# Über die Bestimmung von Flächen aus ihrer Normalkrümmung längs einer Schar geodätischer Linien.

Autor(en): **Grünbaum, Siegfried**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **11 (1938-1939)**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-11894

# Über die Bestimmung von Flächen aus ihrer Normalkrümmung längs einer Schar geodätischer Linien

Von SIEGFRIED GRÜNBAUM, Zürich

## § 1. Natürliche Gleichungen von Flächen.

Der Begriff der natürlichen Gleichungen einer Kurve hat allgemein in die differentialgeometrische Literatur Eingang gefunden, und man versteht in der Regel diejenigen Gleichungen darunter, durch die die Krümmung und Torsion der Kurve als Funktionen ihrer Bogenlänge ausgedrückt werden[1]). Demgegenüber ist von natürlichen Gleichungen von Flächen nur sehr selten die Rede und dazu noch in sehr verschiedener Weise. Bianchi nennt die beiden Gleichungen

$$f = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

und

$$\varphi = L du^2 + 2M du dv + N dv^2$$

natürliche Gleichungen der Fläche, weil „alle aus der Gestalt und Größe der Fläche sich ergebenden Eigenschaften nur von den sechs Koeffizienten der Fundamentalformen abhängen.“[2]) Scheffers dagegen bezeichnet für solche Flächen, auf denen keine besondere Beziehung zwischen der Gauß'schen Krümmung $K$ und der mittleren Krümmung $H$ besteht, die vier Gleichungen

$$\triangle_{KK} = \Phi_1(K, H^2), \qquad \triangle_{HH} = \Phi_2(K, H^2)\,,$$
$$H \triangle_{KH} = \Phi_3(K, H^2), \qquad \nabla_{KK} = \Phi_4(K, H^2)$$

($\triangle$ und $\nabla$ sind die Beltrami'schen Differentialoperatoren) als ihre natürlichen Gleichungen, weil sie die Fläche ohne Rücksicht auf ihre zufällige Lage und Parameterdarstellung vollkommen charakterisieren. Er bemängelt gleichzeitig die Bianchi'sche Definition natürlicher Gleichungen, weil sich die beiden Fundamentalformen bei Einführung neuer Parameter ändern[3]). Erwähnenswert ist ferner, daß Cesàro in seinen „Vorlesungen über natürliche Geometrie“ ebenfalls nur einen unvollkommenen Ersatz für die natürlichen Gleichungen einer Fläche gibt. Schließlich nennt Rellich die Gleichung $K = K(u, v)$ eine natürliche Gleichung der Fläche ($K$ ist ihre Gauß'sche Krümmung), falls $u$ und $v$ Asymptotenlinienpara-

[1]) *Blaschke*, § 13 u. a.

[2]) *Bianchi*, p. 91.

[3]) *Scheffers*, p. 433.

meter (für $K < 0$) bzw. isotherm-konjugierte Parameter (für $K > 0$) der Fläche sind, weil dann durch $K(u,v)$ die Fläche bis auf einen Anfangsstreifen eindeutig bestimmt ist[4]).

Im Sinne einer Differentialgeometrie, die danach strebt, ihre Begriffe möglichst allgemein oder zum mindesten verallgemeinerungsfähig zu definieren, liegt es nahe, solche natürliche Gleichungen für Flächen zu suchen, die in der Differentialgeometrie des $R_n$ einfach eine Verallgemeinerung der natürlichen Gleichungen von Kurven darstellen. Eine Kurve hat im $R_n$ $n - 1$ verschiedene Krümmungen. Gibt man diese als Funktionen der Bogenlänge, so erhält man die natürlichen Gleichungen der Kurve, die diese bis auf die Anfangsbedingungen vollständig bestimmen. Eine $\nu$-dimensionale Fläche hat im $R_n$ $n - \nu$ verschiedene Krümmungen[5]), und Herr Finsler hat in seiner Dissertation die Vermutung ausgesprochen, „daß auch die Flächen durch die Angabe ihrer Krümmungen und geeigneter Anfangsbedingungen eindeutig bestimmt sind“ [6]). Beschränkt man sich nun auf zweidimensionale Flächen im euklidischen $R_3$, so müßte man demnach deren in diesem Falle einzige Krümmung, die Normalkrümmung[7]), nebst den Anfangsbedingungen vorgeben. Die Normalkrümmung wäre dann als Funktion der Bogenlänge der Kurven einer Schar und eines geometrischen Parameters der Schar darzustellen. Vereinfacht wird das Problem dadurch, daß man die Kurven der Schar als geodätisch annimmt, da dann ihre Krümmung in jedem Linienelement mit der Normalkrümmung der Fläche übereinstimmt.

In der vorliegenden Arbeit soll jetzt gezeigt werden, daß eine analytische Fläche durch die Angabe ihrer Normalkrümmung längs eines Feldes geodätischer Linien sowie geeigneter Anfangsbedingungen eindeutig bestimmt ist. Dies gibt uns dann das Recht, die Beziehung zwischen der Normalkrümmung und den beiden Parametern (Bogenlänge der geodätischen Linien und Feldparameter) als natürliche Gleichung der Fläche zu bezeichnen. Der Beweis soll nun derart geführt werden, daß aus der so vorgegebenen Krümmung der geodätischen Linien ihre Torsion eindeutig berechnet wird; denn damit sind die Kurven selbst und auch die Fläche als deren Enveloppe (wiederum bis auf die Anfangsbedingungen) eindeutig bestimmt. Ob auch zu jeder solchen natürlichen Gleichung eine Fläche existiert, müßte allerdings noch besonders untersucht werden.

---

[4]) *Rellich*, p. 619.

[5]) *Finsler*, p. 95.

[6]) *Finsler*, p. 8.

[7]) *Finsler*, p. 92.

## § 2. Krümmung und Torsion geodätischer Linien.

Wir bezeichnen die drei Einheitsvektoren des begleitenden Dreibeins der geodätischen Linien mit $\xi_1$, $\xi_2$ und $\xi_3$ und ihre Krümmung und Torsion mit $\kappa$ bzw. $\tau$. Die Fläche sei durch ihren Ortsvektor $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u,v)$ dargestellt. Ihr Normaleneinheitsvektor sei $\xi(u,v)$.

Dann gilt nach Frenet:

$$\frac{d\xi_2}{ds} = -\kappa\,\xi_1 + \tau\xi_3$$

oder wegen:

$$\xi_1 \cdot \xi_3 = 0 :$$

$$\tau = \xi_3 \cdot \frac{d\xi_2}{ds} . \tag{1}$$

Es ist nun:

$$\xi_3 = \xi_1 \times \xi_2$$

oder, weil für geodätische Linien ihre Hauptnormale $\xi_2$ mit der Flächennormalen $\xi$ (abgesehen vom Richtungssinn) zusammenfällt[8]):

$$\xi_3 = \pm\, \xi_1 \times \xi .$$

Wegen

$$\xi_1 = \frac{d\mathfrak{x}}{ds} = \mathfrak{x}_u \cdot \frac{du}{ds} + \mathfrak{x}_v \cdot \frac{dv}{ds}$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} \xi_3 &= \pm \left(\mathfrak{x}_u \cdot \frac{du}{ds} + \mathfrak{x}_v \cdot \frac{dv}{ds}\right) \times \xi \\ &= \pm \left[(\mathfrak{x}_u \times \xi)\frac{du}{ds} + (\mathfrak{x}_v \times \xi)\frac{dv}{ds}\right] . \end{aligned} \tag{2}$$

Unter Benützung der üblichen Bezeichnungen:

$$\mathfrak{x}_u^2 = E, \qquad \mathfrak{x}_u \cdot \mathfrak{x}_v = F, \qquad \mathfrak{x}_v^2 = G ,$$

$$\mathfrak{x}_u \cdot \xi_u = -L,\ \mathfrak{x}_u \cdot \xi_v = \mathfrak{x}_v \cdot \xi_u = -M,\ \mathfrak{x}_v \cdot \xi_v = -N$$

und der Gleichung:

$$\xi = \frac{\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v}{\sqrt{EG - F^2}}$$

finden wir:

---

[8]) *Blaschke*, p. 94 (26).

