Über Mittelwerte im Figurengitter.

Autor(en): **Hadwiger, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **11 (1938-1939)**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-11887

Über Mittelwerte im Figurengitter

Von H. Hadwiger, Bern

§ 1. Figur im Figurengitter.

Unter einer *Figur* verstehen wir:

a) ein ebenes *einfach zusammenhängendes* Gebiet, das durch eine *streckbare* Kurve berandet ist;

b) eine ebene einfache *offene, streckbare* Kurve;

c) einen Punkt.

Jeder Figur kommt so eine bestimmte Fläche sowie ein Umfang zu, falls wir für Fläche und Umfang einer Kurve bzw. eines Punktes Null und doppelte Länge bzw. Null und Null ansetzen.

In der euklidischen Ebene seien zwei Grundfiguren $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ gegeben mit den Flächen F_1 und F_2 und den Umfängen U_1 und U_2. Mit $\mathfrak{G}_1$ bilden wir ein *Figurengitter* $\{\mathfrak{G}_1\}$, indem wir in der Ebene alle Figuren auflegen, die aus $\mathfrak{G}_1^0$ in fester Anfangslage durch die Decktranslationen T des quadratischen Einheitsgitters (Gittertranslationen) hervorgehen (vgl. Fig. 1).

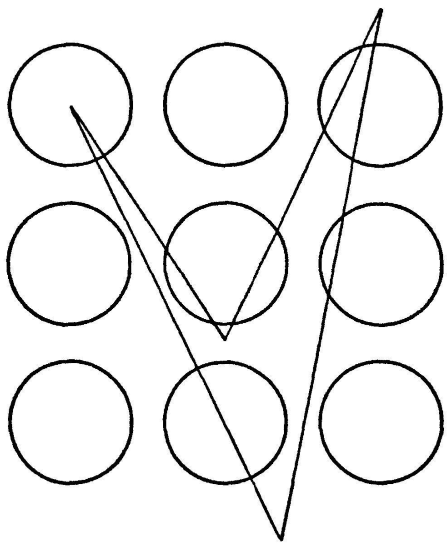

Fig. 1.
Viereck im Kreisgitter. Die Stückzahl des Durchschnittes ist 6.

$\mathfrak{G}_2$ sei jetzt von einer Anfangslage $\mathfrak{G}_2^0$ aus starr beweglich. Ist G eine solche Bewegung, so bezeichne $\mathfrak{G}_2^G$ die Figur $\mathfrak{G}_2$ in ihrer Endlage. Ferner sei $\dot{G}$ die *kinematische Dichte*[1]) von $\mathfrak{G}_2$, so daß die integral-geometrische

[1]) Vgl. *W. Blaschke,* Vorlesungen über Integralgeometrie. I. Heft, zweite erweiterte Auflage. Leipzig und Berlin 1936, S. 20.

„*Anzahl*" von Figuren $\mathfrak{G}_2^G$ die eine Bewegungsmenge $\mathfrak{M}$ liefert, durch das Lebesquesche Integral

$$\int \alpha(G)\dot{G} \quad , \quad \alpha(G) = \begin{cases} 1 & G \subset \mathfrak{M} \\ 0 & G \not\subset \mathfrak{M} \end{cases}$$

gemessen wird, wobei natürlich $\alpha(G)$ integrabel vorausgesetzt wird.

Es sei nun $M(G)$ eine Funktion von $\mathfrak{G}_2^G$ im Gitter $\{\mathfrak{G}_1\}$, die als Funktion der Bewegung G angeschrieben werden kann. Es soll

$$M(G) = M(TG) \tag{1}$$

sein, wenn T eine Gittertranslation bezeichnet. Es sei $\mathfrak{S}$ ein vollständiges Restsystem der Bewegungsgruppe $\mathfrak{B}$ nach der Untergruppe $\mathfrak{T}$ der Gittertranslationen. Als *Mittelwert* der Funktion $M(G)$ im Figurengitter kann der Quotient

$$\overline{M} = \frac{\int \beta(G) M(G) \dot{G}}{\int \beta(G)\dot{G}} \quad , \quad \beta(G) = \begin{cases} 1 & G \subset \mathfrak{S} \\ 0 & G \not\subset \mathfrak{S} \end{cases}$$

definiert werden, falls die Integrale existieren. Da

$$\int \beta(G)\dot{G} = 2\pi$$

ist[2]), erhält man für den Mittelwert

$$\overline{M} = \frac{1}{2\pi}\int \beta(G)\, M(G)\dot{G} \ . \tag{2}$$

§ 2. Die allgemeine Mittelwertsformel.

