Invariantentheorie algebraischer Formen.

Invariantentheorie algebraischer Formen

Von CONRAD LESER, Zürich

Einleitung

Aufgabe der vorliegenden Arbeit ist es, die Invariantentheorie der algebraischen Formen neu abzuleiten. Während in den Lehrbüchern vielfach von formalen Prozessen Gebrauch gemacht wird, die mit dem Wesen des Problems nichts zu tun haben, soll hierbei der gruppentheoretische Kern etwas stärker zur Geltung kommen.

Die weiteste in Betracht kommende Verallgemeinerung des Begriffs der Invariante ist der der Komitante. Eine solche enthält Ausdrücke in den Koeffizienten einer Form, auf die eine gewisse irreduzible Substitution induziert wird, wenn man auf die Variabeln die allgemeine lineare Substitution ausübt. Im binären Fall sind diese irreduziblen Substitutionen dadurch definiert, daß sie auf die Koeffizienten der Formen in gewöhnlichem Sinn induziert werden.

Im Falle der n-ären Formen ist die Definition nicht so ohne weiteres möglich. Eine solche liefert aber die Methode der Young'schen Symmetrieoperatoren. Diese zerlegt die durch wiederholte Komposition der allgemeinen linearen Substitution entstehende Matrix in irreduzible Bestandteile, und diese stimmen mit den gesuchten Substitutionen überein. In § 1 der Arbeit wird daher diese Methode in der für die Anwendung brauchbaren Formulierung kurz wiedergegeben.

Komponiert man zwei solcher irreduziblen Substitutionen, so erhebt sich die für die Invariantentheorie fundamentale Frage nach den Kompositionsregeln, welche angeben, wie sich das Resultat wieder in irreduzible Teile zerlegen läßt. In § 2 wird diese Frage dadurch gelöst, daß alle Kompositionsregeln auf ein System von Grundregeln zurückgeführt werden, die ihrerseits einer einfachen Gesetzmäßigkeit genügen.

In § 3 werden die gewonnenen Ergebnisse invariantentheoretisch gedeutet. Es wird gezeigt, wie sich die simultanen multilinearen Komitanten mehrerer Formen angeben lassen und welche Schlüsse daraus auf die Komitanten von beliebigem Grad einer einzigen Form gezogen werden können.

Schließlich werden in § 4 mit Hilfe der Methode der Gewichte Anzahl und Ordnungen der Komitanten von gegebenem Grad berechnet. Als Anwendung der in § 2 abgeleiteten Kompositionsregeln wird ein Satz von Deruyts neu bewiesen, der diese Berechnung sehr vereinfacht.

Der Fall der binären Formen wird noch einer besonderen Betrachtung unterzogen.

Die Arbeit verdankt ihre Entstehung einer Anregung von Prof. A. Speiser und schließt sich an Kap. 16 seiner „Gruppentheorie" (3. Aufl.) an.

§ 1. Die Young'schen Symmetrieoperatoren.

Gegeben seien k Reihen von je n Variabeln

$$\begin{matrix} x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)} \end{matrix}$$

Jede dieser Reihen erfahre die lineare Substitution

$$\begin{matrix} x_1^{(i)} \to \alpha_{11} x_1^{(i)} + \cdots + \alpha_{1n} x_n^{(i)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n^{(i)} \to \alpha_{n1} x_1^{(i)} + \cdots + \alpha_{nn} x_n^{(i)} \end{matrix} .$$

Bildet man nun sämtliche Produkte der Gestalt

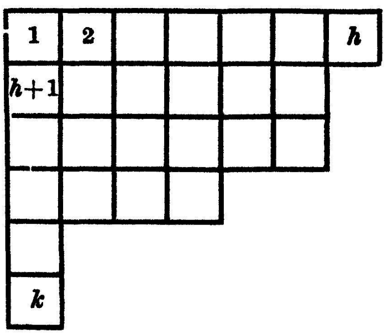
$$x_{t_1}^{(1)} \cdot \ldots \cdot x_{t_k}^{(k)}$$

die also in jeder Variabelnreihe linear sind, und betrachtet die auf diese Produkte induzierte Substitution, so kommt dies offenbar darauf hinaus, daß die Ausgangsmatrix

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} \ldots \alpha_{1n} \\ \cdots\cdots \\ \alpha_{n1} \ldots \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

k—1 -mal mit sich selbst komponiert wird.

Die so entstehende Matrix ist für $k > 1$ nicht mehr irreduzibel, läßt sich aber vollständig in irreduzible Bestandteile zerlegen. Diese Bestandteile entsprechen, wie Frobenius[1]) bemerkt hat, eindeutig den Darstellungen der vollen Permutationsgruppe vom Grade k, und sie lassen sich nach Young[2]) folgendermaßen berechnen:



Man zeichnet ein Schema von k Feldern, angeordnet in höchstens n Zeilen, deren Längen von oben nach unten monoton abnehmen. In die Felder schreibt man die Zahlen 1, 2, ..., k, wobei man oben beginnt und innerhalb der Zeilen von links nach rechts fortschreitet.

Zu jedem Schema, welches sich auf diese Art bilden läßt, wird ein Operator wie folgt definiert: Man symmetrisiert

[1]) Über die charakteristischen Einheiten der symmetrischen Gruppe, Sitz. Ber. Berlin 1903, S. 328 ff.

[2]) On quantitative substitutional analysis, Proc. London Math. Soc. 1901, S. 97 ff.

zunächst über die Zeilen, d. h. man bildet die Summe aller Permutationen, die nur die Zahlen innerhalb der Zeilen vertauschen. Auf diese Summe wendet man hierauf den Prozeß der Alternation in bezug auf die Spalten an, d. h. man summiert über alle Vertauschungen innerhalb der Spalten, wobei jedoch die ungeraden Permutationen negatives Vorzeichen erhalten.

Den so gewonnenen Operator wendet man auf jedes der Variabelnprodukte an, und zwar in dem Sinne, daß die unteren Indizes derjenigen Variabeln vertauscht werden, deren obere Indizes im Operator der Vertauschung unterliegen. Dann erhält man entweder 0 oder eine gewisse lineare Kombination der Variabelnprodukte. Von den nicht verschwindenden Gliedern werden noch diejenigen weggestrichen, welche von anderen Gliedern linear abhängig sind. Eine gewisse Willkür, die dabei möglich ist, spielt keine Rolle.

Die übrigbleibenden Terme bilden nun einen irreduziblen Bestandteil der Basis, d. h. sie substituieren sich nur unter sich. Die zugehörige Matrix bildet also einen der irreduziblen Bestandteile. Zu jedem Schema, das die angegebenen Bedingungen erfüllt, gehört eine derartige Matrix. Diese und nur diese treten als irreduzible Bestandteile auf, und zwar ein- oder mehrmals.

Das Schema enthalte nun je k_t t-zeilige Spalten ($t = 1, 2, \ldots, n$). Dann liefert die Alternation offenbar aus jedem Variabelnprodukt 0 oder ein Produkt von je k_t t-reihigen Determinanten; der gesamte Operator also 0 oder eine Summe derartiger Produkte. Diese Determinanten lassen sich als neue Variable auffassen. Andrerseits lassen sich die verschiedenen Reihen von Variabeln gleicher Art identifizieren, da es hier nur auf die Transformationseigenschaft, nicht auf die Gestalt der Basis ankommt. Dieser Gedanke rührt schon von Clebsch[3]) her.

Die zugehörige Matrix besitzt als Koeffizienten ebenfalls Summen von Produkten je k_t t-reihiger Determinanten der α_{ij}. Sie möge $\Gamma_{k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}}$ heißen. Da es nur eine einzige n-reihige Determinante gibt, kann sich diese höchstens als konstanter Faktor herausheben; die Zahl k_n liefert kein Unterscheidungsmerkmal und braucht daher im Index nicht angegeben zu werden.

