Erweiterung eines Konvergenzsatzes von M. Riesz für Dirichlet'sche Reihen.

Erweiterung eines Konvergenzsatzes von M. Riesz für Dirichletsche Reihen

Von Alfred Kienast, Küsnacht (Zürich)

M. Riesz [5, 6] * bewies den Satz:

„Erfüllen die Koeffizienten einer Dirichletschen Reihe

$$f(s)=\sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s}, \ \lambda_1<\lambda_2<\cdots, \ \lambda_n\to\infty, \ s=\sigma+it, \tag{1}$$

die Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\lambda_n c}\sum_1^n a_k=0, \quad (c>0) \tag{2}$$

und ist die infolge 2) für $\sigma>c$ reguläre Funktion $f(s)$ auch in gewissen Punkten der Geraden $\sigma=c$ regulär, so konvergiert die Reihe in diesen Punkten.“

Ferner bemerkt er [5]: ”La convergence subsiste pour une grande classe de points singuliers.“

In einer weiteren Arbeit hat M. Riesz [7] ausgeführt, wie die Regularität durch weniger einschränkende Bedingungen ersetzt werden kann.

Für diesen Satz hat kürzlich A. E. Ingham [1] eine Verfeinerung bewiesen (Theorem I, pag. 463), durch Anwendung der Wienerschen Methode (vergleiche auch J. Karamata, Weiterführung der N. Wienerschen Methode, Math. Zeit. 38 (1934), 701—8, und Comptes-Rendus 2e Congrès Math. pays slaves, Praha 1934. Un théorème sur les integrales trigonométriques, 147—9).

Er setzt (1) in der Form des Stieltjes-integrals

$$f(s)=\int_0^\infty e^{-us}dA(u)\ , \quad A(0)=0\ , \quad A_\lambda(\omega)=\sum_{\lambda_n\leqq\omega} a_n, \tag{3}$$

voraus, ferner daß $c=0$ und

$$s^{-1}\left(f(s)-f(0)\right) \text{ stetig ist für } \sigma\geqq 0, \ |t|\leqq T\ .$$

Der Zweck des vorliegenden Aufsatzes ist, auf dem von Ingham eingeschlagenen Wege unter Benutzung seiner Bezeichnungen und engstem Anschluß an seinen Beweisgang einen Schritt weiterzugehen und zu beweisen:

*) Nummern in eckigen Klammern beziehen sich auf das Verzeichnis am Schluß des Aufsatzes.

Satz Ia. Es sei $0 < \varrho < 1$

(i) $$\left| \omega^{1-\varrho} e^{-\omega} \int_0^\omega e^u dA(u) \right| \leqq \theta \text{ endlich für } \omega \to \infty ,$$

(ii) $$s^{\varrho-1}\big(f(s) - f(0)\big) = \Psi(s) \text{ stetig für } |t| \leqq T ,\ 0 \leqq \sigma ,$$

(iii) $$t^{-\varrho}\big(\Psi(it) - \Psi(0)\big) \text{ stetig für } |t| \leqq T ,$$

dann ist
$$A(\omega) - f(0) \to 0 \text{ für } \omega \to \infty .$$

Satz Ib. Wenn zu den Voraussetzungen (i), (ii) von Satz Ia hinzukommt

(iii) $\Psi(it)$ ist für $|t| \leqq T$ von beschränkter Schwankung,

dann ist
$$A(\omega) - f(0) = O(\omega^{\varrho-1}) \text{ für } \omega_0 < \omega .$$

Satz Ic. Wenn in Voraussetzung (i) von Satz Ia $\theta = \varepsilon > 0$ beliebig klein ist, wenn ferner (ii) von Ia besteht und

(iii) $t^{-\varrho}\big(\Psi(it) - \Psi(0)\big)$ für $|t| \leqq T$ von beschränkter Schwankung ist,

dann ist
$$A(\omega) - f(0) = \big(\Omega + o(1)\big)\, \omega^{\varrho-1} \text{ für } \omega \to \infty .$$

Voraussetzung (i) hat zur Folge, daß (3) für $\sigma > 0$ konvergiert, wodurch $f(s)$ in dieser Halbebene definiert ist. Wenn in Aussagen Zeichen benutzt werden, die Werte von $f(s)$ auf der Konvergenzgeraden bedeuten, so soll damit gemeint sein, daß es möglich ist, derart Werte auf $\sigma = 0$ zu adjungieren, daß die Aussagen wahr sind.