Wir betrachten nun die Figur $\mathfrak{G}_2^G$ im Figurengitter $\{\mathfrak{G}_1\}$. Der Durchschnitt $\mathfrak{G}_2^G \cdot \mathfrak{G}_1$ der Figur $\mathfrak{G}_2^G$ mit einer aus $\{\mathfrak{G}_1\}$ herausgegriffenen Figur $\mathfrak{G}_1$ ist entweder leer oder besteht aus einer gewissen Zahl einfach zusammenhängender Gebiete oder offenen Kurvenstücken oder Punkten, zerfällt also in eine Zahl von Figuren. Addieren wir diese Figurenzahlen für alle $\mathfrak{G}_1$ aus $\{\mathfrak{G}_1\}$, so erhalten wir die „*Stückzahl*" N des Durchschnittes $\mathfrak{G}_2^G\{\mathfrak{G}_1\}$ der Figur $\mathfrak{G}_2^G$ mit dem Figurengitter $\{\mathfrak{G}_1\}$.

N ist eine ganzwertige Funktion der Bewegung G, und hat für alle Bewegungen TG, wo T eine Gittertranslation ist, denselben Wert. Die

---

[2]) Werden die beiden Komponenten der Translation einer Bewegung G mit t_1 und t_2 und der Drehwinkel mit φ bezeichnet, so kann für $\mathfrak{S}$ die Menge der G mit

$$0 \leq t_1 < 1 \ , \quad 0 \leq t_2 < 1 \ , \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

gewählt werden. Es ist dann $\dot{G} = dt_1\, dt_2\, d\varphi$ und

$$\int \dot{G} = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2\pi} dt_1\, dt_2 \cdot d\varphi = 2\pi \ .$$

Bedingung (1) ist somit erfüllt. Die „*mittlere Stückzahl*“ $\overline{N}$ kann definitionsgemäß nach (2) ermittelt werden, falls feststeht, daß N meßbar ist. In dieser Note soll nun die folgende allgemeine Mittelwertsformel hergeleitet und angewendet werden:

(I) *Die mittlere Stückzahl des Durchschnittes der Figur* $\mathfrak{G}_2$ *im Figurengitter* $\{\mathfrak{G}_1\}$ *ist*

$$\overline{N} = F_1 + F_2 + \frac{U_1 U_2}{2\pi} .$$

§ 3. Zurückführung auf die kinematische Hauptformel von Blaschke.

Man wird ohne weiteres vermuten, daß unsere Mittelwertsformel (I) mit *Blaschkes Hauptformel der Integralgeometrie* eng zusammenhängen wird. In der Tat kann die Zurückführung leicht vollzogen werden, so daß die Mittelwertsformel auch als Umdeutung der Hauptformel interpretiert werden kann. Wir führen nun den Nachweis:

Die Gittertranslationen der Gruppe $\mathfrak{T}$ zählen wir, mit der Einheit beginnend, in irgend eine Reihenfolge aus:

$$T_0, T_1, T_2, T_3, \ldots ;$$

Die Figuren des Gitters $\{\mathfrak{G}_1\}$ bezeichnen wir entsprechend mit

$$\mathfrak{G}_1^{T_0}, \mathfrak{G}_1^{T_1}, \mathfrak{G}_1^{T_2}, \ldots ,$$

wobei die Translation T_k $\mathfrak{G}_1^0$ in $\mathfrak{G}_1^{T_k}$ überführen soll. Es bezeichne jetzt

$$n(G, T_k)$$

die Stückzahl des Durchschnittes

$$\mathfrak{G}_2^G \, \mathfrak{G}_1^{T_k} .$$

Wenn dieser Durchschnitt leer ist, so sei

$$n(G, T_k) = 0 \quad \text{gesetzt.}$$

Nach Definition ist die gesamte Stückzahl

$$N(G) = \sum_{k=0}^{\infty} n(G, T_k) ,$$

wobei die angeschriebene Reihe nur formal unendlich ist, da der Durchschnitt $\mathfrak{G}_2^G \, \mathfrak{G}_1^{T_k}$ nur für endlich viele k nicht leer ist. Wie *W. Maak*[3])

---

[3]) *W. Maak* (Integralgeometrie 27), Über stetige Kurven. Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Hansischen Universität, 12. Bd., 163—178 (1938).

gezeigt hat ist $n(G, T_k)$ unter den sehr allgemeinen Voraussetzungen, die wir für Figuren formulierten, stets meßbar. Also ist es auch $N(G)$. Wir bilden nun das Integral

$$\overline{N} = \frac{1}{2\pi}\int \beta(G)\, N(G)\, \dot{G} \quad , \quad \beta(G) = \begin{cases} 1 & G \subset \mathfrak{S} \\ 0 & G \not\subset \mathfrak{S} \end{cases}$$

oder

$$\overline{N} = \frac{1}{2\pi}\int \beta(G) \sum_{k=0}^{\infty} n(G, T_k)\, \dot{G} \ .$$

Da für eine beliebige Gittertranslation T_e

$$n(G, T_k) = n(T_e G, T_e T_k)$$

ist, kann auch geschrieben werden

$$\overline{N} = \frac{1}{2\pi}\int \beta(G) \sum_{k=0}^{\infty} n(T_k^{-1} G\ , T_0)\, \dot{G}\ ,$$

wo T_k^{-1} die inverse Translation von T_k bezeichnet.

