Einige Relationen im Dreieck.

Einige Relationen im Dreieck

Von P. Finsler, Zürich, und H. Hadwiger, Bern

1. Man lege an die Seiten eines beliebigen Dreiecks D gleichseitige Aufsatzdreiecke. Die drei Schwerpunkte der Aufsatzdreiecke, die mit dem Urdreieck D auf entgegengesetzter bzw. auf gleicher Seite der gemeinsamen Basis liegen, bilden sodann ein gleichseitiges Dreieck D_1 bzw. ein gleichseitiges Dreieck D_2. In Fig. 1 sind die Dreiecke D, D_1, D_2, durch ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ dargestellt.

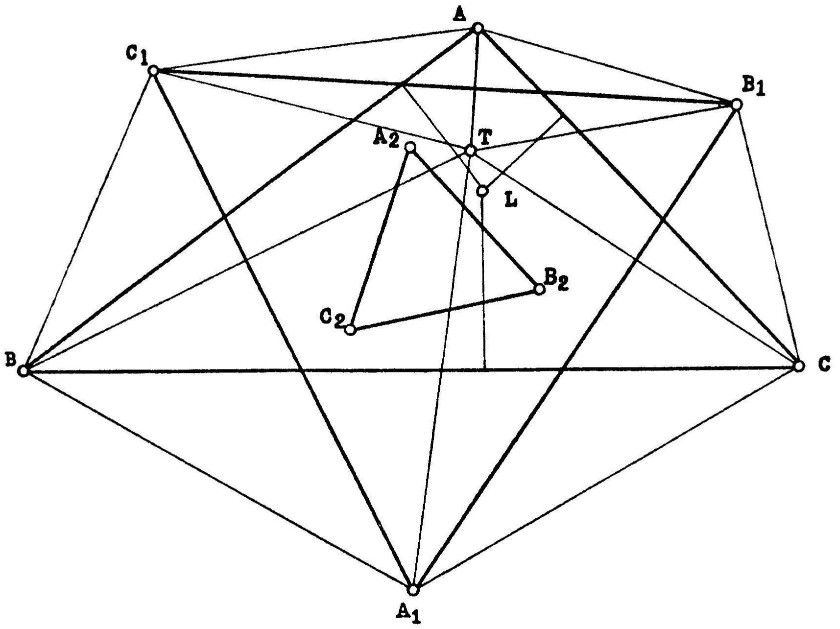

Fig. 1

Der geometrische Beweis dieses Sachverhaltes, den man sich ohne große Mühe zurechtlegen wird, kann hier übergangen werden. Im übrigen kann auf eine Arbeit von *W. Fischer*[1]) und auf die unter 4. betrachtete Verallgemeinerung verwiesen werden. Die Figur mit den gleichseitigen Aufsatzdreiecken ist in der Dreiecksgeometrie verschiedentlich aufgetreten und wird nach *Torricelli* benannt[2]). Im Zusammenhang mit der Frage nach dem gleichseitigen Umdreieck größter Fläche begegnen wir ihr bei *E. Fasbender*[3]). Die gleiche Figur tritt auf bei *M. Filip*[4]), der mit ihrer Hilfe den Punkt kleinster Eckdistanzsumme bestimmt.

In dieser Note sollen die oben erwähnten gleichseitigen Dreiecke D_1

[1]) Arch. Math. Phys. 40 (1863), S. 460.

[2]) Enzyklopädie der Math. Wiss. III AB 10, S. 1218.

[3]) Journ. für Math. 30, S. 230—231 (1846).

[4]) Gazeta mat. Bukarest 13, S. 68—71. Vergl. Fortschritte der Math. Jahrgang 1907, S. 541.

und D_2 einer speziellen Betrachtung unterworfen werden, wobei sich zeigt, daß sie mit dem Urdreieck durch beachtenswerte Beziehungen verbunden sind. Um besseren Überblick zu schaffen, werden die Resultate unter 2. im Zusammenhang angeschrieben und die Beweise nachher unter 3. in gleicher Reihenfolge angegliedert.