Insbesondere sind $\Gamma_{1,0,\ldots,0}$; $\Gamma_{0,1,0,\ldots,0}$; $\ldots$; $\Gamma_{0,\ldots,0,1}$ die Substitutionen, die auf sämtliche 1-, 2-, $\ldots$, n—1-reihigen Determinanten der Variabeln ausgeübt werden. $\Gamma_{1,0,\ldots,0}$ ist nichts anderes als die Ausgangssubstitution. Ferner stellt $\Gamma_{0,0,\ldots,0}$ die identische Substitution, d. h. die Multiplikation mit einem konstanten Faktor dar.

---

[3]) Über eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie, Abh. Göttingen 1872, S. 1 ff.

Die Komposition von Matrizen werde durch ein $\cdot$Zeichen angedeutet, bei gleichartigen Matrizen auch durch Potenzierung; ferner die Zusammensetzung aus irreduziblen Bestandteilen durch das $+$Zeichen. Diese Operationen sind nicht mit der „Multiplikation“ und „Addition“ von Matrizen zu verwechseln; sie erfüllen sämtliche kommutativen, assoziativen und distributiven Gesetze.

Somit läßt sich das Ergebnis in die Formel fassen:

$$\Gamma_{1,0,\ldots,0}^{\;\;k} = \sum_{k_1,\ldots,k_{n-1}} c_{k_1,\ldots,k_{n-1};\,\Gamma_{1,0,\ldots,0}^{k}}\, \Gamma_{k_1,\ldots,k_{n-1}} .$$

Die Koeffizienten c zeigen an, wie oft jeder Bestandteil auftritt. Sie sind also ganze nicht negative Zahlen, und zwar positiv für alle Indizes $k_1, \cdots, k_{n-1}$, für welche

$$\sum_{t=1}^{n-1} t k_t \leqq k$$

$$\sum_{t=1}^{n-1} t k_t \equiv k \pmod{n} .$$

Sie lassen sich übrigens mit Hilfe der gleichen Methode auch zahlenmäßig berechnen, wovon aber kein Gebrauch gemacht werden soll. Dagegen sei das Resultat noch einmal kurz in Worten zusammengefaßt.

1. Satz: *Die irreduziblen Bestandteile der durch wiederholte Komposition einer Ausgangsmatrix entstehenden Matrix werden geliefert durch die Methode der Young'schen Symmetrieoperatoren. Hierbei entspricht jedem Young'schen Schema eineindeutig ein irreduzibler Bestandteil, der aber mehrmals auftreten kann. Die Anzahl der t-zeiligen Spalten im Schema zeigt die Dimension in den t-reihigen Determinanten der Variabeln bzw. der Matrixkoeffizienten an.*

§ 2. Kompositionsregeln.

Bildet man $\Gamma_{1,0,\ldots,0}^{\;\;k}$ sukzessive für die Werte $k = 1, 2 \ldots$, so erhält man eine n—1-dimensionale Schar von irreduziblen Bestandteilen. Komponiert man zwei derartige Matrizen und bildet wieder die Zerlegung, so bleibt man innerhalb der Schar. Denn sei

$$\sum_{t=1}^{n-1} t k_t = k, \; \sum_{t=1}^{n-1} t k'_t = k'$$

so ist

$$\Gamma_{k_1,\ldots,k_{n-1}} \subset \Gamma_{1,0,\ldots,0}^{\;\;k}$$

$$\Gamma_{k'_1,\ldots,k'_{n-1}} \subset \Gamma_{1,0,\ldots,0}^{\;\;k'}$$

also

$$\Gamma_{k_1,\ldots,k_{n-1}} \cdot \Gamma_{k'_1,\ldots,k'_{n-1}} \subset \Gamma_{1,0,\ldots,0}^{\;\;k+k'} .$$

Es soll jetzt die Aufgabe behandelt werden, die irreduziblen Bestandteile von $\Gamma_{k_1,\ldots,k_{n-1}} \cdot \Gamma'_{k_1,\ldots,k_{n-1}'}$ anzugeben.

1. Definition: *Die t-reihigen Determinanten der Ausgangsvariabeln heißen Variable t. Art; die Matrix der auf sie induzierten Substitution Grundmatrix t. Art.*

2. Definition: *Eine Formel, welche die irreduziblen Bestandteile der durch Komposition zweier irreduziblen Matrizen entstandenen Matrix angibt, heißt eine Kompositionsregel. Ist eine der beiden Matrizen eine Grundmatrix, so heißt sie (Kompositions-) Grundregel.*

2. Satz: *Komponiert man eine beliebige irreduzible Matrix mit der Grundmatrix s. Art, so erhält man alle irreduziblen Bestandteile, indem man zu dem zur beliebigen Matrix gehörigen Young'schen Schema auf alle möglichen Arten durch Hinzufügen von s Feldern in verschiedenen Zeilen neue Young'sche Schemata von höchstens n Zeilen bildet und dazu wieder die entsprechenden Matrizen. Jeder Bestandteil tritt genau einmal auf.*

Beweis: Sei $\Gamma_{k_1,\ldots,k_{n-1}}$ ein irreduzibler Bestandteil von $\Gamma_{1,0,\ldots,0}^{\;\;k}$; dann ist $\Gamma_{k_1,\ldots,k_{n-1}} \cdot \Gamma_{0,\ldots,0,1_{(s)},0,\ldots,0}$ ein reduzibler Bestandteil von $\Gamma_{1,0,\ldots,0}^{\;\;k+s}$. Wendet man auf diesen einen Young'schen Operator an, so ergibt sich 0, wenn der Operator keinem darin enthaltenen irreduziblen Bestandteil entspricht; andernfalls der betr. Bestandteil. Andrerseits liefert der Operator dann und nur dann 0, wenn im Schema zwei Ziffern, die im zu $\Gamma_{k_1,\ldots,k_{n-1}}$ oder zu $\Gamma_{0,\ldots,0,1,0,\ldots,0}$ gehörenden Schema in einer Spalte stehen, in die gleiche Zeile zu stehen kommen oder umgekehrt. Dafür, daß dies nicht der Fall ist, ist aber notwendig und hinreichend, daß sich das Schema auf die im Satz angegebene Art herstellen läßt. Folglich liefert ein solches Schema und nur ein solches einen irreduziblen Bestandteil.

Es bleibt noch zu zeigen, daß jeder Bestandteil nur einmal auftreten kann. Dies folgt indes sofort daraus, daß man die eine Variabelnreihe in der zu der Grundmatrix gehörenden Basis nur mit je einer Variabelnreihe 1., 2., ..., n—1. Art zu symmetrisieren bzw. zu alternieren braucht, um sämtliche Bildungen zu erhalten. Damit ist der Satz bewiesen.

Im allgemeinen gibt es $\binom{n}{s}$ verschiedene Möglichkeiten, die s Felder hinzuzufügen, und daher $\binom{n}{s}$ Bestandteile. Die Anzahl reduziert sich jedoch, wenn im Ausgangsschema mehrere Zeilen die gleiche Länge besitzen; denn dann sind diejenigen Schemata zu streichen, in welchen eine Zeile länger würde als die über ihr stehende.