Wir führen nun die Transformation

$$G' = T_k^{-1} G$$

durch. Wegen der Bewegungsinvarianz der kinematischen Dichte ist

$$\dot{G}' = \dot{G}\ ,$$

so daß geschrieben werden kann

$$\overline{N} = \frac{1}{2\pi}\int \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \beta(T_k G')\Big)\, n(G'\ , T_0)\, \dot{G}' \ .$$

Nun gibt es zu einer beliebigen Bewegung G' nach Definition von $\mathfrak{S}$ eine und nur eine Translation T_k, so daß $T_k G'$ zu $\mathfrak{S}$ gehört. Daraus folgt, daß

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta(T_k G') = 1$$

sein muß. Wir gewinnen so für den Mittelwert

$$\overline{N} = \frac{1}{2\pi}\int n(G', T_0)\, \dot{G}' \ .$$

Mit Rücksicht auf die vorausgegangenen Definitionen deutet man das Integral als Anzahl der Teilstücke des Durchschnittes $\mathfrak{G}_2^{G'} \cdot \mathfrak{G}_1^{0}$. Nach der Hauptformel von *Blaschke*[4]) ist diese Anzahl durch

[4]) Das in Fußnote [1]) zitierte Buch, § 16.

$$2\pi(F_1 + F_2) + U_1 U_2$$

gegeben. Besonders zu beachten ist, daß die Formel für Gebiete so wie für offene Kurvenstücke oder Punkte gilt, falls die Abmachungen betreffend Umfang und Flächeninhalt der Figuren berücksichtigt werden. Nach dieser Auffassung enthält die kinematische Hauptformel die Formel von *Poincaré*[5]) als Spezialfall. Wir erhalten also

$$\overline{N} = F_1 + F_2 + \frac{U_1 U_2}{2\pi}$$

womit die Mittelwertsformel (I) gewonnen ist.

§ 4. Funktionalgleichungen.

Es ist bemerkenswert, daß die mittlere Stückzahl $\overline{N}$ von der Gestalt der Grundfiguren weitgehend unabhängig ist, indem die Mittelwertsformel nur die Flächeninhalte und Umfänge der Grundfiguren enthält. Es soll nun gezeigt werden, wie sich die Mittelwertsformel herleiten läßt, falls vorausgesetzt wird, daß N eine Funktion der Flächeninhalte und Umfänge ist. Für die gesuchte Funktion können gewisse Funktionalgleichungen aufgestellt werden, als deren einzige Lösung sich (I) ergeben wird. Es sei also

$$\overline{N} = \Phi\{F_1, U_1, F_2, U_2\}\,.$$

Wir weisen vorerst zwei Eigenschaften von Φ nach.

α) *Die Funktion $\Phi\{F_1, U_1, F_2, U_2\}$ ist beschränkt,* das heißt, sie besitzt in jedem endlichen abgeschlossenen Teilbereich des Variablen-Raumes eine obere Schranke.

β) *Es ist* $\Phi\{1, 4, 0, 0\} = 1$.

Nachweis der Eigenschaft α:

Wir betrachten die Gesamtheit $\mathfrak{H}$ von Figuren, durch welche Flächeninhalte und Umfänge realisiert werden, die zum vorgegebenen endlichen Teilbereich gehören. Da die Umfänge gleichmäßig beschränkt sind, kann eine positive Zahl R angegeben werden, so daß jede Figur aus $\mathfrak{H}$ mit einem Kreis $\mathfrak{K}$ vom Radius R bedeckt werden kann. Sind nun $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ zwei Figuren der Gesamtheit $\mathfrak{H}$, so kann die Anzahl der verschiedenen nicht leeren Durchschnitte $\mathfrak{G}_2 \cdot \mathfrak{G}_1$ der Figur $\mathfrak{G}_2$ im Gitter $\{\mathfrak{G}_1\}$ nicht größer sein, als die entsprechende Anzahl S des Kreises $\mathfrak{K}_2$ im Kreisgitter $\{\mathfrak{K}_1\}$, wenn $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ durch $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ bedeckt werden. Der Kreis $\mathfrak{K}_2$ hat mit einem Gitterkreis $\mathfrak{K}_1$ dann und nur dann einen nicht leeren

---

[5]) *H. Poincaré*, Calcul des Probabilités, 2me édition, Paris 1912.