$$\mathfrak{x}_u \times \xi = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} [\mathfrak{x}_u \times (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} [(\mathfrak{x}_u \cdot \mathfrak{x}_v)\,\mathfrak{x}_u - (\mathfrak{x}_u \cdot \mathfrak{x}_u)\,\mathfrak{x}_v]\ ^{9)} = \frac{F\mathfrak{x}_u - E\mathfrak{x}_v}{\sqrt{EG - F^2}}$$

und ferner:

$$\mathfrak{x}_v \times \xi = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} [\mathfrak{x}_v \times (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} [(\mathfrak{x}_v \cdot \mathfrak{x}_v)\,\mathfrak{x}_u - (\mathfrak{x}_u \cdot \mathfrak{x}_v)\,\mathfrak{x}_v] = \frac{G\mathfrak{x}_u - F\mathfrak{x}_v}{\sqrt{EG - F^2}},$$

so daß sich nach (2) für $\xi_3$ ergibt:

$$\xi_3 = \pm \frac{(F\mathfrak{x}_u - E\mathfrak{x}_v) \cdot \frac{du}{ds} + (G\mathfrak{x}_u - F\mathfrak{x}_v) \cdot \frac{dv}{ds}}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Da außerdem gilt:

$$\frac{d\xi_2}{ds} = \pm \frac{d\xi}{ds} = \pm \left(\xi_u \cdot \frac{du}{ds} + \xi_v \cdot \frac{dv}{ds}\right),$$

finden wir nach (1) für die Torsion der geodätischen Linie durch den Punkt $(u, v)$ in der Richtung $\frac{du}{dv}$:

$$\tau = \left[(F\mathfrak{x}_u - E\mathfrak{x}_v) \cdot \frac{du}{ds} + (G\mathfrak{x}_u - F\mathfrak{x}_v) \cdot \frac{dv}{ds}\right] \cdot \frac{\xi_u \cdot \frac{du}{ds} + \xi_v \cdot \frac{dv}{ds}}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left[(EM - FL)\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + (EN - GL)\frac{du}{ds} \cdot \frac{dv}{ds} + (FN - GM)\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right]$$

und schließlich wegen:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2:$$

$$\tau = \frac{(EM - FL)\,du^2 + (EN - GL)\,du\,dv + (FN - GM)\,dv^2\ ^{10)}}{\sqrt{EG - F^2} \cdot (E du^2 + 2F\,du\,dv + G dv^2)}. \tag{3}$$

Die Krümmung derselben geodätischen Linie ist wegen $\xi_2 = \xi$ gleich der Normalkrümmung der Fläche im Linienelement $\left(u, v, \frac{du}{dv}\right)$, also:

$$\kappa = \frac{L du^2 + 2M\,du\,dv + N dv^2}{E du^2 + 2F\,du\,dv + G dv^2}. \tag{4}$$

---

[9]) Cf. *Blaschke*, p. 6 (43).

[10]) *Bianchi*, p. 164.

## § 3. Geodätische Koordinaten.

Im Hinblick auf unsere spezielle Aufgabe und auf die weiteren Untersuchungen erweist es sich als zweckmäßig, besondere Parameter auf der Fläche einzuführen. Wir wählen als Kurven $v = \text{const.}$ die geodätischen Linien eines Feldes und als Kurven $u = \text{const.}$ ihre äquidistanten Orthogonaltrajektorien. $u$ soll dabei die Bogenlänge auf den geodätischen Linien angeben, von einer festen Orthogonaltrajektorie $u = 0$ aus gemessen. Das Bogenelement nimmt dann die Gauß'sche Form an:

$$ds^2 = du^2 + G dv^2 \text{ [11]}.$$

In diesem Parametersystem gilt also:

$$E = \mathfrak{x}_u^2 \equiv 1$$

und

$$F = \mathfrak{x}_u \cdot \mathfrak{x}_v \equiv 0 ,$$

so daß sich für die geodätischen Linien $v = \text{const.}$ nach (4) und (3) ergibt:

$$\kappa = L \tag{5}$$

und

$$\tau = \frac{M}{\sqrt{G}} . \tag{6}$$

Es ist nun unser Ziel, die Fundamentalgrößen $G$, $L$ und $M$ zu eliminieren und eine Beziehung zwischen $\kappa$ und $\tau$, eventuell auch deren Ableitungen nach $u$ und $v$, aufzustellen, die es gestattet, $\tau = \tau(u,v)$ bei gegebenem $\kappa = \kappa(u,v)$ zu berechnen. Wir benutzen hierzu die erste der sogenannten Grundformeln von Mainardi und Codazzi[12], die in unserm Spezialfall ($E \equiv 1$, $F \equiv 0$) die Form annimmt:

$$2\,G(L_v - M_u) - M G_u = 0 . \tag{7}$$

Setzen wir nun nach (5) und (6):

$$L_v = \kappa_v ,$$
$$M = \tau \sqrt{G}$$

und

$$M_u = \tau_u \sqrt{G} + \frac{\tau G_u}{2\sqrt{G}} ,$$

[11]) *Blaschke*, p. 94 (28).
[12]) *Blaschke*, p. 79 (139).

so finden wir aus (7):

$$2\kappa_v \cdot G - 2\tau_u \cdot \sqrt{G^3} - 2\tau \cdot \sqrt{G} \cdot G_u = 0$$

oder wegen $G \neq 0$:

$$\tau_u = -\frac{G_u}{G}\tau + \frac{\kappa_v}{\sqrt{G}}$$

und schließlich:

$$\tau_u = \frac{\partial \log \frac{1}{G}}{\partial u} \cdot \tau + \frac{\kappa_v}{\sqrt{G}} \ . \tag{8}$$

Diese gewöhnliche lineare Differentialgleichung 1. Ordnung für $\tau$, in der $v$ nur als Parameter auftritt, läßt sich nach der Methode von Jacob I Bernoulli[13]) folgendermaßen integrieren:

Wir setzen:

$$\tau = p \cdot q \ , \tag{9}$$

woraus folgt:

$$\tau_u = p_u \cdot q + p \cdot q_u$$

und nach (8):

$$p_u q + p q_u = \frac{\partial \log \frac{1}{G}}{\partial u} \cdot pq + \frac{\kappa_v}{\sqrt{G}} \ . \tag{10}$$

Wir setzen ferner:

$$p_u = \frac{\partial \log \frac{1}{G}}{\partial u} \cdot p \ ,$$

so daß sich jetzt durch Integration nach $u$ ergibt:

$$p = \frac{1}{G} \ , \tag{11}$$

wobei wir die für uns noch willkürliche Integrationskonstante gleich Null gesetzt haben.

Weiterhin gilt nach (10):

$$q_u = \frac{\kappa_v}{\sqrt{G}} \cdot \frac{1}{p} = \kappa_v \cdot \sqrt{G}$$

oder:

$$q = \int_0^u \kappa_v \cdot \sqrt{G} \cdot du + c \ ,$$

so daß wir nach (9) und (11) finden:

$$\tau = \frac{1}{G}\left[\int_0^u \kappa_v \cdot \sqrt{G} \cdot du + c\right] \ .$$

[13]) *Bieberbach*, p. 10.

Man kann in dieser Gleichung $u = 0$ setzen und erhält:

$$c = (\tau \cdot G)_{u=0} ,$$

so daß sich schließlich für die Torsion der geodätischen Linie $v = \text{const.}$ ergibt:

$$\boxed{\tau = \frac{1}{G}\left[\int_0^u \kappa_v \cdot \sqrt{G} \cdot du + (\tau G)_{u=0}\right]} \tag{12}$$

oder in Worten:

**1. Satz:** *Die Torsion der geodätischen Linien einer Schar läßt sich aus ihrer Krümmung $\kappa$ und aus dem Maß $G$ der Bogenlänge ihrer Orthogonaltrajektorien durch Integration von einem gegebenen Anfangswert an berechnen, falls $\kappa$ und $G$ als Funktionen der Bogenlänge $u$ der geodätischen Linien und des Scharparameters $v$ bekannt sind.*

In Formel (12) ist damit auch $\tau$ im allgemeinen eine Funktion von $u$ und $v$. Das Auftreten der Quadratwurzel hat keine Zweideutigkeit zur Folge, da das Vorzeichen von $\sqrt{G}$ von vornherein als positiv festgesetzt ist. Sollte es sich also erweisen, daß man $G$ eindeutig aus $\kappa$ und seinen Ableitungen berechnen kann, so wäre damit gezeigt, daß $\tau$ eindeutig bestimmt ist.

## § 4. Berechnung von G (u, v) (1. Teil).

Für das folgende ist es nun notwendig, die betrachtete Fläche als *analytisch* vorauszusetzen. Der Ortsvektor der geodätischen Linie $v = \text{const.}$ läßt sich dann durch folgende Mac Laurin'sche Reihenentwicklung nach Potenzen von $u$ darstellen:

$$\mathfrak{x}(u,v) = \mathfrak{x}(0,v) + \frac{u}{1!}\cdot \mathfrak{x}_u(0,v) + \frac{u^2}{2!}\cdot \mathfrak{x}_{uu}(0,v) + \cdots + \frac{u^k}{k!}\cdot \mathfrak{x}_{u^k}(0,v) + \cdots , \tag{13}$$

wobei

$$\frac{\partial^k \mathfrak{x}}{\partial u^k} = \mathfrak{x}_{u^k}$$

gesetzt ist und wobei die Koeffizienten von $u^k$ noch von $v$ abhängen. Lassen wir nun $v$ in dem Bereich, für den es definiert ist, variieren, so erhalten wir durch $\mathfrak{x}(u,v)$ alle Punkte $(u,v)$ der Fläche. Wir haben somit in (13) eine kanonische Darstellung unserer Fläche gefunden. Für diese Darstellung müssen die Bedingungen gelten:

$$E = \mathfrak{x}_u^2 \equiv 1$$

und

$$F = \mathfrak{x}_u \cdot \mathfrak{x}_v \equiv 0 .$$

Die erste ist eo ipso durch die Wahl der Bogenlänge als Parameter $u$ erfüllt. Für $F$ dagegen werden wir jetzt eine Potenzreihe nach $u$ berechnen, deren Koeffizienten einzeln verschwinden müssen. Diese Gleichungen werden uns dann dazu dienen, die Koeffizienten von

$$G = \mathfrak{x}_v^2$$

zu bestimmen. Aus (13) finden wir:

$$\mathfrak{x}_u(u,v) = \mathfrak{x}_u(0,v) + \frac{u}{1!}\cdot\mathfrak{x}_{uu}(0,v) + \frac{u^2}{2!}\cdot\mathfrak{x}_{uuu}(0,v) + \cdots + \frac{u^k}{k!}\cdot\mathfrak{x}_{u^{k+1}}(0,v) + \cdots,$$

$$\mathfrak{x}_v(u,v) = \mathfrak{x}_v(0,v) + \frac{u}{1!}\cdot\mathfrak{x}_{uv}(0,v) + \frac{u^2}{2!}\cdot\mathfrak{x}_{uuv}(0,v) + \cdots + \frac{u^k}{k!}\cdot\mathfrak{x}_{u^k v}(0,v) + \cdots,$$

$$F = \mathfrak{x}_u(u,v)\cdot\mathfrak{x}_v(u,v) = (\mathfrak{x}_u\cdot\mathfrak{x}_v)_{0,v} + \cdots + u^k\left(\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!\,(k-i)!}\mathfrak{x}_{u^{i+1}}\cdot\mathfrak{x}_{u^{k-i}v}\right)_{0,v} + \cdots, \tag{14}$$

$$G = \mathfrak{x}_v^2(u,v) = \mathfrak{x}_v^2(0,v) + \cdots + u^k\left(\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!\,(k-i)!}\mathfrak{x}_{u^i v}\cdot\mathfrak{x}_{u^{k-i}v}\right)_{0,v} + \cdots. \tag{15}$$

Unter Benützung der oben eingeführten Einheitsvektoren $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ und der Frenet'schen Formeln:

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi_1}{du} &= \qquad\quad \kappa\,\xi_2\,, \\
\frac{d\xi_2}{du} &= -\kappa\,\xi_1 \qquad\quad + \tau\,\xi_3\,, \\
\frac{d\xi_3}{du} &= \qquad\quad -\tau\,\xi_2
\end{aligned}$$

gilt hier für die Ableitungen von $\mathfrak{x}$:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{x}_u &= \xi_1\,, \\
\mathfrak{x}_{uu} &= \kappa\,\xi_2\,, \\
\mathfrak{x}_{uuu} &= -\kappa^2\,\xi_1 + \kappa_u\,\xi_2 + \kappa\,\tau\,\xi_3\,, \\
\mathfrak{x}_{uuuu} &= -3\kappa\kappa_u\,\xi_1 + (\kappa_{uu} - \kappa^3 - \kappa\tau^2)\,\xi_2 + (2\kappa_u\tau + \kappa\tau_u)\,\xi_3\,, \\
\mathfrak{x}_{uv} &= \xi_{1v}\,, \\
\mathfrak{x}_{uuv} &= \kappa_v\,\xi_2 + \kappa\,\xi_{2v}\,, \\
\mathfrak{x}_{uuuv} &= -2\kappa\kappa_v\,\xi_1 - \kappa^2\,\xi_{1v} + \kappa_{uv}\,\xi_2 + \kappa_u\,\xi_{2v} + (\kappa_v\tau + \kappa\tau_v)\,\xi_3 + {} \\
&\quad \kappa\tau\,\xi_{3v}\,, \\
\mathfrak{x}_{uuuuv} &= -(3\kappa_u\kappa_v + 3\kappa\kappa_{uv})\,\xi_1 - 3\kappa\kappa_u\,\xi_{1v} + (\kappa_{uuv} - 3\kappa^2\kappa_v - {} \\
&\quad \kappa_v\tau^2 - 2\kappa\tau\tau_v)\,\xi_2 + (\kappa_{uu} - \kappa^3 - \kappa\tau^2)\,\xi_{2v} + (2\kappa_{uv}\,\tau + {} \\
&\quad 2\kappa_u\tau_v + \kappa_v\tau_u + \kappa\tau_{uv})\,\xi_3 + (2\kappa_u\tau + \kappa\tau_u)\,\xi_{3v}\,, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Ferner ist:

$$\mathfrak{x}_v = -\sqrt{G} \cdot \xi_3 , \tag{17}$$

wenn die drei Vektoren $\mathfrak{x}_u = \xi_1$, $\mathfrak{x}_v$, $\xi$ und die drei Vektoren $\xi_1$, $\xi_2 = \xi$, $\xi_3$ je ein orthogonales Rechtskreuz bilden sollen; denn dann ist $\mathfrak{x}_v || \xi_3$, aber entgegengesetzt gerichtet. Sobald jetzt also die Werte von $\xi_{1v}$, $\xi_{2v}$ und $\xi_{3v}$ für $u = 0$ bekannt sind, ist es möglich, die aus der Bedingung $F \equiv 0$ folgenden Gleichungen aufzustellen und mit ihrer Hilfe die Koeffizienten von $G$ zu berechnen.

## § 5. Geodätische Polarkoordinaten.

Bevor wir in der Behandlung des allgemeinen Problems fortfahren, betrachten wir jetzt zuerst den Spezialfall, daß alle geodätischen Linien des Feldes durch einen Punkt gehen (der dann streng genommen nicht zum Feld gehört). Wir führen mit ihrer Hilfe geodätische Polarkoordinaten ein und ersetzen in der üblichen Weise $u$ durch $r$ und $v$ durch $\varphi$; $r$ bezeichne also jetzt die vom Pol des Systems ($r = 0$) aus gemessene Bogenlänge auf den geodätischen Linien $\varphi =$ const., während $\varphi$ den Winkel zwischen der Ausgangsrichtung der Linie $\varphi =$ const. und einer festen Anfangsrichtung $\varphi = 0$ bezeichnet und zwischen 0 und $2\pi$ variiert. Die Orthogonaltrajektorien $r =$ const. werden jetzt geschlossene Kurven, die sogenannten geodätischen Entfernungskreise um den Pol $r = 0$. Für diesen Spezialfall können wir nun die Krümmung $\varkappa(r,\varphi)$ der geodätischen Linie $\varphi =$ const. nur so vorgeben, daß sich $\varkappa(0,\varphi)$ entsprechend der Euler'schen Formel darstellen läßt:

$$\varkappa(0,\varphi) = \varkappa_1 \cos^2\varphi + \varkappa_2 \sin^2\varphi , \text{ [14]} \tag{18}$$

wobei $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ die Hauptkrümmungen im Pol und $\varphi = 0$ die eine der Hauptkrümmungsrichtungen bezeichnen.

In dieser Parameterdarstellung hat das Linienelement ebenfalls die Gauß'sche Form:

$$ds^2 = dr^2 + G d\varphi^2 .$$

Da dieses Koordinatensystem sich in der Umgebung des Poles in erster Näherung wie ein ebenes Polarkoordinatensystem verhalten muß, für welches gilt:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 ,$$

so folgt daraus:

$$G(r, \varphi) = r^2 [1 + g(r,\varphi)]$$

mit

[14]) *Blaschke*, p. 57 (26)

so daß also auch wird:
$$\lim_{r\to 0} g(r,\varphi) = 0\,,$$
$$\lim_{r\to 0} G(r,\varphi) = 0 \text{ [15]} \tag{19}$$
und nach (17):
$$\mathfrak{x}_\varphi(0,\varphi) = 0\,. \tag{20}$$

Im Punkte $r = 0$ fallen die Hauptnormalen $\xi_2$ aller geodätischen Linien $\varphi = \text{const.}$ mit der Flächennormalen $\xi$ zusammen, sind also von $\varphi$ unabhängig. Die Tangentenvektoren $\xi_1$ und die Binormalenvektoren $\xi_3$ liegen dort in der Tangentialebene der Fläche. Es bedeutet also keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir für diese Vektoren folgende Annahmen treffen:
$$\begin{aligned} \xi_1(0,\varphi) &= (\cos\varphi\,;\,0\,;\,\sin\varphi)\,,\\ \xi_2(0,\varphi) &= (0\,;\,1\,;\,0)\,,\\ \xi_3(0,\varphi) &= (-\sin\varphi\,;\,0\,;\,\cos\varphi)\,. \end{aligned}$$
Daraus folgt:
$$\left.\begin{aligned} \xi_{1\varphi}(0,\varphi) &= \xi_3(0,\varphi)\,,\\ \xi_{2\varphi}(0,\varphi) &= 0\,,\\ \xi_{3\varphi}(0,\varphi) &= -\,\xi_1(0,\varphi)\,. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Unter Berücksichtigung der Beziehungen:
$$\xi_i\,\xi_k = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k\\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases} \tag{22}$$
und der Gleichungen (16), (20) und (21) können wir jetzt die Koeffizienten der Reihe (14) für $F$ einzeln gleich Null setzen und erhalten folgende Bedingungen (die ersten drei Gleichungen liefern allerdings keine):