Der Satz soll nunmehr in eine Formel gefaßt werden. Das Ausgangsschema möge je k_t, ein erweitertes Schema je l_t t-zeilige Spalten besitzen ($t = 1, \ldots, n$). Dann enthält die r. Zeile von oben $\sum_{t=r}^{n} k_t$ bzw. $\sum_{t=r}^{n} l_t$ Felder, und es ergibt sich das Gleichungssystem

$$\sum_{t=r}^{n} l_t = \sum_{t=r}^{n} k_t + \delta_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

wobei von den Zahlen δ_r s den Wert 1 und n—s den Wert 0 besitzen. Durch Subtraktion je zweier aufeinanderfolgender Gleichungen findet man:

$$l_r = k_r + \delta_r - \delta_{r+1} \quad (r = 1, \ldots, n-1)$$

Daraus folgt:

$$\Gamma_{k_1, \ldots, k_{n-1}} \cdot \Gamma_{0, \ldots, 0, 1_{(s)}, 0, \ldots, 0} = \sum_{\delta_1, \ldots, \delta_n} \Gamma_{k_1+\delta_1-\delta_2, \ldots, k_{n-1}+\delta_{n-1}-\delta_n}$$

$$\delta_{i_1} = \cdots = \delta_{i_s} = 1\,, \quad \delta_{i_{s+1}} = \cdots = \delta_{i_n} = 0\,.$$

Hierbei ist zu summieren über alle Verteilungen der Werte 1 und 0, für welche

$$k_r + \delta_r - \delta_{r+1} \geqq 0 \qquad (r = 1, \ldots, n-1)$$

Das heißt falls

$$k_r = 0$$

so sind nur diejenigen Verteilungen zu berücksichtigen, in welchen

$$\delta_r \geqq \delta_{r+1}$$

Im Falle $n = 2$ gibt es nur eine einzige Kompositionsgrundregel, und diese lautet

$$\Gamma_k \cdot \Gamma_1 = \Gamma_{k+1} + \Gamma_{k-1}\,,$$

wobei das zweite Glied nur dann wegfällt, wenn $k = 0$.

Für $n = 3$ lauten die beiden Grundregeln:

$$\Gamma_{k_1, k_2} \cdot \Gamma_{1,0} = \Gamma_{k_1+1, k_2} + \Gamma_{k_1-1, k_2+1} + \Gamma_{k_1, k_2-1}$$
$$\Gamma_{k_1, k_2} \cdot \Gamma_{0,1} = \Gamma_{k_1, k_2+1} + \Gamma_{k_1+1, k_2-1} + \Gamma_{k_1-1, k_2}\,.$$

3. Satz *(Übertragungsprinzip): Streicht man in einer Grundregel für den Fall $n > 2$ jeweils den letzten Index sowie die Verteilungen, in denen $\delta_n = 1$, so ergibt sich eine Grund- oder triviale Regel für n-1 Variable.*

Beweis: Durch die Streichung erhält man, jenachdem

$$s < n-1: \quad \Gamma_{k_1, \ldots, k_{n-2}} \cdot \Gamma_{0, \ldots, 0, 1_{(s)}, 0, \ldots, 0_{(n-2)}} = \sum_{\delta_1, \ldots, \delta_{n-1}} \Gamma_{k_1+\delta_1-\delta_2, \ldots, k_{n-2}+\delta_{n-2}-\delta_{n-1}}$$

$$\delta_{i_1} = \cdots = \delta_{i_s} = 1\,, \quad \delta_{i_{s+1}} = \cdots = \delta_{i_{n-1}} = 0$$

$$s = n-1: \quad \Gamma_{k_1, \ldots, k_{n-2}} \cdot \Gamma_{0, \ldots, 0} = \Gamma_{k_1, \ldots, k_{n-2}}\,.$$

4. Satz *(Dualitätsprinzip): Zu jeder Regel erhält man eine duale, indem man alle Indizes in umgekehrter Reihenfolge schreibt. Diese kann bei geradem n und muß bei $n = 2$ mit der ursprünglichen zusammenfallen.*

Beweis:

$$\Gamma_{k_1,\ldots,k_{n-1}} \cdot \Gamma_{0,\ldots,0,1_{(s)},0,\ldots,0} = \sum_{\delta_1,\ldots,\delta_n} \Gamma_{k_1+\delta_1-\delta_2,\ldots,k_{n-1}+\delta_{n-1}-\delta_n}$$

$$\delta_{i_1} = \cdots = \delta_{i_n} = 1 \;, \quad \delta_{i_{s+1}} = \cdots = \delta_{i_n} = 0 \;.$$

Vertauscht man auf der linken Seite die Reihenfolge der Indizes, so kann man schreiben

$$\Gamma_{k_{n-1},\ldots,k_1} \cdot \Gamma_{0,\ldots,0,1_{(n-s)},0,\ldots,0} = \sum_{\delta'_n,\ldots,\delta'_1} \Gamma_{k_{n-1}+\delta'_n-\delta'_{n-1},\ldots,k_1+\delta'_2-\delta'_1}$$

$$\delta'_{i_1} = \cdots = \delta'_{i_s} = 0 \;, \quad \delta'_{i_{s+1}} = \cdots = \delta'_{i_n} = 1 \;.$$

Läßt man jeder Verteilung der δ_r die Verteilung entsprechen

$$\delta'_r = 1 - \delta_r \qquad (r = 1,\ldots, n)$$

so folgt

$$k_r + \delta'_{r+1} - \delta'_r = k_r + (1 - \delta_{r+1}) - (1 - \delta_r)$$

$$= k_r + \delta_r - \delta_{r+1}$$

$$\Gamma_{k_{n-1},\ldots,k_1} \cdot \Gamma_{0,\ldots,0,1_{(n-s)},0,\ldots,0} = \sum_{\delta_n,\ldots,\delta_1} \Gamma_{k_{n-1}+\delta_{n-1}-\delta_n,\ldots,k_1+\delta_1-\delta_2}$$

$$\delta_{i_1} = \cdots = \delta_{i_s} = 1 \;, \quad \delta_{i_{s+1}} = \cdots = \delta_{i_n} = 0 \;.$$

Damit ist das Dualitätsprinzip bewiesen.

5. Satz: *Aus den Grundregeln und der trivialen Regel $\Gamma_{k_1,\ldots,k_{n-1}} \cdot \Gamma_{0,\ldots,0} = \Gamma_{k_1,\ldots,k_{n-1}}$ läßt sich jede beliebige Kompositionsregel ableiten.*

Beweis: Man teilt jeder Matrix eine Ordnungszahl zu in folgender Weise: $\Gamma_{k_1,\ldots,k_{n-1}}$ besitze eine höhere Ordnungszahl als $\Gamma_{k'_1,\ldots,k'_{n-1}}$ wenn entweder

$$\sum_{t=1}^{n-1} t k_t > \sum_{t=1}^{n-1} t k'_t$$

oder

$$\sum_{t=1}^{n-1} t k_t = \sum_{t=1}^{n-1} t k'_t$$

$$k_{n-1} = k'_{n-1} \;, \;\ldots\;, \; k_{r+1} = k'_{r+1}$$

$$k_r < k'_r \qquad (r = n-1,\; n-2, \ldots, 2) \;.$$

Die niedrigste Ordnungszahl hat $\Gamma_{0,\ldots,0}$; es folgt $\Gamma_{1,0,\ldots,0}$. Die weitere Reihenfolge ist je nach der Größe von n verschieden.

Von den Gliedern auf der rechten Seite der Gleichung

$$\Gamma_{k_1,\ldots,k_{n-1}} \cdot \Gamma_{0,\ldots,0,1_{(s)},0,\ldots,0} = \sum_{\delta_1,\ldots,\delta_n} \Gamma_{k_1+\delta_1-\delta_2,\ldots,k_{n-1}+\delta_{n-1}-\delta_n}$$

heiße dasjenige das Hauptglied, welches die höchste Ordnungszahl hat. Nun besitzt

$$\sum_{t=1}^{n-1} t(k_t + \delta_t - \delta_{t+1}) = \sum_{t=1}^{n-1} t\,k_t + \sum_{t=1}^{n-1} \delta_t - (n-1)\,\delta_n$$

$$= \sum_{t=1}^{n-1} t\,k_t + s - n\,\delta_n$$

den größten Wert, wenn $\delta_n = 0$

in diesem Fall $k_{n-1} + \delta_{n-1} - \delta_n = k_{n-1} + \delta_{n-1}$

den kleinsten Wert, wenn $\delta_{n-1} = 0$ usw.