Durchschnitt, falls der mit $\mathfrak{K}_2$ konzentrische Kreis $\mathfrak{K}_2^*$ mit dem Radius $2R$ den Mittelpunkt von $\mathfrak{K}_1$ enthält. Die fragliche Zahl S der verschiedenen Durchschnitte deckt sich somit mit der Zahl von Mittelpunkten der Kreise $\mathfrak{K}_1$ des Gitters $\{\mathfrak{K}_1\}$, die von $\mathfrak{K}_2^*$ bedeckt werden. Da diese Mittelpunkte ein quadratisches Einheitsgitter bilden, führt eine geläufige Überlegung zur rohen Abschätzung

$$S < \pi(2R + \sqrt{2})^2 .$$

Nun können vorgegebene Flächeninhalte und Umfänge, falls überhaupt realisierbar, immer durch konvexe Figuren realisiert werden. Der Durchschnitt konvexer Figuren ist immer zusammenhängend. Sind also die Figuren $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ der Gesamtheit konvex, so liefert ein nicht leerer Durchschnitt $\mathfrak{G}_2 \cdot \mathfrak{G}_1$ der Figur $\mathfrak{G}_2$ im Gitter $\{\mathfrak{G}_1\}$ zur Stückzahl $\overline{N}$ den Beitrag 1. Die Stückzahl N sowie die mittlere Stückzahl $\overline{N}$ kann somit die Schranke $\pi(2R + \sqrt{2})^2$ nicht übertreffen, so daß die Beschränktheit von Φ nachgewiesen ist.

Nachweis von β:

Die vier eingesetzten Argumente können realisiert werden durch

$$\mathfrak{G}_1 = \text{Quadrat der Seitenlänge } 1,$$
$$\mathfrak{G}_2 = \text{Punkt}.$$

Die Stückzahl des Durchschnittes $\mathfrak{G}_2\{\mathfrak{G}_1\}$ ist *fast immer*[6]) 1. Der Mittelwert ist also wie behauptet 1.

Die ziemlich tief liegende Eigenschaft α des Mittelwertes konnte aus der Voraussetzung ohne große Mühe erschlossen werden. Durch die Voraussetzung wird nämlich gerade die typische Schwierigkeit, welche zur Beantwortung der entsprechenden Frage zu überwinden wäre, von vornherein beseitigt. Daß die Aussage α keineswegs selbstverständlich ist, sieht man sogleich ein, wenn man sich überlegt, daß die möglichen Stückzahlen des Durchschnittes zweier Figuren von gegebenen Flächeninhalten und Umfängen, die mindestens eine Nicht-Kreis-Realisierung zulassen, unbeschränkt sind, wenn die Gestalt unbestimmt gelassen wird (vgl. Fig. 2).

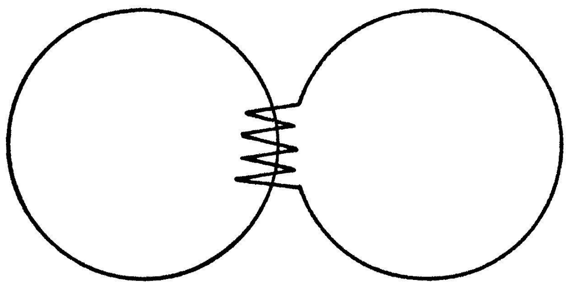

Fig. 2.

[6]) Fast immer bedeutet immer mit Ausnahme von Lagen, deren integralgeometrische Anzahl verschwindet.

Die gleichmäßige Beschränktheit des Mittelwertes bei Figuren mit gleichmäßig beschränkten Flächeninhalten und Umfängen hängt natürlicherweise damit zusammen, daß die Anzahl Figuren, deren Durchschnitt mit einer anderen Figur eine große Stückzahl aufweist, klein ist, so daß der Mittelwert keine entsprechende Vergrößerung erfährt. Der direkte Nachweis dieses hier nur ungefähr ausgesprochenen Sachverhaltes ist eine ziemlich subtile und verwickelte Angelegenheit. Er wurde für Kurven durchgeführt von *W. Maak*[7]), um die Formel von *Poincaré* unter den allgemeinsten Voraussetzungen herzuleiten.

Nun gehen wir daran, gewisse Funktionalgleichungen für die gesuchte Funktion $\Phi\{F_1, U_1, F_2, U_2\}$ aufzustellen. Zunächst kann die Symmetriebeziehung

$$\Phi\{F_1, U_1, F_2, U_2\} = \Phi\{F_2, U_2, F_1, U_1\} \tag{A}$$

leicht eingesehen werden. Eine einfache Überlegung zeigt, daß die verschiedenen Durchschnitte der Figur $\mathfrak{G}_2$ mit den Figuren des Gitters $\{\mathfrak{G}_1\}$ auch erhalten werden können als Durchschnitte der Figur $\mathfrak{G}_1$ mit den Figuren von $\{\mathfrak{G}_2\}$. $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ können in ihrer Rolle vertauscht werden, was auf die Symmetrie (A) hinausläuft.