(a) $[\mathfrak{x}_r \cdot \mathfrak{x}_\varphi]_{0,\varphi} = 0\,,$

(b) $[\mathfrak{x}_r \cdot \mathfrak{x}_{r\varphi} + \mathfrak{x}_{rr} \cdot \mathfrak{x}_\varphi]_{0,\varphi} = 0\,,$

(c) $\left[\frac{1}{2}\mathfrak{x}_r\mathfrak{x}_{rr\varphi} + \mathfrak{x}_{rr}\mathfrak{x}_{r\varphi} + \frac{1}{2}\mathfrak{x}_{rrr}\mathfrak{x}_\varphi\right]_{0,\varphi} = 0\,,$

(d) $\left[\frac{1}{6}\mathfrak{x}_r\mathfrak{x}_{rrr\varphi} + \frac{1}{2}\mathfrak{x}_{rr}\mathfrak{x}_{rr\varphi} + \frac{1}{2}\mathfrak{x}_{rrr}\mathfrak{x}_{r\varphi} + \frac{1}{6}\mathfrak{x}_{rrrr}\mathfrak{x}_\varphi\right]_{0,\varphi} = 0\,,$

(e) $\left[\frac{1}{24}\mathfrak{x}_r\mathfrak{x}_{rrrr\varphi} + \frac{1}{6}\mathfrak{x}_{rr}\mathfrak{x}_{rrr\varphi} + \frac{1}{4}\mathfrak{x}_{rrr}\mathfrak{x}_{rr\varphi} + \frac{1}{6}\mathfrak{x}_{rrrr}\mathfrak{x}_{r\varphi} + \frac{1}{24}\mathfrak{x}_{rrrrr}\mathfrak{x}_\varphi\right]_{0,\varphi} = 0\,,$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

[15]) *Duschek-Mayer*, p. 201.

Aus (d) folgt:

$$\left[\frac{1}{6}\kappa\kappa_\varphi + \frac{1}{3}\kappa\tau\right]_{0,\varphi} = 0 \ .$$

Setzen wir zuerst $\kappa(0,\varphi) \neq 0$, so ergibt sich:

$$\boxed{\tau(0,\varphi) = -\frac{1}{2}\kappa_\varphi(0,\varphi)} \ ^{16)} \tag{23}$$

und speziell auch für $\kappa(0,\varphi) = 0$:

$$\lim_{r\to 0} \tau(r,\varphi) = -\frac{1}{2}\kappa_\varphi(0,\varphi)\ ^{16)} ,$$

sowie:

$$\tau_\varphi(0,\varphi) = -\frac{1}{2}\kappa_{\varphi\varphi}(0,\varphi) \ . \tag{24}$$

Aus (e) folgt:

$$\left[\frac{1}{8}\kappa_r\kappa_\varphi + \frac{1}{24}\kappa\kappa_{r\varphi} + \frac{1}{4}\kappa_r\tau + \frac{1}{8}\kappa\tau_r\right]_{0,\varphi} = 0$$

und wegen (23):

$$\tau_r(0,\varphi) = -\frac{1}{3}\kappa_{r\varphi}(0,\varphi) \ , \tag{25}$$

sowie daraus:

$$\tau_{r\varphi}(0,\varphi) = -\frac{1}{3}\kappa_{r\varphi\varphi}(0,\varphi) \ . \tag{26}$$

Allgemein sieht man durch Vergleich von (14) und (16), daß $\tau_{r^k}(0,\varphi)$ zuerst im Koeffizienten von $r^{k+3}$ auftritt. Setzt man diesen gleich Null, so kommt $\tau_{r^k}(0,\varphi)$ unter Berücksichtigung von (20) in der erhaltenen Gleichung in folgenden Gliedern vor:

$$\left[\frac{1}{(k+3)!}\mathfrak{x}_r\mathfrak{x}_{r^{k+3}\varphi} + \frac{1}{(k+2)!}\mathfrak{x}_{r^{k+3}}\mathfrak{x}_{r\varphi}\right]_{0,\varphi} ,$$

und es hat darin entsprechend (21) und (22) folgenden Koeffizienten:

$$\kappa(0,\varphi)\left[\frac{1}{(k+2)!} - \frac{1}{(k+3)!}\right] = \kappa(0,\varphi)\frac{k+2}{(k+3)!} \ .$$

Für $\kappa(0,\varphi) \not\equiv 0$ läßt sich also $\tau_{r^k}(0,\varphi)$ stets aus der Gleichung $F \equiv 0$ berechnen, und daraus findet man dann auch $\tau_{r^k\varphi^l}(0,\varphi)$.

---

16) *Finsler*, p. 112 (125) und vorhergehende.

Da nun in den Koeffizienten der Reihenentwicklung (15) für $G$ keine andern Größen als $\kappa$, $\tau$ und deren Ableitungen nach $r$ und $\varphi$ im Punkte $(0, \varphi)$ auftreten können, ist damit gezeigt, daß sich $G$ für unsere spezielle Darstellung einer analytischen Fläche eindeutig aus $\kappa$ und seinen Ableitungen berechnen läßt. Den gefundenen Wert für $G$ kann man dann in (12) einsetzen, wo $\tau$ wegen (19) jetzt die Form hat:

$$\boxed{\tau(r,\varphi) = \frac{1}{G(r,\varphi)} \int_0^r \kappa_\varphi(r,\varphi) \cdot \sqrt{G(r,\varphi)}\, dr\ .} \tag{27}$$

Die Torsion $\tau$ der durch einen Punkt gehenden geodätischen Linien läßt sich also eindeutig aus der Krümmung $\kappa$ und ihren Ableitungen berechnen. Durch $\kappa$ und $\tau$ sind aber die Linien und ihre Enveloppe, die Fläche, von Bewegungen abgesehen, vollständig bestimmt. Es gilt also folgender

**2. Satz:** *Eine analytische Fläche ist durch ihre Normalkrümmung längs aller durch einen Punkt gehenden geodätischen Linien bis auf Bewegungen eindeutig bestimmt.*

Wir wollen jetzt noch die ersten Koeffizienten der Reihe (15) für $G$ berechnen. Unter Berücksichtigung von (16) und (20) bis (22) finden wir nacheinander:

(a) $\quad \mathfrak{x}_\varphi^2(0,\varphi) = 0\ ,$

(b) $\quad [2\mathfrak{x}_\varphi \mathfrak{x}_{r\varphi}]_{0,\varphi} = 0\ ,$

(c) $\quad [\mathfrak{x}_\varphi \mathfrak{x}_{rr\varphi} + \mathfrak{x}_{r\varphi}^2]_{0,\varphi} = 1\ ,$

(d) $\quad \left[\frac{1}{3}\mathfrak{x}_\varphi \mathfrak{x}_{rrr\varphi} + \mathfrak{x}_{r\varphi}\mathfrak{x}_{rr\varphi}\right]_{0,\varphi} = 0\ ,$

(e) $\quad \left[\frac{1}{12}\mathfrak{x}_\varphi \mathfrak{x}_{rrrr\varphi} + \frac{1}{3}\mathfrak{x}_{r\varphi}\mathfrak{x}_{rrr\varphi} + \frac{1}{4}\mathfrak{x}_{rr\varphi}^2\right]_{0,\varphi}$

$$= \left[-\frac{1}{3}\kappa^2 + \frac{1}{3}\kappa_\varphi \tau + \frac{1}{3}\kappa\tau_\varphi + \frac{1}{4}\kappa_\varphi^2\right]_{0,\varphi}$$

und wegen (23) und (24):

$$= \left[-\frac{1}{3}\kappa^2 + \frac{1}{12}\kappa_\varphi^2 - \frac{1}{6}\kappa\kappa_{\varphi\varphi}\right]_{0,\varphi}\ .$$

$G(r,\varphi)$ hat also die Entwicklung:

$$\boxed{G(r,\varphi) = r^2 + r^4 \cdot \left[-\frac{1}{3}\kappa^2 + \frac{1}{12}\kappa_\varphi^2 - \frac{1}{6}\kappa\kappa_{\varphi\varphi}\right]_{0,\varphi} + \cdots}$$

Da $\kappa(0,\varphi)$ der Euler'schen Formel

$$\kappa(0,\varphi) = \kappa_1 \cos^2\varphi + \kappa_2 \sin^2\varphi \tag{18}$$

genügen muß, wobei $\kappa_1$ und $\kappa_2$ die Hauptkrümmungen im Pol sind, ergibt sich daraus:

$$\kappa_\varphi(0,\varphi) = 2(\kappa_2 - \kappa_1)\sin\varphi\cos\varphi\,, \tag{28}$$

$$\kappa_{\varphi\varphi}(0,\varphi) = 2(\kappa_2 - \kappa_1)(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,. \tag{29}$$