Sodann wird unter 4. die Relation (I) auf den allgemeineren Fall ähnlicher Aufsatzdreiecke ausgedehnt, wobei sich einige Anwendungen ergeben, und unter 5. wird noch gezeigt, daß die Höhenschnittpunkte der Dreiecke D_1 und D_2 in einen Punkt zusammenfallen, der, wenn die Dreiecke gleichseitig sind, der Schwerpunkt von D ist.

2. Bezeichnen wir die Flächen und die quadratischen Umfänge (Summe der Seitenquadrate) der Dreiecke D, D_1, D_2 mit F, F_1, F_2 und S, S_1, S_2, so gelten im Falle gleichseitiger Aufsatzdreiecke die Relationen

$$F_1 - F_2 = F \tag{I}$$

$$S_1 + S_2 = S \tag{II}$$

$$S + 4\sqrt{3}\,F = 8\sqrt{3}\,F_1 \tag{III}$$

$$S - 4\sqrt{3}\,F = 8\sqrt{3}\,F_2\,. \tag{IV}$$

Aus der Relation (IV) folgt insbesondere

$$S - 4\sqrt{3}\,F \geqq 0\ ,$$

und das ist die Ungleichung von *R. Weitzenboeck*[5]). Vergl. auch eine andere Herleitung und analoge Ungleichungen bei *T. Kubota*[6]).

Sind a, b, c, die Seitenlängen des Dreiecks D und wird

$$Q = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$$

gesetzt, so gilt

$$8\sqrt{3}\,F_2 = 2\,S_2 \geqq Q\,. \tag{V}$$

Mit (IV) zusammen ergibt sich also die folgende Verschärfung der Ungleichung von *Weitzenboeck:*

$$S - Q - 4\sqrt{3}\,F \geqq 0\ ,$$

und für den Umfang

$$u = a + b + c = \sqrt{3\,S - Q}$$

des Dreiecks D folgt

$$u^2 - 2\,Q - 12\sqrt{3}\,F \geqq 0\,.$$

---

[5]) Math. Zeitschrift 5, S. 137—146 (1919).

[6]) Tohoku Math. J. 25, S. 122—126 (1925).

Dabei gilt hier wie in (V) die Gleichheit nicht nur für $a = b = c$, sondern auch dann, wenn eine Seite die Länge Null besitzt.

Ist kein Winkel im Urdreieck D größer als $\frac{2\pi}{3}$, und ist m das vorhandene Minimum der Distanzsumme eines Punktes der Ebene von den drei Eckpunkten von D, so gilt:

$$m = \sqrt{4\sqrt{3}\,F_1} = \sqrt{S_1}\,. \tag{VI}$$

Da nach (I) $F_1 = F + F_2$ ist, folgt aus (VI) eine von *U. T. Boedewadt*[7]) angegebene Abschätzung, wonach

$$m \geqq \sqrt{4\sqrt{3}\,F}$$

ist, woraus dann wieder eine schwächere Abschätzung von *M. Schreiber*[8]) folgt, nämlich:

$$m \geqq 6\,r\,,$$

wo r den Radius des Inkreises von D bezeichnet.

Aus (VI), (II) und (V) folgt noch:

$$m \leqq \sqrt{ab + bc + ca}\,.$$

Es sei N das Minimum der Quadratsumme der Abstände eines Punktes der Ebene von den drei Seiten des Urdreieckes D. Sodann ist

$$N = \frac{F^2}{\sqrt{3}\,(F_1 + F_2)}\,. \tag{VII}$$

Wird die Fläche des größten, dem Urdreieck D umschriebenen gleichseitigen und gleich bzw. entgegengesetzt orientierten[9]) Dreiecks mit U_1 bzw. U_2 bezeichnet, so gilt:

$$\begin{aligned} U_1 &= 4F_1 \\ U_2 &= 4F_2\,. \end{aligned} \tag{VIII}$$

Wird die Fläche des kleinsten, dem Urdreieck D einbeschriebenen gleichseitigen und gleich bzw. entgegengesetzt orientierten[10]) Dreiecks mit J_1 bzw. J_2 bezeichnet, so ist:

---

[7]) Jahresbericht der D. M. V. 46 (1936), Lösung der Aufgabe Nr. 196.

