: e individuata dai due gruppi che questa ha comuni con la serie* γ_n^1 *inerente* (n[i] 2, 3) *alla prima involuzione.*

7. Passando ad alcune applicazioni dei teoremi precedenti, si consideri anzitutto una curva razionale Γ_n, d'ordine n, appartenente allo spazio S_{n-1}, e la involuzione I_n^{n-1} costituita dalle sue sezioni iperpiane.

I due punti di una coppia principale (n. 1) di I_n^{n-1} giacciono ciascuno sull'iperpiano osculatore a Γ_n nell'altro: onde la retta che li unisce è una corda principale di Γ_n.

Un gruppo generico della serie γ_n^1 inerente (n. 2) alla I_n^{n-1} consta di un punto P di Γ_n e dei punti di contatto degli $n-1$ iperpiani uscenti da P ed osculatori altrove a Γ_n.

Se infine si osserva che un'involuzione I_n^k contenuta nella I_n^{n-1} è necessariamente staccata su Γ_n dalla totalità degli iperpiani condotti per un certo spazio S_{n-k-2} (subordinato a S_{n-1}), e che sopra una retta incidente a questo spazio debbono stare i punti di ogni coppia neutra per la I_n^k, dal teorema del n. 4 segue subito che *quando n è pari, le* $\binom{n-1}{2}$ *corde principali della curva* Γ_n *sono tutte incidenti ad un determinato spazio* S_{n-4}: come è già noto[5]).

Nuovo sembra invece, e non meno interessante, il seguente teorema, a cui conduce quello del n. 5:

Quando n è dispari, sopra una generica curva razionale Γ_n *d'ordine* $n > 3$, *appartenente ad uno spazio* S_{n-1}, *esistono due punti,* P_1 *e* P_2, *tali che gli* $n - 1$ *iperpiani per* P_i, *osculatori altrove a* Γ_n, *hanno i loro punti di contatto situati con* P_i *in un iperpiano* π_i $(i = 1,2)$.

I due (distinti) iperpiani π_1 *e* π_2 *si segano in uno spazio* S_{n-3}: *e a questo spazio sono incidenti tutte le* $\binom{n-1}{2}$ *corde principali di* Γ_n.

8. Applicando il risultato del n. 6 alla curva Γ_n (n. 7), nell'ipotesi che una delle due involuzioni da considerarsi su Γ_n vi sia staccata dagli iperpiani dello spazio ambiente, si perviene al teorema:

Data sopra una curva razionale Γ_n, *d'ordine n e appartenente ad uno spazio* S_{n-1}, *una involuzione* I_n^{n-1} *di grado n e specie* $n - 1$ (*che non sia quella delle sezioni iperpiane se n è pari*), *tutte le* $\binom{n-1}{2}$ *corde congiungenti ciascuna i punti di una sua coppia principale* (n[i] 1, 3) *si appoggiano ad uno stesso spazio* S_{n-3}: *intersezione dei due iperpiani seganti* Γ_n *in gruppi della serie* γ_n^1 *inerente* (n[i] 2, 3) *a* I_n^{n-1}.

Sotto altra forma il teorema può così enunciarsi:

Sulla curva razionale Γ_n *dello spazio* S_{n-1} *sia fissato un gruppo* U_n *di n punti distinti: che non coincida con quello dei punti di contatto degli iperpiani osculatori stazionari se n è pari.*

La curva Γ_n *possiede allora* $\binom{n-1}{2}$ *coppie di punti* (A_i, B_i) *caratterizzate dalla proprietà che ciascun punto di ogni coppia appartiene al (primo) gruppo polare dell'altro rispetto a* U_n; *e possiede pure due certi punti* P_1, P_2 *tali che gli* $n - 1$ *punti costituenti il (primo) gruppo polare di* P_j *rispetto a* U_n *giacciono con* P_j *in un iperpiano* π_j $(j = 1,2)$.