Setzen wir die Werte aus (18), (28) und (29) in den Koeffizienten (e) von $G$ ein, so finden wir:

$$\begin{aligned}\left[-\frac{1}{3}\kappa^2 + \frac{1}{12}\kappa_\varphi^2 - \frac{1}{6}\kappa\kappa_{\varphi\varphi}\right]_{0,\varphi} &= -\frac{2}{3}\kappa_1\kappa_2\sin^2\varphi\cos^2\varphi - \frac{1}{3}\kappa_1\kappa_2\sin^4\varphi - \frac{1}{3}\kappa_1\kappa_2\cos^4\varphi \\ &= -\frac{1}{3}\kappa_1\kappa_2 \\ &= -\frac{1}{3}K_0\,,\end{aligned}$$

wenn wir mit $K_0$ die Gauß'sche Krümmung der Fläche im Pole $r = 0$ bezeichnen. Es ist also:

$$\boxed{K_0 = \left[\kappa^2 - \frac{1}{4}\kappa_\varphi^2 + \frac{1}{2}\kappa\kappa_{\varphi\varphi}\right]_{0,\varphi}\,.} \;{}^{17)} \tag{30}$$

## § 6. Berechnung von G (u, v) (2. Teil).

Nachdem wir den Spezialfall, daß alle geodätischen Linien unseres Feldes durch einen Punkt gehen, im vorigen Paragraphen erledigt haben, kehren wir jetzt zum allgemeinen Problem zurück. Wir können nun annehmen, daß die geodätischen Linien des Feldes von einer Orthogonaltrajektorie $u = 0$ ausgehen. Diese Orthogonaltrajektorie sei etwa durch ihre natürlichen Gleichungen, d. h. durch ihre Krümmung $\kappa^*$ und ihre Torsion $\tau^*$ als Funktionen ihrer Bogenlänge gegeben, wobei wir ohne Einschränkung ihre Bogenlänge mit ihrem Parameter $v$ identifizieren können, so daß also gilt:

$$G(0,v) = 1\,. \tag{31}$$

Ferner muß aber noch in jedem ihrer Punkte die Tangentialebene an die Fläche oder, was auf dasselbe herauskommt, die Flächennormale $\xi(0,v)$

[17]) *Finsler*, p. 102 (105).

gegeben sein, damit die Anfangsrichtung jeder geodätischen Linie $v=$ const. bekannt ist. Bezeichnen wir die drei Einheitsvektoren des begleitenden Dreibeins von $u=0$ mit $\xi_1^*$, $\xi_2^*$ und $\xi_3^*$, so ist $\xi(0,v)$ nun bestimmt durch die Ebene $(\xi_2^*, \xi_3^*)$ und den Winkel:

$$\vartheta(v) = \arc\cos\left(\xi(0,v)\cdot\xi_2^*(0,v)\right). \tag{32}$$

Aus (17) und (31) folgt:

$$\xi_3(0,v) = -\mathfrak{x}_v(0,v)$$

oder:

$$\xi_3(0,v) = -\xi_1^*(v). \tag{33}$$

Die Vektoren $\xi_2^*(v)$, $\xi_3^*(v)$, $\xi_1(0,v)$ und $\xi_2(0,v)$ liegen also in einer Ebene, und es gilt nach der Definition (32) und wegen $\xi_2 = \xi$:

$$\xi_1(0,v) = -\sin\vartheta(v)\cdot\xi_2^*(v) + \cos\vartheta(v)\cdot\xi_3^*(v), \tag{34}$$

$$\xi_2(0,v) = \cos\vartheta(v)\cdot\xi_2^*(v) + \sin\vartheta(v)\cdot\xi_3^*(v). \tag{35}$$

Wenden wir auf das Dreibein $\xi_1^*$, $\xi_2^*$, $\xi_3^*$ die Frenet'schen Formeln an:

$$\begin{aligned}
\xi_{1v}^* &= \kappa^*\xi_2^*, \\
\xi_{2v}^* &= -\kappa^*\xi_1^* + \tau^*\xi_3^*, \\
\xi_{3v}^* &= -\tau^*\xi_2^*,
\end{aligned}$$

so ergibt sich aus (33) bis (35):

$$\left.\begin{aligned}
\xi_{1v}(0,v) &= \kappa^*\sin\vartheta\cdot\xi_1^* - \left(\tau^* + \frac{d\vartheta}{dv}\right)\cos\vartheta\cdot\xi_2^* - \left(\tau^* + \frac{d\vartheta}{dv}\right)\sin\vartheta\cdot\xi_3^*, \\
\xi_{2v}(0,v) &= -\kappa^*\cos\vartheta\cdot\xi_1^* - \left(\tau^* + \frac{d\vartheta}{dv}\right)\sin\vartheta\cdot\xi_2^* + \left(\tau^* + \frac{d\vartheta}{dv}\right)\cos\vartheta\cdot\xi_3^*, \\
\xi_{3v}(0,v) &= -\kappa^*\cdot\xi_2^*.
\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Unter Berücksichtigung der Beziehungen

$$\xi_i^*\cdot\xi_k^* = \begin{cases} 1 \text{ für } i=k \\ 0 \text{ für } i\neq k \end{cases}$$

und der Gleichungen (16) und (33) bis (36) können wir jetzt die Koeffizienten der Reihe (14) für $F$ einzeln gleich Null setzen, wobei die beiden ersten Gleichungen wiederum keine Bedingungen liefern. Wir erhalten:

(a) $[\mathfrak{x}_u \cdot \mathfrak{x}_v]_{0,v} = 0\,,$

(b) $[\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_{uv} + \mathfrak{x}_{uu} \mathfrak{x}_v]_{0,v} = 0\,,$

(c) $\left[\frac{1}{2}\, \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_{uuv} + \mathfrak{x}_{uu} \mathfrak{x}_{uv} + \frac{1}{2}\, \mathfrak{x}_{uuu} \mathfrak{x}_v\right]_{0,v} = 0\,,$

(d) $\left[\frac{1}{6} \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_{uuuv} + \frac{1}{2}\, \mathfrak{x}_{uu}\, \mathfrak{x}_{uuv} + \frac{1}{2}\, \mathfrak{x}_{uuu}\, \mathfrak{x}_{uv} + \frac{1}{6} \mathfrak{x}_{uuuu}\, \mathfrak{x}_v\right]_{0,v} = 0\,,$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Aus (c) folgt:

$$\left[-\frac{1}{2}\kappa\left(\tau^* + \frac{d\vartheta}{dv}\right) - \frac{1}{2}\,\kappa\tau\right]_{0,v} = 0$$

oder für $\kappa(0,v) \not\equiv 0$:

$$\boxed{\tau(0,v) = -\left(\tau^* + \frac{d\vartheta}{dv}\right)} \tag{37}$$

und daraus:

$$\tau_v(0,v) = -\left(\tau_v^* + \frac{d^2\vartheta}{dv^2}\right)\,. \tag{38}$$

Aus (d) finden wir:

$$\left[\frac{1}{6}\,\kappa\kappa_v - \frac{1}{3}\,\kappa_u\left(\tau^* + \frac{d\vartheta}{dv}\right) - \frac{1}{3}\,(\kappa\kappa^* \sin\vartheta + \kappa_u)\,\tau - \frac{1}{6}\,\kappa\tau_u\right]_{0,v} = 0$$

und wegen (37):

$$\tau_u(0,v) = \left[\kappa_v + 2\,\kappa^* \sin\vartheta\left(\tau^* + \frac{d\vartheta}{dv}\right)\right]_{0,v}\,. \tag{39}$$

Durch Vergleich von (14) und (16) sieht man wieder allgemein, daß $\tau_{u^k}(0,v)$ zuerst im Koeffizienten von $u^{k+2}$ auftritt. Setzt man diesen gleich Null, so kommt $\tau_{u^k}(0,v)$ nur in folgendem Glied vor:

$$\left[\frac{1}{(k+2)\,!}\,\mathfrak{x}_{u^{k+3}} \cdot \mathfrak{x}_v\right]_{0,v}\,,$$

und dort hat es den Koeffizienten:

$$-\,\kappa(0,v) \cdot \frac{1}{(k+2)\,!}\,.$$

Für $\kappa(0,v) \not\equiv 0$ kann man also alle Ableitungen $\tau_{u^k}(0,v)$ und daraus $\tau_{u^k v^l}(0,v)$ berechnen. Da in den Koeffizienten der Reihe (15) für $G(u,v)$ keine andern Größen als $\kappa, \tau$ und deren Ableitungen an der Stelle $(0,v)$ auftreten können, ist damit der Beweis erbracht, daß sich $G$ für eine analytische Fläche eindeutig aus $\kappa$ und seinen Ableitungen, sowie aus den Anfangsbedingungen $\kappa^*$, $\tau^*$ und $\vartheta$ berechnen läßt. Diesen Wert für $G$ kann man in (12) einsetzen, woraus man die Torsion $\tau(u,v)$ der geodätischen Linien $v = \text{const.}$ eindeutig erhält. Sie hat jetzt wegen (31) die Form:

$$\boxed{\tau(u,v) = \frac{1}{G(u,v)}\left[\int_0^u \kappa_v(u,v)\cdot\sqrt{G(u,v)}\cdot du + \tau(0,v)\right].} \tag{40}$$