[8]) Jahresbericht der D. M. V. 45 (1935), Aufgabe Nr. 196.

[9]) Die Ecken eines Umdreiecks werden den Ecken des Urdreiecks so zugeordnet, daß nicht entsprechende Ecken auf einer Umdreiecksseite liegen. Die zugeordneten Ecken können nun einen gleichen oder entgegengesetzten Umlaufssinn ergeben.

[10]) Das Urdreieck ist Umdreieck. Sodann gilt das in Fußnote [9]) Erwähnte.

$$
\left.\begin{aligned}
J_1 &= \frac{F^2}{4F_1} \\
J_2 &= \frac{F^2}{4F_2}\,.
\end{aligned}\right. \qquad \text{(IX)}
$$

Aus (VIII) und (IX) entnehmen wir noch

$$
\left.\begin{aligned}
F &= \sqrt{U_1 J_1} \\
F &= \sqrt{U_2 J_2}\,.
\end{aligned}\right. \qquad \text{(X)}
$$

Die Fläche eines Dreiecks ist gleich dem geometrischen Mittel der Flächen des größten gleichseitigen Umdreiecks und des kleinsten gleichseitigen gleichorientierten Indreiecks.

3. Wir lassen nun die Beweise folgen:

Werden die den Seiten a, b, c zugeordneten Winkel mit α, β, γ und die Seiten der Dreiecke D_1 und D_2 mit s_1 und s_2 bezeichnet, so gewinnt man durch Anwendung des Kosinussatzes leicht:

$$
s_1^2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab \cos\left(\gamma + \frac{\pi}{3}\right)}{3}
$$

$$
s_2^2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab \cos\left(\gamma - \frac{\pi}{3}\right)}{3}\,.
$$

Mit Rücksicht auf

$$
\begin{aligned}
2ab\cos\gamma &= a^2 + b^2 - c^2 \\
ab\sin\gamma &= 2F \\
a^2 + b^2 + c^2 &= S
\end{aligned}
$$

können die oben angeschriebenen Ausdrücke auf die symmetrische Gestalt

$$
s_1^2 = \frac{S + 4\sqrt{3}F}{6}
$$

$$
s_2^2 = \frac{S - 4\sqrt{3}F}{6}
$$

gebracht werden. Demnach wird

$$
S_1 = \frac{S + 4\sqrt{3}F}{2} \qquad F_1 = \frac{\sqrt{3}S + 12F}{24}
$$

$$
S_2 = \frac{S - 4\sqrt{3}F}{2} \qquad F_2 = \frac{\sqrt{3}S - 12F}{24}\,,
$$

woraus unmittelbar die Relationen (I) und (II) sowie auch (III) und (IV) entnommen werden können.

Ist f die Fläche des Dreiecks mit den Seiten $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, so ist

$$4f^2 \geqq \sqrt{3}\,F\,.$$

Mit Hilfe der bekannten Formel

$$16\,F^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)$$

ergibt sich nämlich nach kurzer Umrechnung:

$$4(16f^4 - 3F^2) = a^2(a-b)\,(a-c) + b^2\,(b-c)\,(b-a) + c^2(c-a)\,(c-b).$$

Wird $a > b > c$ angenommen, so ist rechts das erste und das dritte Glied positiv, das zweite negativ, aber von kleinerem Betrag als das erste, also der ganze Ausdruck positiv. Weiter ergibt sich

$$16f^2 = S - Q\;;$$

die obige Ungleichung führt also mit (IV) zusammen zu (V).