Orbene: le $\binom{n-1}{2}$ *corde* $A_i B_i$ *sono tutte incidenti allo spazio* S_{n-3} *intersezione di* π_1 *con* π_2.

[5]) *L. Berzolari,* Estensione di un teorema di *Bertini-Laguerre* (Boll. Unione Mat. Italiana, XII, 1933).

9. In uno spazio qualsiasi si consideri una curva razionale, ed un sistema lineare di forme staccanti su di essa i gruppi di una involuzione I_n^{n-1}. Le proprietà derivanti per questa dalle proposizioni dei n[i] 4 e 5 conducono all'enunciato:

Una curva razionale irriducibile C, con qualunque singolarità, appartenga allo spazio S_r ad r dimensioni; e sia Σ, in S_r, un sistema lineare ∞^{n-1} di forme: una variabile delle quali non contenga mai C, ed intersechi C (oltre che in eventuali punti fissi) in n punti variabili.

La curva C non possegga punti multipli che non siano punti base di Σ.

Su C esistono allora $\binom{n-1}{2}$ coppie (X_i, Y_i) di punti distinti, tali che per ciascun punto di ogni coppia passa una forma di Σ avente con C un contatto di ordine $n-2$ nell'altro punto della stessa coppia.

Un punto P di C giace in $n-1$ forme di Σ, ognuna delle quali abbia con C un contatto d'ordine $n-2$ in un punto P_j $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$.

Se n è pari, i punti $P, P_1, \ldots P_{n-1}$ stanno assieme in una forma di Σ: che varia entro una certa rete al variare di P su C; e i quattro punti di due qualsiansi delle coppie (X_i, Y_i) appartengono sempre ad una medesima forma di questa rete.

Se n è dispari, solo quando P viene a coincidere con due particolari punti $P^{(1)}, P^{(2)}$ di C, accade che gli n punti $P \equiv P^{(k)}, P_1, \ldots, P_{n-1}$ sono insieme situati sopra una forma F_k di Σ $(k = 1,2)$: e per entrambi i punti di ciascuna delle coppie (X_i, Y_i) passa una forma del fascio individuato da F_1, F_2.

10. Una curva razionale C_m d'ordine m appartenga ad uno spazio S_r e non possegga altri punti multipli che un nodo K. Le forme di S_r d'ordine μ abbastanza elevato, che passano per K e per $m\mu - 1$ ulteriori punti di C_m, contengono allora necessariamente l'intera curva (supposta irriducibile): la quale ha quindi per tali forme la postulazione $m\mu$. Ne deriva che le forme stesse segano su C_m una involuzione $I_{m\mu}^{m\mu-1}$.

Fra le coppie principali (n[i] 1, 3) della $I_{m\mu}^{m\mu-1}$, una ha entrambi i suoi punti coincidenti nel nodo K di C_m; mentre le rimanenti:

$$\binom{m\mu-1}{2} - 1 = \tfrac{1}{2} m\mu(m\mu - 3)$$

constano di punti distinti.

Chiamisi K_1 o K_2 il punto K secondo che esso si ritenga sull'uno o sull'altro dei due rami di C_m con l'origine in K.

Per un punto P di C_m passano $m\mu - 1$ gruppi dell'involuzione $I_{m\mu}^{m\mu-1}$ costituiti ciascuno da P e da un punto P_i $(m\mu - 1)$-uplo $(i = 1,2,\ldots,$

$m\mu - 1$): ed è subito visto che quando P tende a K_1 (a K_2), ogni punto P_i tende a K_2 (a K_1). Infatti l'involuzione $I^{m\mu-2}_{m\mu-1}$ residua (n. 1) ad esempio di K_1 rispetto alla $I^{m\mu-1}_{m\mu}$ ha un punto fisso in K_2: il quale assorbe tutti gli $m\mu - 1$ punti $(m\mu - 1)$-upli di $I^{m\mu-2}_{m\mu-1}$; giacchè, tolto K_2 dai gruppi di tale involuzione, resta una $I^{m\mu-2}_{m\mu-2}$ con nessun punto $(m\mu - 1)$-uplo.