Durch $\kappa(u,v)$ und $\tau(u,v)$, sowie durch den Anfangsstreifen aus $\kappa^*$, $\tau^*$ und $\vartheta$ ist die Fläche als Enveloppe des Feldes der geodätischen Linien bis auf Bewegungen bestimmt. Es gilt also:

**3. Satz:** *Eine analytische Fläche ist durch ihre Normalkrümmung längs eines Feldes geodätischer Linien und durch einen dazu orthogonalen Anfangsstreifen eindeutig bestimmt.*

Wir berechnen jetzt noch unter Berücksichtigung von (16) und (33) bis (36) die ersten Koeffizienten der Entwicklung (15) für $G$:

$$\left.\begin{aligned}
&(\mathrm{a})\quad \mathfrak{x}_v^2(0,v) = 1\,,\\
&(\mathrm{b})\quad 2\left[\mathfrak{x}_v\mathfrak{x}_{uv}\right]_{0,v} = 2\kappa^*\sin\vartheta\,,\\
&(\mathrm{c})\quad \left[\mathfrak{x}_v\mathfrak{x}_{uuv} + \mathfrak{x}_{uv}^2\right]_{0,v} = \left[\kappa^{*2}\sin^2\vartheta - \kappa\kappa^*\cos\vartheta + \left(\tau^* + \frac{d\vartheta}{dv}\right)^2\right]_{0,v}\\
&(\mathrm{d})\quad \left[\frac{1}{3}\mathfrak{x}_v\mathfrak{x}_{uuuv} + \mathfrak{x}_{uv}\mathfrak{x}_{uuv}\right]_{0,v}
\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

$$= \Big[-\frac{1}{3}\kappa^2\kappa^*\sin\vartheta - \frac{1}{3}\kappa_u\kappa^*\cos\vartheta - \kappa\kappa^{*2}\sin\vartheta\cos\vartheta - \kappa_v\left(\tau^* + \frac{d\vartheta}{dv}\right) - \frac{1}{3}\kappa_v\tau - \frac{1}{3}\kappa\tau_v\Big]_{0,v}$$

und wegen (37) und (38):

$$= \Big[-\frac{1}{3}\kappa^2\kappa^*\sin\vartheta - \frac{1}{3}\kappa_u\kappa^*\cos\vartheta - \kappa\kappa^{*2}\sin\vartheta\cos\vartheta - \frac{2}{3}\kappa_v\left(\tau^* + \frac{d\vartheta}{dv}\right) + \frac{1}{3}\kappa\left(\tau_v^* + \frac{d^2\vartheta}{dv^2}\right)\Big]_{0,v}.$$

$G$ hat also die Darstellung:

$$\boxed{G(u,v) = 1 + u\cdot 2\kappa^*\sin\vartheta + u^2\cdot\left[\kappa^{*2}\sin^2\vartheta - \kappa\kappa^*\cos\vartheta + \left(\tau^* + \frac{d\vartheta}{dv}\right)^2\right]_{0,v} + \cdots}\,. \tag{42}$$

Zum Schluß wollen wir noch für den hier häufig auftretenden Ausdruck

$$\tau^* + \frac{d\vartheta}{dv}$$

eine geometrische Bedeutung finden. Im Punkte $(0, v)$ können wir auf alle durch ihn gehenden geodätischen Linien die Euler'sche Formel (18) bzw. (28) und die Gleichung (23) anwenden. Dann ist:

$$\tau(\varphi) = -\frac{1}{2}\kappa_\varphi \tag{23}$$

und

$$\kappa_\varphi = (\kappa_2 - \kappa_1)\sin(2\varphi)\,, \tag{28}$$

also:

$$\tau(\varphi) = \frac{1}{2}(\kappa_1 - \kappa_2)\sin(2\varphi)\,, \tag{43}$$

wobei $\varphi = 0$ die eine der Hauptkrümmungsrichtungen bezeichnet. Vermehren wir $\varphi$ um $\frac{\pi}{2}$, so wechselt $\tau$ das Vorzeichen. Die Torsionen zweier zueinander senkrechter geodätischer Linien sind also im Schnittpunkte entgegengesetzt gleich. Nun ist nach (37):

$$\tau(0, v) = -\left(\tau^* + \frac{d\vartheta}{dv}\right).$$

Bezeichnen wir mit $\bar{\tau}$ die Torsion der zu $v = \text{const.}$ in $(0, v)$ senkrechten geodätischen Linie, die also dort die Orthogonaltrajektorie $u = 0$ berührt, so ist demnach wegen

$$\bar{\tau}(0, v) = -\tau(0, v):$$

$$\boxed{\bar{\tau}(0, v) = \tau^* + \frac{d\vartheta}{dv}\,.}\ ^{18)} \tag{44}$$

Diese Gleichung stellt hier den Zusammenhang zwischen der gewöhnlichen Torsion $\tau^*$ und der geodätischen Torsion $\bar{\tau}$ (d. h.: Torsion der geodätischen Tangente) der Orthogonaltrajektorie $u = 0$ dar. Da wir aber als solche irgendeine Flächenkurve wählen können, so gilt (44) auch ganz allgemein für deren Torsion $\tau^*$, geodätische Torsion $\bar{\tau}$ und den Winkel $\vartheta$ zwischen ihrer Hauptnormalen und der Flächennormalen, die sich sämtlich als Funktionen der Bogenlänge $v$ dieser Flächenkurve ausdrücken.

[18]) *Bianchi*, p. 166 (20).

## § 7. Diskussion der Ergebnisse.

Die Sätze der §§ 5 und 6 rechtfertigen es, die Gleichung $\kappa = \kappa(u,v)$, d. h.: die Beziehung zwischen der Normalkrümmung $\kappa$ längs einer Schar geodätischer Linien, deren Bogenlänge $u$ und der Bogenlänge $v$ der Anfangskurve für eine analytische Fläche als *natürliche Gleichung der Fläche* zu bezeichnen. Kennt man außer $\kappa(u,v)$ noch geeignete Anfangsbedingungen, so ist die Fläche eindeutig bestimmt. Die Anfangsbedingungen sind im ersten Falle, wenn alle geodätischen Linien des Feldes durch einen Punkt gehen, dieser Pol und seine Tangentialebene, sowie darin eine Anfangsrichtung $\varphi = 0$, und im zweiten (allgemeinen) Falle der Streifen $u = 0$ (bestimmt durch Krümmung $\kappa^*(v)$, Torsion $\tau^*(v)$, Anfangspunkt und -richtung und den Winkel $\vartheta(v)$). Man kann dann in jedem Falle den Ortsvektor $\mathfrak{x}(u,v)$ der geodätischen Linien $v = \text{const.}$ und somit der Fläche berechnen[19].

Tatsächlich werden die Linien $v = \text{const.}$ der so konstruierten Fläche geodätische Linien; denn nach Konstruktion wird $E \equiv 1$ und $F \equiv 0$. Für $F \equiv 0$ wird nun die geodätische Krümmung $\kappa_g$ der Linien $v = \text{const.}$:

$$\kappa_g = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}} \quad {}^{20)},$$

so daß also für $E \equiv 1$ $\kappa_g$ verschwindet. Dies ist aber eine hinreichende Bedingung dafür, daß die Kurven $v = \text{const.}$ geodätisch sind.

Eine notwendige Bedingung, der die vorzugebende Funktion $\kappa(u,v)$ unterliegt, ist die, daß sie in beiden Variablen analytisch ist. Im Spezialfalle der Polarkoordinaten kommt als weitere Bedingung die Euler'sche Formel für $\kappa(0,\varphi)$ hinzu. Die Annahmen $\kappa(0,v) \not\equiv 0$ bzw. $\kappa(0,\varphi) \not\equiv 0$ sind unwesentlich, wie sich durch Grenzübergänge in den einzelnen Formeln, z. B. (23), erweist.

Über die Verallgemeinerungsfähigkeit läßt sich sagen, daß das allgemeine Ergebnis wahrscheinlich auf höhere Differentialgeometrien übertragen werden kann. Von den Beweismethoden wird man dies nicht in gleichem Umfang erwarten dürfen, da sie zum großen Teil der gewöhnlichen Differentialgeometrie eigentümlich sind und den Anforderungen verallgemeinerter Maßbestimmungen nicht mehr genügen. Immerhin kann man bemerken, daß manche während der Beweise erhaltene Formeln auch für allgemeine Räume und Maßbestimmungen richtig bleiben, z. B. (23) im Riemann'schen Raum[21] und (30)[22].

---

[19]) *Blaschke*, p. 12 (77).
[20]) *Blaschke*, p. 89 (10).
[21]) *Finsler*, p. 112 (125).
[22]) *Finsler*, p. 102 (105).

## § 8. Beispiele.

In diesem Paragraphen sollen folgende Spezialfälle untersucht werden:

I. $\kappa(u,v) = \text{const.}$, $\tau(u,v) = \text{const.}$
A) für die geodätischen Linien durch einen Punkt,
B) für ein allgemeines geodätisches Feld.

II. $\kappa_v(u,v) = 0$, $\kappa = \kappa(u)$, $\tau(u,v) = \text{const.}$
A) für die geodätischen Linien durch einen Punkt,
B) für ein allgemeines geodätisches Feld.