Das Hauptglied ist also dadurch charakterisiert, daß

$$\delta_1 = \cdots = \delta_s = 1, \ \delta_{s+1} = \cdots = \delta_n = 0$$

und lautet

$$\Gamma_{k_1,\ldots,k_{s-1},k_s+1,k_{s+1},\ldots,k_{n-1}}.$$

Es besitzt offenbar auch eine höhere Ordnungszahl als $\Gamma_{k_1,\ldots,k_{n-1}}$. Da seine Indizes nicht negativ werden können, fällt es niemals weg.

Jede Matrix außer $\Gamma_{0,\ldots,0}$ ist aber Hauptglied in mindestens einer Grundregel. Sei etwa $k'_s > 0$, so folgt daraus

$$\Gamma_{k_1,\ldots,k_{n-1}} \cdot \Gamma'_{k'_1,\ldots,k'_{n-1}} = \Gamma_{k_1,\ldots,k_{n-1}} \cdot \{\Gamma'_{k'_1,\ldots,k'_{s-1},k'_s-1,k'_{s+1},\ldots,k'_{n-1}} \cdot \Gamma_{0,\ldots,0,1_{(s)},0,\ldots,0}$$
$$- \sum_{\delta_1,\ldots,\delta_n}{}' \Gamma'_{k'_1+\delta_1-\delta_2,\ldots,k'_s-1+\delta_s-\delta_{s+1},\ldots,k'_{n-1}+\delta_{n-1}-\delta_n}\}$$

wobei der Strich am Summenzeichen anzeigt, daß sich die Summation nicht über das Hauptglied erstreckt.

Sämtliche Ausdrücke in der Klammer haben niedrigere Ordnungszahlen als $\Gamma_{k'_1,\ldots,k'_{n-1}}$. Wendet man auf sie den gleichen Prozeß an und setzt dieses Verfahren fort, so ist die Komposition nach einer endlichen Anzahl von Schritten auf wiederholte Komposition von $\Gamma_{k_1,\ldots,k_{n-1}}$ mit Grundmatrizen und der identischen Matrix zurückgeführt. Dies ist im allgemeinen auf verschiedene Arten möglich.

Damit ist diese Aufgabe gelöst. Wie leicht ersichtlich, lassen sich das für die Grundregeln angegebene Übertragungs- und Dualitätsprinzip auch sinngemäß auf beliebige Kompositionsregeln anwenden.

Für $n = 2$ liefert das Verfahren die Rekursionsformel

$$\Gamma_k \cdot \Gamma_{k'} = \Gamma_k \quad \{\Gamma_{k'-1} \cdot \Gamma_1 \quad - \Gamma_{k'-2}\}$$

mit deren Hilfe sich durch vollständige Induktion die allgemeine Kompositionsregel beweisen läßt. Diese lautet:

$$k \geqq k' : \quad \Gamma_k \cdot \Gamma_{k'} = \Gamma_{k+k'} + \Gamma_{k+k'-2} + \cdots + \Gamma_{k-k'+2} + \Gamma_{k-k'}$$

Speziell:

$$\Gamma_k^2 = \Gamma_{2k} \quad + \Gamma_{2k-2} \quad + \cdots + \Gamma_2 \qquad + \Gamma_0 \; .$$

Für $n > 2$ ist noch ein Spezialfall von besonderer Bedeutung:

6. Satz: *Enthalten die zu den zu komponierenden Matrizen gehörigen Schemata nur $r < n - 1$ Zeilen bzw. 1 Zeile, so können im Ergebnis nur solche Bestandteile auftreten, deren Schemata höchstens $r + 1$ Zeilen besitzen.*

Der Beweis verläuft genau gleich wie der des ersten Teils der Grundregel. Würde nämlich ein Schema mehr als $r+1$ Zeilen besitzen, so kämen Ziffern, die ursprünglich in der gleichen Zeile standen, in die gleiche Spalte, und das zugehörige Glied müßte verschwinden.

Die Bedingung, daß das Schema nur r Zeilen enthält, ist gleichwertig damit, daß nur die ersten r Indizes von 0 verschieden sein können. Somit lautet der Satz, in die Formelsprache übersetzt:

$$\Gamma_{k_1,\ldots,k_r,0,\ldots,0} \cdot \Gamma_{k',0,\ldots,0} = \sum_{l_1,\ldots,l_{r+1}} c_{l_1,\ldots,l_{r+1},0,\ldots,0} \, \Gamma_{l_1,\ldots,l_{r+1},0,\ldots,0}$$

$$\sum_{t=1}^{r+1} t\, l_t = \sum_{t=1}^{r} t\, k_t + k' \; .$$

§ 3. Anwendung auf die Invariantentheorie.

Es soll nun mit Hilfe dieser Sätze eine neue Herleitung der Invariantentheorie n-ärer Formen auf gruppentheoretischer Grundlage gegeben werden. Für binäre Formen hat Speiser[4]) diese Aufgabe bereits durchgeführt.

In der zu $\Gamma_{k_1,\ldots,k_{n-1}}$ gehörigen Basis seien alle Reihen von Variabeln 1., ..., n—1. Art jeweils identifiziert. Versieht man jedes Glied mit einem symbolischen Koeffizienten und bildet formal die Summe, so erhält man eine n-äre Form im verallgemeinerten Sinne. Die Zahlen

[4]) Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 3. Aufl. 1937, S. 230 ff.

$k_1, \ldots, k_{n-1}$, d. h. die Dimensionen in den Variabeln 1., ..., n—1. Art heißen ihre Ordnungen.

Im allgemeinen enthält eine solche Form nicht alle möglichen Variabelnprodukte von gegebenen Ordnungen, sondern nur eine gewisse Anzahl linearer Aggregate von ihnen. Wohl aber kommen in der zu $\Gamma_{0,\ldots,0,1_{(s)},0,\ldots,0}$ gehörenden „Grundform s. Art" alle Variabeln s. Art linear vor. Ebenso enthält die zu $\Gamma_{k,0,\ldots,0}$ gehörige Form alle Produkte k. Ordnung der Variabeln 1. Art; eine derartige „Form im speziellen Sinne" entspricht dem üblichen Begriff der Form.

Wird auf die ursprünglichen Variabeln $x_1, \ldots, x_n$ die Substitution $\Gamma_{1,0,\ldots,0}$ ausgeübt, so erfahren die Variabelnaggregate der Form von den Ordnungen $k_1, \ldots, k_{n-1}$ die Substitution $\Gamma_{k_1,\ldots,k_{n-1}}$. Übt man gleichzeitig auf die Koeffizienten der Form die dazu adjungierte Substitution $\overset{\times}{\Gamma}_{k_1,\ldots,k_{n-1}}$ aus, so bleibt die Form ungeändert, d. h. sie multipliziert sich bloß mit einem konstanten Faktor. Oder umgekehrt: Übt man auf die Formkoeffizienten $\Gamma_{k_1,\ldots,k_{n-1}}$ und auf die ursprünglichen Variabeln $\overset{\times}{\Gamma}_{1,0,\ldots,0}$ aus, so bleibt die Form ungeändert.