Es gilt weiter

$$\Phi\{4F_1, 2U_1, 4F_2, 2U_2\} = 4\,\Phi\{F_1, U_1, F_2, U_2\}\,. \tag{B}$$

Diese Funktionalgleichung begründet man auf folgende Weise: Der Mittelwert mit doppelt so großen ähnlichen Figuren ist durch die linke Seite von (B) gegeben. Werden jetzt Gitter und Figuren gleichzeitig ähnlich auf die Hälfte verkleinert, so kann der Mittelwert sich nicht ändern, da die Stückzahlen bei Ähnlichkeitsabbildungen gleich bleiben. Auf diese Weise entsteht ein engeres Figurengitter, das sich aus 4 normalen Figurengittern zusammensetzen läßt. Jede Stückzahl im engeren Figurengitter setzt sich aus 4 Beiträgen zusammen, deren Mittelwerte einzeln Φ betragen. Der Mittelwert der Summe ist somit $4\,\Phi$, und das ist die rechte Seite von (B).

Es folgt nun eine Art Additionstheorem:

$$\begin{aligned}\Phi\{F_1', U_1', F_2, U_2\} + \Phi\{F_1'', U_1'', F_2, U_2\} &= \\ = \Phi\{F_1' + F_1'', U_1' + U_1'', F_2, U_2\} &+ \Phi\{0, 0, F_2, U_2\}\,. \end{aligned} \tag{C}$$

Zum Nachweis dieser Beziehung denken wir uns eine Figur $\mathfrak{G}_1$, die die Summe $\mathfrak{G}_1' + \mathfrak{G}_1''$ zweier Figuren $\mathfrak{G}_1'$ und $\mathfrak{G}_1''$ ist, die nur einen Punkt $\mathfrak{G}_1' \cdot \mathfrak{G}_1''$ gemeinsam haben. In diesem Falle ist Fläche und Umfang von

[7]) Vgl. die in Fußnote [3]) zitierte Arbeit.

$\mathfrak{G}_1$ gleich der Summe der Flächen und Umfänge der Teilfiguren $\mathfrak{G}_1'$ und $\mathfrak{G}_1''$. Nun ist leicht einzusehen, daß die Summe der Stückzahlen der Durchschnitte $\mathfrak{G}_2 \cdot \mathfrak{G}_1'$ und $\mathfrak{G}_2 \cdot \mathfrak{G}_1''$ gleich der Summe der Stückzahlen der Durchschnitte $\mathfrak{G}_2(\mathfrak{G}_1' + \mathfrak{G}_1'')$ und $\mathfrak{G}_2 \cdot (\mathfrak{G}_1' \cdot \mathfrak{G}_1'')$ ist. Diese Relation überträgt sich auf die Stückzahlen im Gitter und dann auf den Mittelwert. So ergibt sich (C).

Zu einer weiteren Funktionalgleichung gelangen wir auf folgende Weise: Denken wir uns die Werte für Flächeninhalte und Umfänge durch Eibereiche (Konvexe Bereiche mit stetig gekrümmter Randkurve) $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ realisiert, so gibt es zu hinreichend kleinem ξ einen äußeren Parallelbereich $\mathfrak{G}_1(\xi)$ zu $\mathfrak{G}_1$ im Abstand ξ, sowie einen inneren Parallelbereich $\mathfrak{G}_2(-\xi)$ zu $\mathfrak{G}_2$ im gleichen Abstand. Wenn die Flächen und Umfänge von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ wie üblich bezeichnet sind, so sind nach den bekannten Formeln von *J. Steiner*[8]) die Flächen und Umfänge der Parallelbereiche $\mathfrak{G}_1(\xi)$ und $\mathfrak{G}_2(-\xi)$ gegeben durch

$$F_1 + U_1\xi + \pi\xi^2,\ F_2 - U_2\xi + \pi\xi^2, \quad \text{und} \quad U_1 + 2\pi\xi,\quad U_2 - 2\pi\xi\ .$$

Nun hat man sich nur zu überlegen, daß sich die zwei Eibereiche $\mathfrak{G}_1(\xi)$ und $\mathfrak{G}_2(-\xi)$ dann und nur dann treffen, wenn sich auch $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ treffen, um zu bemerken, daß die Stückzahl des Durchschnittes $\mathfrak{G}_2\{\mathfrak{G}_1\}$ gleich sein muß wie die Stückzahl des Durchschnittes $\mathfrak{G}_2(-\xi)$ $\{\mathfrak{G}_1(\xi)\}$. Dabei ist noch zu beachten, daß die Stückzahl eines Durchschnittes zweier Eibereiche 1 beträgt. Die mittlere Stückzahl Φ wird sich somit nicht ändern, wenn die Grundfiguren ersetzt werden durch die erwähnten Parallelfiguren. Damit stoßen wir auf folgende Funktionalgleichung:

$$\Phi\{F_1 + \xi U_1 + \pi\xi^2, U_1 + 2\pi\xi, F_2 - \xi U_2 + \pi\xi^2, U_2 - 2\pi\xi\} = \Phi\{F_1, U_1, F_2, U_2\}\ . \tag{D}$$

Der so gewonnene Vorrat an Funktionalgleichungen genügt, um die Funktion Φ zu ermitteln.