Ist die bei (VI) stehende Voraussetzung über die Winkel des Urdreiecks D erfüllt, so liegt der gemeinsame Schnittpunkt T der drei Umkreise der nach außen gelegten Aufsatzdreiecke im Inneren von D. Es ist der sog. Torricellische Punkt, der die Distanzsumme von den drei Urecken zu einem Minimum macht. Als Radien der oben erwähnten Kreise sind folgende Strecken gleich:

$$TA_1 = CA_1,\;\; TB_1 = CB_1 \qquad \text{usw.}$$

Hieraus folgt, daß die Seiten A_1B_1 usw. des Dreiecks D_1 auf den Strecken TC usw. senkrecht stehen und diese außerdem halbieren. Infolgedessen ist die Summe

$$m = TC + TB + TA\;,$$

die das fragliche Minimum darstellt, gleich der doppelten Abstandssumme des Punktes T von den drei Seiten des Dreiecks D_1, und als solche gleich der doppelten Höhe von D_1. Von hier führt die Rechnung sofort zur Formel (VI).

Die Quadratsumme der Abstände von den Seiten des Dreiecks D wird ein Minimum für den Lemoineschen Punkt L. Seine Abstände von den

Seiten sind zu diesen proportional. Wir können sie mit λa, λb, λc bezeichnen. Es gilt dann offenbar die Gleichung

$$\lambda a^2 + \lambda b^2 + \lambda c^2 = 2F ,$$

so daß man hieraus für den Faktor λ die Formel erhalten kann

$$\lambda = \frac{2F}{S} ,$$

und für das fragliche Minimum also

$$N = \lambda^2 S = \frac{4F^2}{S} = \frac{F^2}{\sqrt{3}\,(F_1 + F_2)} ,$$

wobei noch (III) und (IV) berücksichtigt wurde.

Ziehen wir durch die Eckpunkte A, B, C parallele Geraden zu den Seiten B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, so entsteht ein gleichseitiges gleichorientiertes Umdreieck von D, dessen Fläche $4F_1$ beträgt, wie man ohne weiteres aus der zu (VI) gehörenden Beweisführung entnehmen wird; die einschränkende Voraussetzung von (VI) ist dabei nicht mehr notwendig. Dieses Dreieck ist das größte gleichseitige Umdreieck. Dieses bereits durch *E. Fasbender*[3]) angegebene Resultat läßt sich hier leicht wie folgt bestätigen: Die Strecken TA, TB, TC stehen auf den Seiten des betrachteten Umdreiecks normal, wie bereits früher festgestellt wurde. Werden die drei Seiten des Umdreieckes um den gleichen Winkel gedreht, so entsteht wieder ein gleichseitiges gleichorientiertes Umdreieck, für das aber die Summe der drei Lote, die von T aus auf die Seiten gefällt werden, kleiner geworden ist. Da die Lotsumme für einen inneren Punkt eines gleichseitigen Dreiecks gleich der Höhe ist, muß das gedrehte Umdreieck kleiner sein.

Für entgegengesetzt orientierte Umdreiecke kann das in (VIII) mitgeteilte Resultat in analoger Weise gewonnen werden.

Zum Beweise von (IX) lege man durch die Eckpunkte $A_1B_1C_1$ von D_1 parallele Geraden zu BC, CA, AB. So erhält man ein Dreieck D^*, das D_1 umschrieben und zu D ähnlich ist. Da die Abstände der parallelen Seiten der Dreiecke D und D^* nach der ursprünglichen Konstruktion von D_1 zu den Seitenlängen proportional sind, liegen D und D^* perspektiv und das Ähnlichkeitszentrum ist der gemeinsame Lemoinesche Punkt L.

Wir bemerken ferner, daß die Eckpunkte des Dreiecks D_1 auf den drei Mittelnormalen des Urdreiecks D liegen, so daß D_1 das zum Umkreismittelpunkt von D gehörende Fußpunktsdreieck in D^* ist. Als solches ist es das kleinste gleichorientierte gleichseitige Indreieck von D^*[11]). Wenn also J_1 die Fläche des kleinsten gleichorientierten gleichseitigen Indreiecks von D bezeichnet, so gilt die Proportion:

$$\sqrt{J_1} : \sqrt{F_1} = a : a^* \ ,$$

falls a und a^* die Längen entsprechender Seiten in den Dreiecken D und D^* bedeuten.