Komponiert man nun $\Gamma_{k_1,\ldots,k_{n-1}}$ mit $\Gamma_{k'_1,\ldots,k'_{n-1}}$ und erhält im Ergebnis den Bestandteil $\Gamma_{l,\ldots,l_{n-1}}$, so besagt das folgendes: Übt man auf die Koeffizienten der Formen von den Ordnungen $k_1, \ldots, k_{n-1}$ bzw. $k'_1, \ldots, k'_{n-1}$ die Substitutionen $\Gamma_{k_1,\ldots,k_{n-1}}$ bzw. $\Gamma_{k'_1,\ldots,k'_{n-1}}$ aus, so gibt es eine Reihe in den Koeffizienten beider Formen linearer Funktionen, welche dabei die Transformation $\Gamma_{l_1,\ldots,l_{n-1}}$ erfahren. Kombiniert man diese Glieder mit den Variabelnaggregaten der Form von den Ordnungen $l_1 \ldots, l_{n-1}$, so erhält man eine Funktion, die sich nicht ändert, wenn man gleichzeitig auf die ursprünglichen Variabeln $\overset{\times}{\Gamma}_{1,0,\ldots,0}$ ausübt. $\Gamma_{l_1,\ldots,l_{n-1}}$ zeigt also die Existenz einer simultanen bilinearen Komitante der beiden Formen an.

Die Zahlen $l_1, \ldots, l_{n-1}$ heißen die Ordnungen der Komitante. Insbesondere liefert

$\Gamma_{l,0,\ldots,0}$ eine Kovariante

$\Gamma_{0,\ldots,0,l}$ eine Kontravariante

$\Gamma_{0,\ldots,0}$ eine Invariante

d. h. eine Komitante, die außer den Koeffizienten nur Variable 1. bzw. n—1. Art bzw. gar keine Variabeln enthält.

Tritt $\Gamma_{l_1,\ldots,l_{n-1}}$ c-mal auf, so gibt es c linear unabhängige Komitanten dieser Art. Entsprechendes gilt natürlich auch, wenn das Verfahren auf mehr als zwei Formen ausgedehnt wird.

7. Satz: *Die Kompositionsregeln liefern unmittelbar die simultanen bilinearen Komitanten zweier und mittelbar die simultanen multilinearen Komitanten mehrerer Formen.*

Den folgenden Betrachtungen sollen der Einfachheit halber nur Formen im üblichen, speziellen Sinn zugrundegelegt werden. Diese werden durch eine Ordnung allein charakterisiert. Besonders wichtig ist der Fall, daß alle Formen von gleicher Ordnung sind.

Da

$$\Gamma_{k,0,\ldots,0} \subset \Gamma_{1,0,\overset{k}{\ldots},0}$$

so ist auch

$$\Gamma_{k,0,\overset{m}{\ldots},0} \subset \Gamma_{1,0,\overset{km}{\ldots},0}$$

und folglich

$$\Gamma_{k,0,\overset{m}{\ldots},0} = \sum_{l_1,\ldots,l_{n-1}} c_{l_1,\ldots,l_{n-1};\,\Gamma_{k,0,\overset{m}{\ldots},0}}\, \Gamma_{l_1,\ldots,l_{n-1}}$$

$$\sum_{t=1}^{n-1} t l_t \leqq km \;, \quad \sum_{t=1}^{n-1} t l_t \equiv km \;(\mathrm{mod.}\; n) \;.$$

Wie erwähnt, lassen sich die Zahlenkoeffizienten mit Hilfe der Kompositionsregeln ohne weiteres berechnen. Speziell ist nach dem 6. Satz

$$\Gamma_{k,0,\overset{2}{\ldots},0} = \sum_{l_1,l_2} c_{l_1,l_2,0,\ldots,0;\,\Gamma_{k,\overset{2}{0},\ldots,0}}\, \Gamma_{l_1,l_2,0,\ldots,0}$$

$$m < n: \quad \Gamma_{k,0,\overset{m}{\ldots},0} = \sum_{l_1,\ldots,l_{m+1}} c_{l_1,\ldots,l_{m+1},0,\ldots,0;\,\Gamma_{k,0,\overset{m}{\ldots},0}}\, \Gamma_{l_1,\ldots,l_{m+1},0,\ldots,0}$$

$$\sum_{t=1}^{m+1} t l_t = km \;.$$

Daraus folgt z. B., als Bedingung dafür, daß $\Gamma_{0,\ldots,0}$ als Bestandteil auftreten kann: $\quad m \geqq n \;.$

Ferner: $\quad km \equiv 0 \;(\mathrm{mod.}\; n)$

Von den simultanen multilinearen Komitanten von m Formen k. Ordnung gelangt man zu den Komitanten m. Grades in den Koeffizienten einer einzigen Form k. Ordnung, indem man die entsprechenden Koeffizienten der m Formen identifiziert. Dabei können keine neuen Komitanten hinzukommen; dagegen verschwinden einige identisch und können gestrichen werden. Die so entstehende Substitution werde mit $(\Gamma_{k,0,\overset{m}{\ldots},0})$ bezeichnet. Es gilt also:

$$(\Gamma_{k,0,\overset{m}{\ldots},0}) = \sum_{l_1,\ldots,l_{n-1}} c_{l_1,\ldots,l_{n-1};\,(\Gamma_{k,0,\overset{m}{\ldots},0})}\, \Gamma_{l_1,\ldots,l_{n-1}}$$

$$c_{l_1,\ldots,l_{n-1};\,(\Gamma_{k,0,\overset{m}{\ldots},0})} \leqq c_{l_1,\ldots,l_{n-1};\,\Gamma_{k,0,\overset{m}{\ldots},0}} \;.$$

8. Satz: *Die Komitanten m. Grades einer Form sind unter den simultanen multilinearen Komitanten von m Formen enthalten.*

9. Satz: *Die n-äre Form k. Ordnung kann nur dann Invarianten m. Grades besitzen, wenn*

$$m \geqq n, \; km \equiv 0 \pmod{n} .$$

Im Falle $n = 2$ sind alle Komitanten zugleich Kovarianten und Kontravarianten, darunter als Spezialfall die Invarianten. Es gilt die Formel:

$$(\Gamma_k^m) = c_{km;(\Gamma_k^m)} \Gamma_{km} + c_{km-2;(\Gamma_k^m)} \Gamma_{km-2} + \cdots + \left\{ \begin{matrix} c_{0;(\Gamma_k^m)} \Gamma_0 \\ c_{1;(\Gamma_k^m)} \Gamma_1 \end{matrix} \quad km \equiv \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \pmod{2} \right\} .$$

10. Satz: *Binäre Formen von gerader Ordnung besitzen nur Kovarianten gerader Ordnung. Bei Formen ungerader Ordnung sind Grad und Ordnung der Kovarianten zugleich gerade oder ungerade; insbesondere nur Invarianten von geradem Grad möglich.*

Die Zahlenkoeffizienten $c_{l_1,\ldots,l_{n-1};(\Gamma_{k,0,\ldots,0}^m)}$ lassen sich mit den bisher eingeführten Methoden nicht berechnen; vielmehr muß man dazu die Methode der Gewichte anwenden, die im nächsten Paragraphen kurz entwickelt werden soll. Sind sie aber einmal bekannt, so macht auch die Berechnung der simultanen Komitanten beliebigen Grades von mehreren Formen keine Schwierigkeit; denn

$$(\Gamma_{k_1,0,\ldots,0}^{m_1}) \cdot (\Gamma_{k_2,0,\ldots,0}^{m_2}) \cdot \;\ldots\; \cdot (\Gamma_{k_r,0,\ldots,0}^{m_r})$$

ergibt sämtliche simultane Komitanten der Formen von den Ordnungen $k_1, k_2, \ldots, k_r$, deren Grad in den Koeffizienten der t. Form m_t beträgt.

§ 4. Die Komitanten von gegebenem Grad.

Die Aufgabe lautet jetzt, zu einer Form von gegebener Ordnung Anzahl und Ordnungen der linear unabhängigen Komitanten von gegebenem Grad zu berechnen. Für binäre Formen wurde sie zuerst gelöst von Cayley[5]) und allgemein von Deruyts[6]).

Bei der speziellen Substitution

$$x_1 \to \varrho_1 x_1, \; x_2 \to \varrho_2 x_2, \; \ldots, \; x_n \to \varrho_n x_n$$

[5]) Second memoir upon quantics, Phil. Transact. London 1856, S. 101 ff.