IA) Setzen wir $\kappa(r,\varphi) = \text{const.}$, so ergibt sich aus (27):

$$\tau(r,\varphi) = 0\,.$$

Diese geodätischen Linien sind sämtlich Kreise mit dem Radius $\frac{1}{\kappa}$, die die Tangentialebene des Poles dort von einer Seite her berühren und deren Ebenen senkrecht zu ihr stehen. Ihre Enveloppe ist die Kugel, die durch die Angabe $\kappa(r,\varphi) = \text{const.}$ demnach eindeutig bis auf Bewegungen bestimmt ist. Es gilt also:

**4. Satz:** *Die einzigen Flächen mit einer Schar durch einen regulären Punkt gehender geodätischer Linien gleicher konstanter Krümmung sind die Kugel und ihre Ausartung, die Ebene.*

IB) Für $\kappa(u,v) = \text{const.}$ erhalten wir aus (40) und (37):

$$\tau(u,v) = \frac{\tau(0,v)}{G(u,v)} = -\frac{\tau^*(v) + \frac{d\vartheta(v)}{dv}}{G(u,v)}\,. \tag{45}$$

Die Forderung $\tau = \text{const.}$ kann erstens durch $\tau(0,v) = 0$ erfüllt werden. Dann unterliegt $G(u,v)$ keiner weiteren Bedingung. Für $\tau(0,v) \neq 0$ muß aber zweitens $G(u,v) = \text{const.}$ sein; denn nur so kann überhaupt nach (42) $G$ und damit $\tau$ von $u$ unabhängig werden.

1. Wir betrachten also zuerst den Fall $\tau(0,v) = 0$. Dann verschwindet nach (44) die geodätische Torsion der Anfangskurve $u = 0$. Eine Kurve mit verschwindender geodätischer Torsion ist aber notwendig eine Krümmungslinie[23]), wie man auch sofort aus (43) erkennt, wo die Torsion

[23]) *Bianchi*, p. 165.

der geodätischen Linien für $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$, d.h. für die Hauptkrümmungsrichtungen verschwindet.

Gibt man also die Anfangskurve $u = 0$ durch $\kappa^*(v)$ und $\tau^*(v)$ vor, so ist damit auch $\vartheta(v)$ bis auf eine additive willkürliche Konstante bestimmt:

$$\vartheta(v) = -\int_0^v \tau^*(v)\,dv + \vartheta(0)\,.$$

Für die zu $u = 0$ orthogonalen geodätischen Linien $v = \text{const.}$ gilt $\kappa = \text{const.}$ und $\tau = 0$. Sie sind also für $\kappa \neq 0$ sämtlich Kreise mit dem Radius $\frac{1}{\kappa}$, die den Anfangsstreifen berühren und deren Ebenen normal zur Anfangskurve sind. Diese Bedingung liefert uns die Röhrenflächen, bei denen auch tatsächlich alle Orthogonaltrajektorien dieser Kreise, der sogenannten Charakteristiken, Krümmungslinien sind[24]).

Speziell erhalten wir hier:

a) für $\kappa^* = 0$ den Kreiszylinder,
b) für $\kappa^* = \text{const.} \neq 0$, $\tau^* = 0$, $\kappa^* > \kappa$, $\vartheta = 0$ den Torus und
c) für $\kappa^* = \kappa \neq 0$, $\tau^* = 0$, $\vartheta = 0$ die Kugel.

Ist aber neben $\tau = 0$ auch $\kappa = 0$, so ergibt sich als Grenzfall der Röhrenfläche eine Regelfläche aus einer einparametrigen Schar von Geraden, etwa für $\vartheta = 0$ die Fläche aus den Binormalen der Anfangskurve. Wir wollen diese Regelfläche noch kurz untersuchen und beweisen, daß sie abwickelbar ist. Ist die Anfangskurve $u = 0$ durch den Ortsvektor $\mathfrak{x}(0,v)$ dargestellt, so hat die Regelfläche offenbar die Gleichung:

$$\mathfrak{x}(u,v) = \mathfrak{x}(0,v) + \xi_1(0,v)\cdot u\,, \tag{46}$$

wo $\xi_1$ wie bisher der Tangentenvektor der geodätischen Linien $v = \text{const.}$ ist. Wir betrachten nun die Determinante:

$$D = [\xi_{1v}(0,v)\,;\ \xi_1(0,v)\,;\ \mathfrak{x}_v(0,v)]\,.$$

Setzen wir hier die entsprechenden Werte aus (34) und (36) ein, so erhalten wir:

$$D = \Big[\kappa^* \sin\vartheta\cdot\xi_1^* - \left(\tau^* + \frac{d\vartheta}{dv}\right)\cos\vartheta\cdot\xi_2^* - \left(\tau^* + \frac{d\vartheta}{dv}\right)\sin\vartheta\cdot\xi_3^*\,;$$
$$-\sin\vartheta\cdot\xi_2^* + \cos\vartheta\cdot\xi_3^*\,;\ \ \xi_1^*\Big]$$

[24]) *Scheffers*, p. 220.

und wegen: $[\xi_1^*; \xi_2^*; \xi_3^*] = 1$:

$$D = -\left(\tau^* + \frac{d\vartheta}{dv}\right).$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Regelfläche (46) abwickelbar ist, ist:

$$D = 0\,^{25)}.$$

Diese Bedingung ist hier nun wirklich erfüllt, da die Anfangskurve $u = 0$ Krümmungslinie sein muß, damit nach (45) $\tau(0,v)$ verschwindet. Die Forderung $\tau(u,v) = 0$ und $\kappa(u,v) = 0$ liefert uns also als Grenzfall der Röhrenflächen alle Torsen, und es gilt, daß eine Regelfläche dann und nur dann eine Torse (d. h. abwickelbar) ist, wenn die Orthogonaltrajektorien ihrer Erzeugenden Krümmungslinien sind. Diese Tatsache ist auch auf andere Weise einzusehen, wenn man bedenkt, daß die Erzeugenden der Regelfläche, die ja immer Asymptotenlinien sind, unter der gemachten Voraussetzung auch Krümmungslinien werden und daß die Fläche daher durchweg parabolisch gekrümmt sein muß.

Nehmen wir aber von vornherein die geodätischen Linien als Geraden an, also $\kappa = 0$, so wird ihre Torsion $\tau$ unbestimmt. (45) ergibt dann keine Bedingung für den Anfangsstreifen, der demnach beliebig sein kann. Ebenso wird $D$ unbestimmt. Die Forderung $\kappa = 0$ allein liefert also sämtliche Regelflächen.

2. Wir gehen jetzt zum zweiten Fall über:

$$G(u,v) = \text{const.} = 1\,.$$

In (42) müssen dann alle höheren Glieder der Entwicklung verschwinden. Wir erhalten für $\kappa = \text{const.} \neq 0$ zunächst aus (41b bis d):

(b) $\quad 2\,\kappa^* \sin\vartheta = 0\,,$

(c) $\quad \left[\kappa^{*2} \sin^2\vartheta - \kappa\kappa^* \cos\vartheta + \left(\tau^* + \frac{d\vartheta}{dv}\right)^2\right]_{0,v} = 0\,,$

(d) $\quad \left[-\frac{1}{3}\kappa^2\kappa^* \sin\vartheta - \kappa\kappa^{*2} \sin\vartheta\cos\vartheta + \frac{1}{3}\kappa\left(\tau_v^* + \frac{d^2\vartheta}{dv^2}\right)\right]_{0,v} = 0.$

Aus diesen drei Gleichungen ergeben sich als notwendige Bedingungen entweder:

a) $\quad \kappa^* = 0\,,\ \tau^* + \frac{d\vartheta}{dv} = 0$

oder

b) $\quad \vartheta = 0,\ \tau^* = \sqrt{\kappa\kappa^*} = \text{const.}$ wegen $\tau_v^* = 0$, also $\kappa^* = \text{const.}$

---

[25]) *Blaschke*, p. 73 (110).

a) Dieser Fall liefert uns für $\kappa \neq 0$ wiederum den Kreiszylinder. Nach (45) wird $\tau = 0$. Die Anfangskurve $u = 0$ ist eine Mantellinie, und die zu ihr orthogonalen geodätischen Linien sind Kreise, deren Ebenen normal zu ihr sind. Es ist evident, daß hier $G =$ const. wird, so daß also das Verschwinden der höheren Glieder der Reihe für $G$ nicht mehr bewiesen zu werden braucht. Für $\kappa = 0$ artet der Kreiszylinder in die Ebene aus.