Wir leiten jetzt also die Mittelwertsformel (I) aus den Eigenschaften α und β und aus den Funktionalgleichungen (A) bis (D) ab.

Setzen wir in (C) $U_1' = U_1'' = U_1$ und lassen U_1, F_2, U_2 konstant, so daß nur noch die Abhängigkeit von F_1 in Erscheinung tritt, so ergibt sich nach sinnentsprechender Abkürzung in der Schreibweise

$$\Phi\{F_1'\} + \Phi\{F_1''\} = \varphi\{F_1' + F_1''\}\ .$$

---

[8]) *J. Steiner*, Über parallele Flächen, Monatsbericht der Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1840), S. 114—118.

Setzen wir analog $F_1' = F_1'' = F_1$ und lassen F_1, F_2, U_2 konstant, betrachten also nur noch die Abhängigkeit von U_1, so gilt wieder

$$\Phi\{U_1'\} + \Phi\{U_1''\} = \psi\{U_1' + U_1''\}\,.$$

Wie *Darboux*[9]) gezeigt hat, ist die lineare Funktion die einzige in einem endlichen Intervall gleichmäßig beschränkte Lösung einer Funktionalgleichung der oben angeschriebenen Form. Die Funktion $\Phi\{F_1, U_1, F_2, U_2\}$ ist also in bezug auf die beiden ersten Variablen F_1 und U_1 linear, da sie nach α beschränkt ist. Im Hinblick auf die Symmetrie (A) ist sie es auch in bezug auf die beiden letzten Variablen F_2 und U_2.

Die allgemeinste Funktion $\Phi\{F_1, U_1, F_2, U_2\}$ die in den vier Variablen linear ist, und außerdem die Symmetriebeziehung (A) aufweist, hat die Form

$$\begin{aligned}\Phi = C_0 &+ C_1\{F_1 + F_2\} + C_2 U_1 U_2 + C_3\{U_1 + U_2\}\\ &+ C_4\{F_1 U_1 + F_2 U_2\} + C_5\{F_1 U_2 + F_2 U_1\}\\ &+ C_6 F_1 F_2 + C_7\{F_1 U_1 U_2 + F_2 U_1 U_2\}\\ &+ C_8\{F_1 F_2 U_1 + F_1 F_2 U_2\} + C_9 F_1 F_2 U_1 U_2\,.\end{aligned}$$

Verwenden wir jetzt noch Relation (B), so folgt, daß

$$C_0 = C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = C_7 = C_8 = C_9 = 0$$

sein muß. Es bleibt also noch

$$\Phi = C_1\{F_1 + F_2\} + C_2 U_1 U_2\,.$$

Suchen wir jetzt die Funktionalgleichung (D) zu erfüllen, so werden wir auf die Identität geführt

$$C_1\{F_1 + F_2\} + C_2 U_1 U_2 =$$

$$C_1\{F_1 + F_2 + \xi(U_1 - U_2) + 2\pi\xi^2\} + C_2\{U_1 U_2 - 2\pi\xi(U_1 - U_2) - 4\pi^2\xi^2\}\,,$$

woraus sich die Identität

$$2\pi\xi^2\{C_1 - 2\pi C_2\} + (U_1 - U_2)\xi\{C_1 - 2\pi C_2\} = 0$$

ergibt, die die Relation $$C_2 = \frac{C_1}{2\pi}$$

zur Folge hat. Wir erreichen

$$\Phi = C_1\{F_1 + F_2\} + C_1\frac{U_1 U_2}{2\pi}\,.$$

---

[9]) *G. Darboux*, Math. Ann. 17 (1880), S. 55.

Endlich berücksichtigen wir noch die Eigenschaft β, welche abzulesen gestattet, daß $C_1 = 1$ sein muß, so daß wir endgültig erhalten

$$\Phi = F_1 + F_2 + \frac{U_1 U_2}{2\pi},$$

was zu zeigen war.

§ 5. Bereich im Punktgitter. Der Satz von Blichfeldt.