[6]) Essai d'une théorie générale des formes algébriques, 1891, S. 131 ff.

bzw. der durch sie induzierten multipliziert sich jeder Koeffizient der Form k. Ordnung mit einem Faktor

$$\varrho_1^{\gamma_1} \varrho_2^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot \varrho_n^{\gamma_n} \qquad (\sum_{t=1}^{n} \gamma_t = k)$$

Die Zahlen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, die ganz und nicht negativ sind, heißen die Gewichte des Koeffizienten. Zu vorgegebenen Gewichten gehört genau ein Koeffizient.

Bildet man nun alle verschiedenen Koeffizientenprodukte m. Grades, so besitzt analog jeder Term die n Gewichte

$$g_1, g_2, \ldots, g_n \qquad (\sum_{t=1}^{n} g_t = km)$$

Die Anzahl der Terme von den Gewichten $g_1, g_2, \ldots, g_n$ ist gleich der Anzahl der verschiedenen Zerlegungen des Zahlenkomplexes $g_1, g_2, \ldots, g_n$ in m Komplexe von n ganzen nicht negativen Zahlen, deren Summe k beträgt. Oder: sie ist gleich der Anzahl der Zerlegungen des Komplexes $g_2, \ldots, g_n$ in m Komplexe von n—1 ganzen nicht negativen Zahlen, deren Summe k nicht übersteigt. Diese Anzahl werde mit $Z_{g_2, \ldots, g_n(m,k)}$ bezeichnet. Derartige Anzahlen heißen Partitionszahlen.

Andrerseits besitzt die zu $\Gamma_{l_1, \ldots, l_{n-1}}$ gehörige Komitante eine bestimmte Anzahl von Termen mit den Gewichten $g_1, g_2, \ldots, g_n$. Diese Anzahl heiße eine Gewichtszahl und werde mit $z_{g_1, g_2, \ldots, g_n; l_1, \ldots, l_{n-1}}$ bezeichnet. Sie ist unabhängig davon, in welcher Zerlegung die Komitante auftritt. Für eine Invariante, Kovariante oder Kontravariante kann sie nicht größer als 1 werden.

Insgesamt müssen die Komitanten m. Grades soviel Glieder von gegebenen Gewichten besitzen, als es Koeffizientenprodukte m. Grades von diesen Gewichten gibt. Daraus folgt das Gleichungssystem:

$$\sum_{l_1, \ldots, l_{n-1}} z_{g_1, g_2, \ldots, g_n; l_1, \ldots, l_{n-1}} \, c_{l_1, \ldots, l_{n-1}; (\Gamma_{k,0,\ldots,0}^{m})} = Z_{g_2, \ldots, g_n(m,k)} \, .$$

Hierbei genügt es, die Gleichungen zu berücksichtigen, in denen

$$g_1 \geqq g_2 \geqq \cdots \geqq g_n \, ,$$

da die übrigen nichts neues mehr bringen. Dann besitzt das System soviel Gleichungen, als es verschiedene Verteilungen der Gewichte oder verschiedene Zerlegungen der Zahl km in n ganze nicht negative Summanden gibt. Dies ist aber die Anzahl der möglichen Young'schen Schemata und somit der in Betracht kommenden Komitanten. Folglich liegen ebensoviel Gleichungen wie Unbekannte vor.

Ferner ist, wie man sich leicht überlegt:

$$z_{\;1,g_2,\dots,g_n;\,l_1,\dots,l_{n-1}} = 1\,, \text{ wenn } l_1 = g_1 - g_2\,, \dots, \; l_{n-1} = g_{n-1} - g_n$$

$$z_{g_1,g_2,\dots,g_n;\,l_1,\dots,l_{n-1}} = 0\,, \text{ wenn } \Gamma_{l_1,\dots,l_{n-1}} \text{ von niedrigerer Ordnungszahl als } \Gamma_{g_1-g_2,\dots,g_{n-1}-g_n}\;.$$

Demnach hat das Gleichungssystem bei zweckmäßiger Anordnung Diagonalform und die Determinante 1. Also ist es eindeutig und durch ganze Zahlen auflösbar, und die linear unabhängigen Komitanten m. Grades der Form k. Ordnung lassen sich bestimmen.

Bei der praktischen Berechnung wirken die Gewichtszahlen störend. Es gelingt jedoch, sie durch einen Kunstgriff auszuschalten, indem man in geeigneter Weise mehrere Gleichungen zusammenfaßt. Zu diesem Zweck definiert man:

$$\Delta\, z_{g_1,g_2,\dots,g_n;\,l_1,\dots,l_{n-1}} = \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n} \pm\, z_{g_1+\varepsilon_1,\,g_2-1+\varepsilon_2,\dots,\,g_n-(n-1)+\varepsilon_n;\,l_1,\dots,l_{n-1}}$$

wobei über alle Verteilungen der Werte $0, 1, \dots, n-1$ auf die Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ summiert wird und das Vorzeichen jenachdem positiv oder negativ ist, ob die Permutation

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_n \\ 0 & 1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$

gerade oder ungerade ist. Die Bildung ist analog der Determinante

$$\begin{vmatrix} g_1 & g_1+1 & \dots & g_1+(n-1) \\ g_2-1 & g_2 & \dots & g_2+(n-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_n-(n-1) & g_n-(n-2) & \dots & g_n \end{vmatrix}$$

Ebenso wie eine Determinante mit zwei gleichen Zeilen verschwindet, so wird auch

$$\Delta\, z_{g_1,g_2,\dots,g_n;\,l_1,\dots,l_{n-1}} = 0\,, \text{ wenn } g_r = g_{r+1} - 1\;.$$

Es soll nun ein Hilfssatz bewiesen werden.

Voraussetzung:

a) $g_1 \geqq g_2 \geqq \dots \geqq g_n \geqq 0$

b) $l_t \geqq 0 \; (t = 1, \dots, n-1)$

c) $\sum_{t=1}^{n-1} t\, l_t \leqq \sum_{t=1}^{n} g_t$

d) $\sum_{t=1}^{n-1} t\, l_t \equiv \sum_{t=1}^{n} g_t \pmod{n}$.

Behauptung:

$$\varDelta z_{g_1, g_2, \dots, g_n; l_1, \dots, l_{n-1}} = \begin{Bmatrix} 1 & l_1 = g_1 - g_2, \dots, l_{n-1} = g_{n-1} - g_n \\ 0 & \text{sonst} \end{Bmatrix}.$$

Beweis: Zunächst ist zu zeigen, daß der Satz für $l_1 = \cdots = l_{n-1} = 0$ gültig ist. Für $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 1, \dots, \varepsilon_n = n - 1$

wird
$$z_{g_1+\varepsilon_1, g_2-1+\varepsilon_2, \dots, g_n-(n-1)+\varepsilon_n; 0, \dots, 0} = z_{g_1, g_2, \dots, g_n; 0, \dots, 0}$$
$$= \begin{Bmatrix} 1 & g_1 = g_2 = \cdots = g_n \\ 0 & \text{sonst} \end{Bmatrix}.$$

Für andere Werte der ε_t gibt es ein r, derart, daß

$$\varepsilon_r > \varepsilon_{r+1}$$

da andrerseits
$$g_r \geqq g_{r+1}$$

so ist
$$g_r - (r-1) + \varepsilon_r > g_{r+1} - r + \varepsilon_{r+1}$$

$$z_{g_1+\varepsilon_1, \dots, g_r-(r-1)+\varepsilon_r, g_{r+1}-r+\varepsilon_{r+1}, \dots, g_n-(n-1)+\varepsilon_n; 0, \dots, 0} = 0$$

Also

$$\varDelta z_{g_1, g_2, \dots, g_n; 0, \dots, 0} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 = g_1 - g_2, \dots, 0 = g_{n-1} - g_n \\ 0 & \text{sonst} \end{Bmatrix}.$$