Ist $\lambda = \frac{2F}{S}$ der im Nachweis von (VII) eingeführte Proportionalitätsfaktor, so sind die Abstände der oben genannten Dreiecksseiten vom gemeinsamen Lemoineschen Punkt L λa und λa^*. Nach der ursprünglichen Konstruktion ist aber

$$\lambda a^* = \lambda a + \frac{a}{2\sqrt{3}} \ ,$$

so daß hieraus folgt

$$a : a^* = 1 : \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{3}\,\lambda}\right) \ ,$$

oder nach Einsatz des oben angegebenen Wertes für λ

$$\sqrt{J_1} : \sqrt{F_1} = 4\sqrt{3}\,F : (S + 4\sqrt{3}\,F) \ ,$$

und mit Verwendung von (III)

$$\sqrt{J_1} : \sqrt{F_1} = F : 2F_1 \ ,$$

woraus

$$J_1 = \frac{F^2}{4F_1}$$

resultiert, was nachzuweisen war.

Analog erledigt sich der Fall entgegengesetzt orientierter gleichseitiger Indreiecke.

4. Die Relation (I) gilt auch dann, wenn die nicht ausgearteten Aufsatzdreiecke nur zueinander ähnlich sind und so liegen, daß an jeder Ecke des Urdreiecks homologe (und daher gleiche) Winkel anliegen. Die Umkreise dieser Dreiecke treffen sich, je nachdem die Aufsatzdreiecke mit dem Urdreieck auf entgegengesetzter oder auf gleicher Seite der gemeinsamen Basis liegen, in einem Punkt T_1 bzw. T_2[12]), und ihre Mittelpunkte bilden

---

[11]) Enzyklopädie der Math. Wiss. III AB 10, S. 1228.

[12]) Enzyklopädie der Math. Wiss. III AB 10, S. 1217.

ein Dreieck D_1 bzw. D_2, das zu den Aufsatzdreiecken ähnlich ist, da die Winkel entsprechend übereinstimmen. So ist z. B. in Fig. 1 $\sphericalangle B_1A_1C_1 = \frac{1}{2}\sphericalangle CA_1B$ gleich dem Peripheriewinkel über der Sehne BC. Es ist zu zeigen, daß für die Flächen F, F_1, F_2 von D, D_1, D_2 wieder die Relation gilt:

$$F_1 - F_2 = F .$$

Da die Aufsatzdreiecke nicht sämtlich ausarten sollen und D_2 zu ihnen ähnlich ist, kann F_2 nur verschwinden, wenn sich D_2 auf einen Punkt reduziert. D_2 ist dann gemeinsamer Mittelpunkt der drei Umkreise, die folglich mit dem Umkreis des Dreiecks D zusammenfallen müssen. Die nach innen gesetzten Aufsatzdreiecke müssen also in diesem Fall unter sich kongruent sein und daher mit D zusammenfallen, weshalb auch D_1 zu D ähnlich sein muß. In allen anderen Fällen ist $F_2 > 0$.

Wird der Punkt T_1 an den Seiten von D_1 gespiegelt, so erhält man die Ecken A, B, C von D. Durch Betrachtung der entsprechenden Teildreiecke erkennt man, daß der Inhalt J des Sechsecks $AC_1BA_1CB_1$ gleich $2\,F_1$ ist. Andererseits ist aber

$$J = F + \lambda a^2 + \mu b^2 + \nu c^2 ,$$

wobei die Zahlen λ, μ, ν nur von der Gestalt der Aufsatzdreiecke abhängen. Es gilt also

$$2F_1 = F + \lambda a^2 + \mu b^2 + \nu c^2 .$$

Durch stetige Änderung kann man nun das Dreieck D in sein Spiegelbild überführen, und zwar so, daß dabei nur F sein Vorzeichen wechselt. Dabei geht aber D_1 in D_2 und daher F_1 in F_2 über, so daß gilt

$$2F_2 = -F + \lambda a^2 + \mu b^2 + \nu c^2 .$$

Durch Subtraktion ergibt sich die gesuchte Gleichung.