Es sollen nun einige wichtige Spezialisierungen der allgemeinen Mittelwertsformel (I) besprochen werden. Es sei zunächst $\mathfrak{G}_1$ ein beliebiger Bereich der Fläche F_1 und $\mathfrak{G}_2$ ein Punkt. Die Stückzahl des Durchschnittes $\mathfrak{G}_2\{\mathfrak{G}_1\}$ kann hier anschaulich als Treffzahl bezeichnet werden. Sie ist gleich der Zahl der Bereiche des Bereichgitters, die vom Punkt getroffen werden. Die mittlere Treffzahl ist nach (I)

$$\overline{N} = F_1 \,.$$

Beachten wir, daß die Treffzahl bei allen Drehungen des Punktes gleich bleibt, so kann die Mittelwertsbildung statt über alle Bewegungen nur über Translationen erstreckt werden, ohne das Resultat zu ändern. Wir haben demnach auch als Translationsmittelwert

$$\overline{N}' = F_1$$

zu erwarten. Wir sprechen dieses Resultat ausdrücklich für den zugehörenden symmetrischen Fall aus. (Auch bei der Mittelwertsbildung, die sich über die Translationen erstreckt, darf man die beiden Grundfiguren in ihrer Rolle vertauschen. Man vergleiche die zur Begründung der Symmetriebeziehung (A) beigebrachte Bemerkung.)

(II) *Ein Bereich der Fläche F werde im quadratischen Einheitsgitter allen Bewegungen oder allen Translationen unterworfen. Die mittlere Zahl der getroffenen Gitterpunkte ist in beiden Fällen gleich F.*

Diese Aussage enthält einen bekannten Satz von *Blichfeldt*[10]) als einfache Konsequenz. Dieser Satz besagt im zwei-dimensionalen Fall folgendes: *Ein Bereich der Fläche F kann im quadratischen Einheitsgitter immer so parallel verschoben werden, daß die Zahl der bedeckten Gitterpunkte nicht kleiner als F ausfällt.*

Da nun nicht alle Treff- oder Bedeckungszahlen kleiner als der Mittelwert sein können, folgt der Blichfeldtsche Satz ohne weiteres aus (II).

[10]) *Blichfeldt*, Trans. Amer. Math. Soc. (1914) 15, S. 227—235. Einen kurzen Beweis dieses Satzes gab *W. Scherrer*, Ein Satz über Gitter und Volumen. Math. Ann. 86 (1922), S. 106—107.

§ 6. Konvexer Bereich im Kreis- und Quadratgitter.

Sind die Grundfiguren $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ beide konvex, so ist der Durchschnitt $\mathfrak{G}_2 \cdot \mathfrak{G}_1$ immer entweder leer oder einfach zusammenhängend. Die Anzahl der nicht leeren Durchschnitte der Figur $\mathfrak{G}_2$ im Figurengitter $\{\mathfrak{G}_1\}$ nennen wir dann statt Teilstückzahl anschaulicher *Treffzahl.* Aus der Mittelwertsformel (I) ergeben sich die folgenden speziellen Aussagen:

(III) *Die mittlere Treffzahl eines konvexen Bereiches der Fläche F und vom Umfang U im Gitter der Kreise vom Radius R ist $F + UR + \pi R^2$.*

(IV) *Die mittlere Treffzahl eines konvexen Bereiches der Fläche F und vom Umfang U im Gitter der Quadrate der Seitenlänge S ist $F + \frac{2US}{\pi} + S^2$.*

Wir notieren uns noch eine Folgerung aus (IV), die in gewissem Sinne ein Seitenstück des Blichfeldtschen Satzes bildet:

Ein konvexer Bereich der Fläche F und vom Umfange U kann im quadratischen Einheitsgitter immer so bewegt werden, daß die Zahl der getroffenen Gitterquadrate nicht kleiner als $1 + \frac{2U}{\pi} + F$ ausfällt.

§ 7. Nadel im Eibereichgitter.

Die Grundfiguren $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ seien ein Eibereich und eine Strecke (Nadel). Wie früher erwähnt, muß als Fläche und als Umfang der Nadel Null und die doppelte Länge eingesetzt werden. Die Mittelwertsformel liefert dann folgendes Resultat:

(V) *Die mittlere Treffzahl einer Nadel der Länge L im Gitter der Eibereiche der Fläche F und vom Umfang U ist $F + \frac{UL}{\pi}$.*

Wählt man als Grundfiguren ein Einheitsquadrat und eine Nadel, so erreicht man das Resultat:

Eine Nadel der Länge L trifft im quadratischen Einheitsgitter im Mittel $1 + \frac{4L}{\pi}$ Quadrate.

§ 8. Kurve im Kurvengitter.