Die Behauptung sei nun bewiesen für $l'_1, \dots, l'_{n-1}$, wenn $\varGamma_{l'_1, \dots, l'_{n-1}}$ eine niedrigere Ordnungszahl besitzt als $\varGamma_{l_1, \dots, l_{n-1}}$; zu beweisen für $l_1, \dots, l_{n-1}$, wobei $l_s > 0$.

$$\varGamma_{l_1, \dots, l_{n-1}} = \varGamma_{l_1, \dots, l_{s-1}, l_s-1, l_{s+1}, \dots, l_{n-1}} \cdot \varGamma_{0, \dots, 0, 1_{(s)}, 0, \dots, 0}$$
$$- \sum_{\delta_1, \dots, \delta_n}' \varGamma_{l_1+\delta_1-\delta_2, \dots, l_s-1+\delta_s-\delta_{s+1}, \dots, l_{n-1}+\delta_{n+1}-\delta_n}.$$

Aus dieser Grundregel folgt leicht:

$$z_{g_1, g_2, \dots, g_n; l_1, \dots, l_{n-1}} = z_{g_1-1, \dots, g_s-1, g_{s+1}, \dots, g_n; l_1, \dots, l_{s-1}, l_s-1, l_{s+1}, \dots, l_{n-1}}$$
$$+ \sum_{\delta_1, \dots, \delta_n}' z_{g_1-\delta_1, \dots, g_n-\delta_n; l_1, \dots, l_s-1, \dots, l_{n-1}}$$
$$- \sum_{\delta_1, \dots, \delta_n}' z_{g_1, \dots, g_n; l_1+\delta_1-\delta_2, \dots, l_s-1+\delta_s-\delta_{s+1}, \dots, l_{n-1}+\delta_{n-1}-\delta_n}$$

$$\varDelta z_{g_1, g_2, \dots, g_n; l_1, \dots, l_{n-1}} = \varDelta z_{g_1-1, \dots, g_s-1, g_{s+1}, \dots, g_n; l_1, \dots, l_{s-1}, l_s-1, l_{s+1}, \dots, l_{n-1}}$$
$$+ \sum_{\delta_1, \dots, \delta_n}' \varDelta z_{g_1-\delta_1, \dots, g_n-\delta_n; l_1, \dots, l_s-1, \dots, l_{n-1}}$$
$$- \sum_{\delta_1, \dots, \delta_n}' \varDelta z_{g_1, \dots, g_n; l_1+\delta_1-\delta_2, \dots, l_s-1+\delta_s-\delta_{s+1}, \dots, l_{n-1}+\delta_{n-1}-\delta_n}$$

Für die Differenzen auf der rechten Seite ist nach Annahme der Satz bewiesen, wenn sie der Voraussetzung genügen. Dies ist sicher der Fall in bezug auf die Bedingungen c) und d). Ein Glied, das b) nicht erfüllt, verschwindet offenbar; das gleiche gilt, wenn a) nicht befriedigt:

$$g_r - \delta_r < g_{r+1} - \delta_{r+1}$$

denn da $\quad g_r \geqq g_{r+1}$

so ist $g_r - \delta_r = (g_{r+1} - \delta_{r+1}) - 1$.

Somit:

$$\Delta z_{g_1, g_2, \ldots, g_n; l_1, \ldots l_{n-1}} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \begin{array}{c} l_t = (g_t - 1) - (g_{t+1} - 1) \ (t < s)\ ; l_s - 1 = (g_s - 1) - g_{s+1}\ ; \\ l_t = g_t - g_{t+1}\ (t > s)\ ; g_s - 1 \geqq g_{s+1} \end{array} \\ 0 & \qquad\qquad \text{sonst} \end{array} \right\}$$

$$+ \sum_{\delta_1, \ldots, \delta_n}{}' \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \begin{array}{c} l_s - 1 = (g_s - \delta_s) - (g_{s+1} - \delta_{s+1})\ ; l_t = (g_t - \delta_t) - (g_{t+1} - \delta_{t+1})\ (t \neq s) \\ g_r - \delta_r \geqq g_{r+1} - \delta_{r+1}\ ; g_n - \delta_n \geqq 0 \end{array} \\ 0 & \qquad\qquad \text{sonst} \end{array} \right\}$$

$$- \sum_{\delta_1, \ldots, \delta_n}{}' \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \begin{array}{c} l_s - 1 + \delta_s - \delta_{s+1} = g_s - g_{s+1}\ ; l_t + \delta_t - \delta_{t+1} = g_t - g_{t+1}\ (t \neq s) \\ l_s - 1 + \delta_s - \delta_{s+1} \geqq 0\ ;\ l_t + \delta_t - \delta_{t+1} \geqq 0\ (t \neq s) \end{array} \\ 0 & \qquad\qquad \text{sonst} \end{array} \right\} .$$

Sämtliche Ungleichungs-Bedingungen sind aber schon in den Gleichungs-Bedingungen enthalten. So folgt aus

$$\sum_{t=1}^{n-1} t\, l_t - s = \sum_{t=1}^{n} g_t - n g_n - \sum_{t=1}^{n} \delta_t + n \delta_n$$

$$g_n - \delta_n = \frac{\sum\limits_{t=1}^{n} g_t - \sum\limits_{t=1}^{n-1} t\, l_t}{n} \geqq 0 .$$

Folglich heben sich die beiden Summen weg, und es ergibt sich:

$$\Delta z_{g_1, g_2, \ldots, g_n; l_1, \ldots, l_{n-1}} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & l_t = g_t - g_{t+1}\ (t = 1, \ldots, n-1) \\ 0 & \qquad \text{sonst} \end{array} \right\} .$$

Damit ist der Hilfssatz durch vollständige Induktion bewiesen. Wendet man ihn an auf das System der Gewichtsgleichungen und bildet in analoger Weise

$$\Delta Z_{g_2,\ldots,g_n(m,k)} = \sum_{\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n} \pm Z_{g_2-1+\varepsilon_2,\ldots,g_n-(n-1)+\varepsilon_n(m,k)}$$

so folgt:

$$c_{g_1-g_2,\ldots,g_{n-1}-g_n;(\Gamma_k,0,\overset{m}{\ldots},0)} = \Delta Z_{g_2,\ldots,g_n(m,k)}$$

oder:

$$c_{l_1,\ldots,l_{n-1};(\Gamma_k,0,\overset{m}{\ldots},0)} = \Delta Z_{g_2,\ldots,g_n(m,k)}$$

$$g_r = \frac{km - \sum_{t=1}^{n-1} t\,l_t}{n} + \sum_{t=r}^{n-1} l_t \,.$$

Das ist die Formel von Deruyts. Sie besagt:

11. Satz: *Anzahl und Ordnungen der linear unabhängigen Komitanten von gegebenem Grad zu einer Form von gegebener Ordnung lassen sich rein mit Hilfe der Partitionszahlen berechnen.*

Im Falle $n = 3$ lautet die Formel:

$$c_{l_1,l_2;(\overset{m}{\Gamma_k},0)} = Z_{g_2,g_3(m,k)} + Z_{g_2+1,g_3-2(m,k)} + Z_{g_2-1,g_3-1(m,k)}$$
$$- Z_{g_2+1,g_3-1(m,k)} - Z_{g_2-1,g_3(m,k)} - Z_{g_2,g_3-2(m,k)}$$
$$g_2 = \frac{k_m - l_1 + l_2}{3}\,, \quad g_3 = \frac{k_m - l_1 - 2l_2}{3}\,.$$

Für $n = 2$ erhält man die Formel von Cayley:

$$c_{l;(\overset{m}{\Gamma_k})} = Z_{g(m,k)} - Z_{g-1(m,k)}\,, \quad g = \frac{km - l}{2}\,.$$

Die Partitionszahl $Z_{g(m,k)}$ stellt hier einfach die Anzahl der Zerlegungen der Zahl g in m Summanden dar, welche ganzzahlig, nicht negativ und nicht größer als k sind. Sie besitzt einige besondere Eigenschaften, die für die Theorie der binären Formen Bedeutung haben.