b) Im zweiten Falle finden wir nach (45):

$$\tau = -\tau^* = -\sqrt{\kappa\kappa^*} = \text{const.} \tag{47}$$

Die geodätischen Linien $v =$ const. und ihre Orthogonaltrajektorie $u = 0$ sind also für $\kappa \neq 0$ und $\tau \neq 0$ gewöhnliche Schraubenlinien. Wir werden nun zeigen, daß der Kreiszylinder die einzige Fläche ist, die diesen Bedingungen genügt. Dazu stellen wir die Kurve $u = 0$ in der Form dar:

$$\mathfrak{x}^*(q) = (a \cos q\,; a \sin q\,; b^* q)\,. \tag{48}$$

Wir betrachten weiter alle zu ihr orthogonalen, auf dem gleichen Kreiszylinder liegenden Schraubenlinien:

$$\mathfrak{x}(q) = (a \cos q\,; a \sin q\,; b q + \text{const.})\,. \tag{49}$$

Wegen der Orthogonalität müssen die Vektoren:

$$\mathfrak{x}_q(q) = (-a \sin q\,; a \cos q\,; b)$$

und:

$$\mathfrak{x}^*_q(q) = (-a \sin q\,; a \cos q\,; b^*)$$

aufeinander senkrecht stehen, also:

$$a^2 + b b^* = 0$$

oder:

$$b = -\frac{a^2}{b^*}\,. \tag{50}$$

Für (49) ergibt sich jetzt:

$$\mathfrak{x}(q) = \left(a \cos q\,; a \sin q\,; \; -\frac{a^2}{b^*} q + \text{const.}\right). \tag{51}$$

Für diese Schraubenlinie gilt[26]):

$$\kappa = \frac{a}{a^2 + \dfrac{a^4}{b^{*2}}} = \frac{b^{*2}}{a(a^2 + b^{*2})}\,,$$

[26]) *Blaschke*, p. 14.

$$\tau = \frac{-\frac{a^2}{b^*}}{a^2 + \frac{a^4}{b^{*2}}} = \frac{-b^*}{a^2 + b^{*2}} ,$$

ebenso für (48):

$$\kappa^* = \frac{a}{a^2 + b^{*2}} ,$$

$$\tau^* = \frac{b^*}{a^2 + b^{*2}} .$$

Demnach ist also:

$$\tau = -\tau^* ,$$

$$\kappa = \frac{\tau^{*2}}{\kappa^*} ,$$

wie nach (47) für die Schraubenlinien $v = \text{const.}$ verlangt war. Da neben diesen natürlichen Gleichungen auch die Anfangsbedingungen für die Schraubenlinien (51) und $v = \text{const.}$ übereinstimmen (für (48) ist auch $\vartheta = 0$ erfüllt), sind demnach die beiden Scharen identisch. Damit ist unsere Behauptung bewiesen, daß der Kreiszylinder die einzige Fläche ist, die sich aus dem Falle b) ergibt. Aus der Abwicklung des Zylinders ist klar, daß auch $G = \text{const.}$ wird. Die Spezialfälle, in denen eine oder mehrere der Größen $\kappa^*$, $\tau^*$, $\kappa$, $\tau$ verschwinden, liefern ebenfalls den Kreiszylinder oder seine Ausartung, die Ebene.

Wir finden also folgenden

**5. Satz:** *Die einzigen Flächen mit einem Feld geodätischer Linien gleicher konstanter Krümmung und Torsion sind die Kugel, der Kreiszylinder, die allgemeinen Röhrenflächen und die Regelflächen, wobei sich speziell die Torsen als Grenzfall der Röhrenflächen für verschwindende Krümmung der geodätischen Linien ergeben. Die geodätischen Linien des Feldes können auf dem Kreiszylinder Schraubenlinien sein; sonst sind es auf den Röhrenflächen Kreise und auf den Regelflächen Geraden.*

IIA) Setzen wir $\kappa = \kappa(r)$, also $\kappa_\varphi(r,\varphi) = 0$, so ergibt sich aus (27):

$$\tau(r,\varphi) = 0 .$$

Diese geodätischen Linien sind also kongruente ebene Kurven, die die Tangentialebene des Poles $r = 0$ dort berühren und deren Ebenen normal zu ihr stehen. Ihre Enveloppe ist eine Rotationsfläche. Demnach gilt:

**6. Satz:** *Die einzigen Flächen mit einer Schar durch einen regulären Punkt gehender geodätischer Linien gleicher Krümmung als Funktion ihrer Bogenlänge von diesem Punkte aus sind die Rotationsflächen, die von ihrer Rotationsachse in diesem Punkte getroffen werden. Die Meridiankurven der Fläche sind dann die geodätischen Linien der Schar.*

IIB) Für $\kappa_v(u,v) = 0$ finden wir aus (40) und (37) wiederum:

$$\tau(u,v) = \frac{\tau(0,v)}{G(u,v)} = -\frac{\tau^* + \frac{d\vartheta}{dv}}{G(u,v)} \quad . \tag{52}$$

Soll nun $\tau(u,v)$ konstant werden, so bestehen wieder die beiden Möglichkeiten:

$$1. \quad \tau(0,v) = 0$$

und

$$2. \quad G(u,v) = 1.$$

1. Aus (52) ergibt sich:

$$\tau^* + \frac{d\vartheta}{dv} = 0 \quad .$$

Die Anfangskurve $u = 0$ muß also Krümmungslinie sein (cf. IB). Dann ergeben $\kappa = \kappa(u)$ und $\tau(u,v) = 0$ dazu orthogonale ebene kongruente geodätische Linien $v =$ const., die ebenso wie alle Kurven $u =$ const. Krümmungslinien werden. Wird besonders die Anfangskurve $u = 0$ eben, also $\tau^* = 0$, dann ergeben sich die Gesimsflächen[27]), und wird $u = 0$ eine Gerade, also $\kappa^* = 0$, so erhalten wir den allgemeinen Zylinder mit den Mantellinien $u =$ const. und den dazu senkrechten Parallelkurven $v =$ const.

2. Soll $G(u,v) = 1$ sein, so müssen in (42) die höheren Glieder verschwinden; also ergibt sich zunächst aus (41b, c):

(b) $2\,\kappa^* \sin\vartheta = 0\,,$

(c) $$\left[\kappa^{*2} \sin^2\vartheta - \kappa\kappa^* \cos\vartheta + \left(\tau^* + \frac{d\vartheta}{dv}\right)^2\right]_{0,v} = 0 \quad .$$

---

27) *Scheffers*, p. 219.

Daraus resultieren als notwendige Bedingungen entweder:

a) $$\kappa^* = 0\,, \tau^* + \frac{d\vartheta}{dv} = 0$$

oder:

b) $$\vartheta = 0, \tau^* = \sqrt{\kappa\kappa^*}\,.$$

a) ergibt nach (52):

$$\tau(u,v) = 0\,.$$

Wir erhalten somit wieder den allgemeinen Zylinder mit $u = 0$ als Mantellinie, für den offenbar auch $G(u,v) = \text{const.}$ wird.

b) Dieser Fall ist, da $\kappa^*$ und $\tau^*$ nur von $v$ abhängen, für $\kappa_v = 0$ nur durch $\kappa = \text{const.}$ zu erfüllen, und diese Annahme ist bereits unter IB) behandelt worden.

Wir finden also:

**7. Satz:** *Haben auf einer Fläche die geodätischen Linien eines Feldes die gleiche nichtkonstante Krümmung als Funktion ihrer Bogenlänge von einer festen Orthogonaltrajektorie aus sowie gleiche konstante Torsion, so sind sie eben und kongruent und ebenso wie ihre Orthogonaltrajektorien Krümmungslinien der Fläche. Ist die Orthogonaltrajektorie eben, so ist die Fläche eine Gesimsfläche, ist sie eine Gerade, so ist die Fläche ein allgemeiner Zylinder.*

In diesem Satze ist die Voraussetzung nichtkonstanter Krümmung notwendig, um den Spezialfall der Schraubenlinien auf dem Kreiszylinder (cf. IB) auszuschließen.

Machen wir neben $\kappa_v(u,v) = 0$ nur die Voraussetzung, daß die Kurve $u = 0$ Krümmungslinie ist, so verschwindet also ihre geodätische Torsion $\bar{\tau}(v)$ und damit auch nach (44) und (52) $\tau(u,v)$. Dann sind wieder wie vorher alle Kurven $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ Krümmungslinien, und es gilt:

**8. Satz:** *Haben auf einer Fläche die geodätischen Linien eines Feldes eine Krümmungslinie als Orthogonaltrajektorie und außerdem die gleiche Krümmung als Funktion ihrer Bogenlänge von dieser Krümmungslinie aus, so sind sie eben und ebenso wie ihre Orthogonaltrajektorien Krümmungslinien der Fläche.*

## LITERATUR

*Bianchi, Luigi:* Vorlesungen über Differentialgeometrie, Leipzig, 1910.

*Bieberbach, Ludwig:* Theorie der Differentialgleichungen, Berlin, 1923.

*Blaschke, Wilhelm:* Vorlesungen über Differentialgeometrie I, Berlin, 1921.

*Cesàro, Ernesto:* Vorlesungen über natürliche Geometrie, Leipzig, 1901.

*Duschek-Mayer:* Lehrbuch der Differentialgeometrie I, Leipzig, 1930.

*Finsler, Paul:* Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen, Göttingen, 1918.

*Rellich, Franz:* Die Bestimmung einer Fläche durch ihre Gauß'sche Krümmung. Mathematische Zeitschrift 43, Berlin, 1938.

*Scheffers, Georg:* Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie II, Leipzig, 1913.

(Eingegangen den 13. März 1939.)