Endlich nehmen wir als Grundfiguren $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ zwei streckbare offene oder geschlossene Kurven. Geschlossene Kurven sind nach Voraussetzung in § 1 als Figur nicht zulässig. Doch erkennt man leicht, daß bei der speziellen Aussage, die hier gemacht werden soll, dieses Verbot unnötig wird, da die Werte (Anzahl der Schnittpunkte mit einer anderen Kurve), um die es sich hier handelt, ungeändert bleiben, wenn man eine geschlossene Kurve an irgend einer Stelle durchschneidet. Die Teilstückzahl des Durchschnittes der einen Kurve mit dem Gitter der andern ist natürlich die Zahl der auftretenden Schnittpunkte. Nach (I) schließen wir:

(VI) *Die mittlere Schnittpunktszahl einer Kurve der Länge V in einem Gitter von Kurven der Länge W ist* $\dfrac{2VW}{\pi}$.

Wird in (V) an Stelle des Eibereiches eine Einheitsstrecke gewählt, oder in (VI) für die bewegliche Kurve eine Nadel der Länge L, und für die Gitterkurve eine Einheitsstrecke, so liegt in beiden Fällen die gleiche Versuchsanordnung vor: In einem Geradengitter der Elementardistanz 1 (Schar paralleler und äquidistanter Geraden) wird eine Nadel der Länge L bewegt. Die mittlere Schnittpunktszahl wird nach (V) und nach (VI) $\dfrac{2L}{\pi}$ [11]). Durch die Aussagen (V) und (VI) sind Aufgaben gelöst, die als Verallgemeinerungen des bekannten Nadelproblems von *Buffon* angesprochen werden können [12]).

§ 9. Eibereich im eigenen Gitter. Das isoperimetrische Defizit.

Als Grundfiguren nehmen wir zwei kongruente Eibereiche der Fläche F und vom Umfange U. Wir bewegen also einen Eibereich in seinem eigenen Gitter. In einer bestimmten Lage des bewegten Eibereichs ermitteln wir den Überschuß $S - 2N$, wo S die Schnittpunktszahl der Ränder und N die Treffzahl der Bereiche ist. Der Mittelwert dieses Überschusses

$$\overline{S - 2N} = \overline{S} - 2\,\overline{N}$$

wird nach (I) und (VI)

$$\frac{2U^2}{\pi} - 2\left\{2F + \frac{U^2}{2\pi}\right\} = \frac{U^2 - 4\pi F}{\pi}.$$

---

11) *R. Laemmel* (Untersuchungen über die Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten, Diss. Zürich 1904, S. 78) bestimmte bei einer solchen Versuchsanordnung die Häufigkeiten der möglichen Schnittpunktszahlen theoretisch und experimentell. Für die mittlere Schnittpunktszahl findet man nach dem dort angegebenen Material empirisch: 2,553, theoretisch: 2,546. Es war $L = 4$.

12) Vgl. auch die Resultate von *E. Barbier*, Liouv. Journ. II, 5 (1860), S. 273—286.

Also:

(VII) *Der mittlere Überschuß der Ränderschnittpunktszahl über die doppelte Treffzahl bei einem Eibereich der Fläche F und vom Umfang U in seinem eigenen Gitter ist*

$$\frac{U^2 - 4\pi F}{\pi} .$$

Dieser Satz enthält die Lösung der isoperimetrischen Aufgabe für Eibereiche [13]).

In der Tat ist stets

$$S - 2N \geqq 0$$

da ja jeder Trefffall Anlaß zu mindestens zwei Schnittpunkten gibt. Es folgt zunächst, daß als Mittelwert nicht-negativer Größen

$$U^2 - 4\pi F \geqq 0$$

sein muß, für jeden Eibereich. Da sich zwei Kreise höchstens in zwei Punkten schneiden, ist für Kreise fast immer

$$S - 2N = 0 , \quad \text{also} \quad U^2 - 4\pi F = 0 .$$

Ist umgekehrt $U^2 - 4\pi F = 0$, so muß fast immer $S - 2N = 0$ sein, und es muß die Eilinie die Eigenschaft haben, eine kongruente Eilinie in höchstens zwei Punkten zu schneiden. Dies ist aber eine charakterisierende Eigenschaft des Kreises [14]).

(Eingegangen den 29. Oktober 1938.)

[13]) Dieser bemerkenswerte Gehalt der Aussage ist nicht neu, sondern kann als Übertragung einer von *Santalo* und *Blaschke* vorgenommenen Verwertung der integralgeometrischen Grundformeln, durch welche eine elegante Lösung des isoperimetrischen Problems erzielt wurde, aufgefaßt werden. Vgl. das in Fußnote [1]) genannte Buch, insbesondere S. 25—27.

[14]) *T. Kubota*, Tohoku Math. J. Bd. 21 (1922), S. 21—25. — Wegen eines einfachen Beweisverfahrens vgl. auch *H. Hadwiger* und *W. Scherrer*, Lösung der Aufgab 231. Jahresbericht der D. M. V. 48 (1938), S. 50. Bei der von *W. Blaschke* gestellten Aufgabe handelt es sich um den entsprechenden Satz der räumlichen Geometrie, der eine Kennzeichnung der Kugel darstellt.