Spezielle Annahmen über die Winkel der Aufsatzdreiecke führen zu den Sätzen:

Errichtet man über zwei Seiten eines Dreiecks nach außen oder nach innen gleichseitige Dreiecke, so bildet die Spitze des einen mit der Mitte des andern und der Mitte der dritten Dreiecksseite je ein Dreieck mit den Winkeln 30°, 60°, 90°. *Die Differenz der Flächen dieser Dreiecke ist gleich der Fläche des gegebenen Dreiecks.*

Errichtet man über zwei Seiten eines Dreiecks als Basis nach außen oder nach innen rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke, so bilden ihre Spitzen mit der Mitte der dritten Dreiecksseite je ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck. Die Differenz der Flächen dieser Dreiecke ist gleich der Fläche des gegebenen Dreiecks.

Daraus folgt noch:

Wenn zwei Quadrate eine Ecke gemeinsam haben, so bilden ihre Mittelpunkte die Gegenecken eines Quadrats, dessen andere Gegenecken in die Mitte zwischen entsprechende Ecken der gegebenen Quadrate fallen. Die entsprechenden Ecken sind dabei der gemeinsamen Ecke benachbart, aber mit entgegengesetztem Umlaufssinn.

Wenn wie oben $F_2 = 0$ ist, so wird $F_1 = F$ und D_1 muß zu D kongruent sein. Spiegelt man also den Umkreismittelpunkt eines Dreiecks an den drei Seiten, so erhält man ein kongruentes Dreieck.

Allgemeiner heiße ein Punkt P *Spiegelpunkt* eines nichtausgearteten Dreiecks D, wenn seine Spiegelbilder in bezug auf die Dreiecksseiten ein zu D ähnliches Dreieck ergeben. Diese Spiegelpunkte lassen sich in folgender Weise bestimmen:

Das Dreieck D_1 ist dann und nur dann zu D ähnlich, wenn die Aufsatzdreiecke zu D ähnlich sind. Der Punkt T_1 ist dann Spiegelpunkt von D_1, und eine ähnliche Abbildung, die D_1 in D überführt, führt T_1 in einen Spiegelpunkt von D über. Entsprechendes gilt für D_2 und T_2, ausgenommen den Fall, daß sich D_2 auf einen Punkt reduziert.

An eine bestimmte Seite eines ungleichseitigen Dreiecks D kann man auf 11 Arten ein zu D ähnliches Dreieck ansetzen, das nicht mit D zusammenfällt. Damit erhält man sämtliche Spiegelpunkte, da sich die Konstruktion auch umkehren läßt. Unter Berücksichtigung von $F_1 - F_2 = F$ findet man:

Ein ungleichseitiges Dreieck besitzt 11 Spiegelpunkte, wovon einer in den Umkreismittelpunkt fällt und ein gleichsinnig kongruentes Dreieck liefert. Die übrigen liefern 5 gleich- und 5 ungleichsinnig ähnliche Dreiecke; wenigstens 2 der ersteren und 3 der letzteren sind kleiner als das gegebene Dreieck.

Ein gleichschenkliges Dreieck besitzt 5 Spiegelpunkte; wenigstens zwei davon liefern kleinere, und wenigstens einer[13]*) ein kongruentes Dreieck.*

Beim gleichseitigen Dreieck ist der Schwerpunkt der einzige Spiegelpunkt.

In analoger Weise lassen sich die Punkte P bestimmen, deren Spiegelbilder in bezug auf die gegebenen Dreiecksseiten ein Dreieck von *anderer*

[13]) Für $b = c$ und $b : a = \sqrt{3 \pm \sqrt{7}}$ erhält man drei zu D kongruente Dreiecke.

vorgeschriebener Gestalt ergeben. Man erhält hier 12, bzw. 6, bzw. 2 solche Punkte, je nachdem die entstehenden Dreiecke ungleichseitig, gleichschenklig oder gleichseitig sind. Wenigstens je die Hälfte dieser Dreiecke hat kleinere Fläche als das gegebene.

Die gegenseitige Lage der Punkte P ist im Zusammenhang mit den Fußpunktdreiecken, die ja zu den Spiegelbilddreiecken ähnlich sind, schon untersucht [14]).