Ne consegue che i due gruppi di $I^{m\mu-1}_{m\mu}$ individuati dall'avere un punto $(m\mu - 1)$-uplo l'uno in K_1 e l'altro in K_2 son due particolari gruppi della serie descritta dal gruppo:

$$P + \sum_{i=1}^{m\mu-1} P_i$$

al variare di P: cioè della serie inerente (n[i] 2, 3) alla involuzione $I^{m\mu-1}_{m\mu}$.

In base ai teoremi dei n[i] 4 e 5 si può pertanto enunciare:

Sopra una curva razionale C_m d'ordine m, irriducibile e appartenente ad uno spazio S_r di dimensione $r \geqslant 2$, esista, unico punto multiplo, un nodo ordinario K.

Se μ è un intero positivo soddisfacente alla condizione:

$$\binom{\mu + r}{r} \geqslant m\mu \; ,$$

la curva C_m possiede:

$$\tfrac{1}{2} m\mu\,(m\mu - 3)$$

coppie (U_i, V_i) di punti distinti con la proprietà che per ciascun punto di ogni coppia passano forme di S_r d'ordine μ[6]) aventi con C_m un contatto $(m\mu - 1)$-punto nell'ulteriore punto della stessa coppia.

Siano $\Phi^{(1)}_\mu$ e $\Phi^{(2)}_\mu$ due forme d'ordine μ[6]) (sempre assegnabili: ed anzi generalmente in infiniti modi) che abbiano in K un contatto $(m\mu - 1)$-punto la prima con l'uno e la seconda con l'altro dei due rami di C_m uscenti da K.

Si verifica allora che, entro il fascio determinato da $\Phi^{(1)}_\mu$ e $\Phi^{(2)}_\mu$, la forma di esso contenente uno dei due punti di ciascuna delle coppie (U_i , V_i) contiene necessariamente anche l'altro.

Fissato poi ad arbitrio su C_m un punto semplice P, vi sono $m\mu - 1$ punti P_j $(j = 1,2,\ldots, m\mu - 1)$ in ognuno dei quali ha luogo un contatto $(m\mu - 1)$-punto fra C_m e (almeno) una forma d'ordine μ[6]) passante per P.

Se $m\mu$ è pari, per gli $m\mu$ punti $P, P_1, P_2, \ldots, P_{m\mu-1}$ si può sempre condurre qualche forma Φ_μ d'ordine μ[6]): e i quattro punti di due qualsiansi delle coppie (U_i, V_i) appartengono insieme ad una forma della rete individuata da $\Phi^{(1)}_\mu$, $\Phi^{(2)}_\mu$, Φ_μ.

[6]) Trattasi, beninteso, di forme non contenenti la curva C_m (Non identiche, nè composte, con la C_3 se $r = 2$ e quindi $m = 3$).

11. Come corollario della proposizione precedente (applicata nelle ipotesi: $m = r + 1 = n$, $\mu = 1$), e a complemento dei due teoremi del n. 7, giova rilevare che:

Le corde principali, il cui numero è $\frac{1}{2}n\,(n - 3)$, *di una curva razionale d'ordine* $n > 3$, *appartenente ad uno spazio* S_{n-1} *e dotata di un nodo ordinario* K, *son tutte incidenti allo spazio* S_{n-3} *intersezione degli iperpiani osculatori in* K *ai due rami della curva che escono da* K: *ed anzi, se* n *è pari, ad uno spazio* S_{n-4} *subordinato di tale* S_{n-3}[7]).

---

[7]) E costruibile segando l'S_{n-3} medesimo con l'iperpiano congiungente un generico punto P della curva coi punti di contatto degli iperpiani per P osculatori altrove ad essa.

(Eingegangen den 8. Oktober 1939.)