So ist $$Z_{g(m,k)} = Z_{g(k,m)}$$

Beweis: Sei $$g = s_1 + \cdots + s_m \; (0 \leqq s_i \leqq k)$$

eine der Zerlegungen 1. Art. Dann schreibt man

$$\begin{array}{rl} & \overbrace{}^{k} \\ s_1 = & 1 + \cdots\cdots + 1 + 0 + \cdots + 0 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_m = & 1 + \cdots + 1 + 0 + \cdots\cdots + 0 \\ \hline g = & s_1' + \cdots\cdots\cdots\cdots + s_k' \; (0 \leqq s_i' \leqq m) \end{array}$$

und erhält durch Summation von oben nach unten eine Zerlegung 2. Art. Die Zuordnung zwischen den beiden Zerlegungen ist eineindeutig.

Daraus folgt: $c_{l;(\Gamma_k^m)} = c_{l;(\Gamma_m^k)}$.

12. Satz *(Hermite'sches Reziprozitätsgesetz): Jeder Kovariante m. Grades der binären Form k. Ordnung entspricht eine Kovariante gleicher Ordnung und k. Grades der Form m. Ordnung.*

Weiterhin lassen sich die Zerlegungen danach einteilen, ob die größtmöglichste Zahl k als Summand tatsächlich vorkommt oder nicht:

$$Z_{g\,(m,k)} = Z_{g\,(m,k-1)} + Z_{g-k\,(m-1,k)}$$

Ebenso

$$Z_{g-1\,(m,k)} = Z_{g-1\,(m,k-1)} + Z_{g-k-1\,(m-1,k)} \, .$$

Nun sei

$$g = \frac{km - l}{2}$$

sodaß

$$Z_{g\,(m,k)} - Z_{g-1\,(m,k)} = c_{l;(\Gamma_k^m)}$$

Ferner

$$Z_{g\,(m,k-1)} - Z_{g-1\,(m,k-1)} = \begin{cases} c_{(k-1)m-2g;(\Gamma_{k-1}^m)} & g < \frac{(k-1)m+1}{2} \\ 0 & g = \frac{(k-1)m+1}{2} \\ -c_{(k-1)m-2((k-1)m-g+1);(\Gamma_{k-1}^m)} & g > \frac{(k-1)m+1}{2} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} c_{l-m;(\Gamma_{k-1}^m)} & l > m-1 \\ 0 & l = m-1 \\ -c_{m-l-2;(\Gamma_{k-1}^m)} & l < m-1 \end{cases} \, .$$

Schließlich

$$Z_{g-k(m-1,k)} - Z_{g-k-1(m-1,k)} = \begin{cases} 0 & g < k \\ c_{k(m-1)-2(g-k);(\Gamma_k^{m-1})} & g \geqq k \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & l > k(m-2) \\ c_{l+k;(\Gamma_k^{m-1})} & l \leqq k(m-2) \end{cases} \, .$$

Also

$$c_{l;(\Gamma_k^m)} = \begin{cases} c_{l-m;(\Gamma_{k-1}^m)} & l > m-1 \\ 0 & l = m-1 \\ -c_{m-l-2;(\Gamma_{k-1}^m)} & l < m-1 \end{cases} + \begin{cases} 0 & l > k(m-2) \\ c_{l+k;(\Gamma_k^{m-1})} & l \leqq k(m-2) \end{cases} \, .$$

Ebenso ist eine Einteilung der Zerlegungen möglich danach, ob 0 als Summand auftritt oder nicht:

$$Z_{g(m,k)} = Z_{g(m-1,k)} + Z_{g-m(m,k-1)}$$

Das gleiche Verfahren liefert die Formel

$$c_{l;(\Gamma_k^m)} = \left\{\begin{array}{cc} c_{l-k;(\Gamma_k^{m-1})} & > \\ 0 & l = k-1 \\ -c_{k-l-2;(\Gamma_k^{m-1})} & < \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{ccc} 0 & > & \\ & l & (k-2)m \\ c_{l+m;(\Gamma_{k-1}^m)} & \leqq & \end{array}\right\}.$$

Speziell folgt daraus, daß alle Kovarianten m. Grades, deren Ordnung $>(k-2)m$ ist, Produkte von Kovarianten $m-1$. Grades mit der Form sind.

Berechnet man aus der 1. Formel $c_{l+m;(\Gamma_{k-1}^m)}$ und setzt diesen Wert in die 2. Formel ein, so ergibt sich als Resultat:

$$c_{l;(\Gamma_k^m)} = \left\{\begin{array}{ccc} 0 & > & \\ & l & (k-2)m \\ c_{l+2m;(\Gamma_k^m)} & \leqq & \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{cc} c_{l-k;(\Gamma_k^{m-1})} & > \\ 0 & l = k-1 \\ -c_{k-l-2;(\Gamma_k^{m-1})} & < \end{array}\right\}$$
$$- \left\{\begin{array}{ccc} 0 & > & \\ & l & (k-2)\,(m-2)-4 \\ c_{l+2m+k;(\Gamma_k^{m-1})} & \leqq & \end{array}\right\}.$$

Diese Rekursionsformel erlaubt es, ohne Zuhilfenahme der Partitionszahlen die Kovarianten m. Grades der binären Form k. Ordnung anzugeben, wenn die Kovarianten $m-1$. Grades der Form bekannt sind. Es gibt aber nur eine Kovariante 1. Grades, nämlich die Form selbst.

13. Satz: *Für jede binäre Form lassen sich Anzahl und Ordnung der linear unabhängigen Kovarianten vom Grade* 1, 2, 3,... *ohne weiteres sukzessive anschreiben.*

Damit sei diese Arbeit abgeschlossen. Eine weitere Aufgabe bestünde darin, die Methode der Kompositionsregeln auf die Fragen anzuwenden, die mit der Endlichkeit des Komitantensystems in Zusammenhang stehen. Hier genüge es, einige schöne Sätze der Invariantentheorie auf sehr einfache Art neu abgeleitet zu haben.

(Eingegangen den 25. Januar 1939.)

LITERATUR

A. Cayley: Memoirs upon quantics, Phil. Trans. London 1854—78.

A. Clebsch: Theorie der binären algebraischen Formen, Leipzig 1872.

do.*:* Über eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie, Abh. Göttingen, Bd. 17, 1872.

J. Deruyts: Essai d'une théorie générale des formes algébriques, Bruxelles 1891.

E. B. Elliott: An introduction to the algebra of quantics, 2. Aufl., Oxford 1913.

F. Faà di Bruno: Einleitung in die Theorie der binären Formen, Leipzig 1881.

G. Frobenius: Über die charakteristischen Einheiten der symmetrischen Gruppe, Sitzungs-Ber. Berlin 1903.

P. Gordan: Vorlesungen über Invariantentheorie, Bd. 2, Leipzig 1887.

D. Hilbert: Gesammelte Abhandlungen, Bd. 2, Berlin 1933.

W. Fr. Meyer: Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie, Jahresbericht der deutsch. Math. Ver., Bd. 1, Berlin 1892.

G. Salmon: Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen, 2. Aufl., Leipzig 1877.

A. Speiser: Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 3. Aufl., Berlin 1937.

R. Weitzenböck: Invariantentheorie, Groningen 1923.

H. Weyl: Gruppentheorie und Quantenmechanik, 2. Aufl., Leipzig 1931.

A. Young: On quantitative substitutional analysis, Proc. London Math. Soc. 1901—02, 1928—34.