5. In dem unter 4. betrachteten allgemeinen Fall gilt:

Die Dreiecke D_1 und D_2 haben denselben Höhenschnittpunkt.

Um dies zu zeigen, verwenden wir den Satz:

Wenn sich ein Dreieck derart ähnlich verändert, daß eine Ecke fest bleibt und eine zweite Ecke auf einer Geraden läuft, so läuft auch die dritte Ecke auf einer Geraden.

Das Dreieck liege in einer Gaußschen Zahlenebene; seine Ecken seien durch die komplexen Zahlen z_1, z_2, z_3 festgelegt. Ist $z_1 = 0$ die feste Ecke, so wird $z_3 = \text{const.}\, z_2$. Ändert sich also z_2 linear, so gilt dasselbe für z_3.

Durch Gestalt und Anordnung der Aufsatzdreiecke von D ist auch die Gestalt des Dreiecks CB_1A bestimmt. Wird also die Seite BC des Dreiecks D festgehalten und A auf einer Geraden g bewegt, so beschreibt auch B_1 eine Gerade, und da sich das Dreieck D_1 ähnlich ändert und A_1 fest bleibt, so bleibt auch der Höhenschnittpunkt H_1 von D_1 auf einer Geraden g_1. Wird insbesondere g senkrecht zu BC gewählt, so ist auch g_1 senkrecht zu BC, denn wenn A auf g ins Unendliche geht, wird der Winkel zwischen BC und C_1B_1 beliebig klein. Nur wenn H_1 mit A_1 zusammenfällt, bleibt H_1 fest.

Nun werde A durch stetige Bewegung auf g von der Anfangslage in das Spiegelbild $\overline{A}$ bezüglich BC übergeführt und dann durch Spiegelung an BC in die Anfangslage zurückgebracht. Dabei geht aber D_1 in D_2 über und H_1 in den Höhenschnittpunkt H_2 von D_2.

Die Punkte H_1 und H_2 liegen also in gleichem Abstand auf derselben Seite von g und ebenso von den andern Höhen von D; sie müssen also zusammenfallen.

Wenn speziell die Ecken von D in eine Gerade fallen, so muß aus Symmetriegründen auch $H_1 = H_2$ in diese Gerade fallen. Dies ergibt den Satz:

Wenn drei Kreise durch einen Punkt gehen und die drei weiteren Schnitt-

[14]) Enzyklopädie III AB 10, S. 1229.

punkte auf einer Geraden liegen, so liegt der Höhenschnittpunkt des Dreiecks der Kreismittelpunkte ebenfalls auf dieser Geraden.

Die Mitten der Strecken A_1A_2, B_1B_2 und C_1C_2 halbieren die Seiten BC, CA und AB. Bringt man also in A, B, C gleiche Massen an und verteilt sie dann je zur Hälfte von B und C nach A_1 und A_2 usw., so wird der Schwerpunkt nicht geändert. *Der Schwerpunkt des Dreiecks D liegt daher in der Mitte zwischen den Schwerpunkten von D_1 und D_2.*

Wegen $H_1 = H_2$ folgt speziell:

Sind die Dreiecke D_1 und D_2 gleichseitig, so fallen ihre Schwerpunkte in den Schwerpunkt von D.

Dieser Satz [15]) ergibt sich auch direkt, wenn man sich die Dreiecke in der Gaußschen Zahlenebene gelegen denkt. Die Ecken von D seien durch die komplexen Zahlen z_1, z_2, z_3 festgelegt, die von D_1 oder D_2 durch y_1, y_2, y_3. Dann ist

$$y_1 = \tfrac{1}{2}(z_2 + z_3) \pm \frac{i}{2\sqrt{3}}(z_3 - z_2) \quad \text{und zyklisch,}$$

also

$$\tfrac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3) = \tfrac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3) \quad .$$

---

[15]) Er findet sich bei *J. Neuberg*, Bibliographie du triangle et du tétraèdre, p. 60; Mathésis 37 (1923), p. 452.

(Eingegangen den 22. Juni 1938.)