Die nachfolgenden Erörterungen gelten für (3) und die Voraussetzung, daß $A(u)$ in jedem endlichen Intervall $(0, \omega)$ von beschränkter Schwankung ist; ferner sollen dieselben Konventionen gelten, wie für die Reihe (1).

Zu den Voraussetzungen der Sätze I hat mich das Beispiel veranlaßt, auf das in § 3 Satz Ic angewendet wird. Es ergibt, daß die Dirichletsche Reihe von
$$\zeta^{\varrho}(s) - \Gamma^{-1}(\varrho) \sum_{2}^{\infty} n^{-s} \lg^{\varrho-1} n ,\quad 0 < \varrho < 1 ,$$

für $s = 1$ konvergiert, samt einer Aussage über den Reihenrest.

Die Überlegungen des vorliegenden Aufsatzes schließen an Inghams Theorem I an. Man kann in analoger Art sein Theorem II, [1] pag. 464, verfeinern. Wie Ingham erwähnt, ist dies Theorem II identisch mit einem Satze von Heilbronn und Landau. Letzterem folgend hat Landau [4] den Primzahlsatz $\psi(x) \sim x$ bewiesen. Man kann daher diesen Landauschen Beweis in [4] erweitern und dadurch einen genaueren asymptotischen Ausdruck für $\psi(x) - x$ gewinnen. Wie weit man dabei kommt, hängt davon ab, wie genau man imstande ist, das Integral (vgl. [4] S. 519, Zeile 4 v. o.)

$$\int_{-T}^{+T} \Phi(1+it)\,\{1-|t|\,T^{-1}\}\,e^{\omega t i}dt\,,\quad \Phi(s) = s^{-1}\left\{-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \frac{s-1}{s}\right\}$$

abzuschätzen bezüglich ω, T. (Dies Integral entspricht bei Theorem II dem Integral J_8 hier § 2.) Verwendet man hierzu die genaueste bisher bekannte Abschätzung für $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$, so führt Landaus Beweis [4] zum genauesten bisher bekannten asymptotischen Ausdruck für $\psi(x)$. (Vergleiche Ingham, The distribution of Prime Numbers. Cambridge Tracts in Math. and Math. Physics. No. 30 (1932); Chap. III. § 12, 13. pag. 65, 66.)

I.

Lemma 1. Wenn

$$\begin{aligned} k(x) &= -\tfrac{4}{3}(1-2\,|x|)^3 + \tfrac{8}{3}(1-|x|)^3 && (|x| \leqq \tfrac{1}{2}) \\ &= \tfrac{8}{3}(1-|x|)^3 && (\tfrac{1}{2} \leqq |x| \leqq 1), \end{aligned}$$

dann ist

$$K(y) = \int_{-1}^{+1} k(x)\,e^{-yxi}dx = 2\int_0^1 k(x)\cos yx\,dx = \left(\frac{\sin\frac{1}{4}y}{\frac{1}{4}y}\right)^4 \geqq 0$$

für alle reellen y (wobei Gleichheit nur an isolierten Stellen vorkommen kann) und es sind

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} K(y)\,dy$$

$$K' = \int_{-\infty}^{+\infty} |y|\,K(y)\,dy \tag{4}$$

konvergent und

$$K' < 6K.$$

Der Beweis ist ausgeführt von Ingham [1] pag. 466.

Lemma 2. Es sei (3) konvergent für $\sigma > \alpha \geqq 0$; es werde, analog Ingham pag. 467, bezeichnet

$$k_T(t) = k\left(\frac{t}{T}\right), \quad K_T(y) = \int_{-T}^{+T} k_T(t)\, e^{-yti}\, dt = TK(yT)$$

$$\Phi(s) = \frac{f(s)}{s} - \frac{A}{s-\alpha}, \quad R(u) = A(u)\, e^{-u\alpha} - A,$$

A eine Konstante; dann besteht die Formel

$$\int_{-T}^{+T} \Phi(s)\, k_T(t)\, e^{\omega ti}\, dt = \int_0^\infty R(u)\, K_T(u-\omega)\, e^{-u\sigma} du \quad (\sigma > \alpha). \tag{5}$$

Ingham beweist sie, indem

$$\frac{f(s)}{s} = \int_0^\infty A(u)\, e^{-us} du, \quad \sigma > \alpha$$

mit $k_T(t)\, e^{\omega ti}$ multipliziert und nach t von $-T$ bis $+T$ integriert wird. Von der entstehenden Formel wird diejenige subtrahiert, die aus ihr für den speziellen Fall

$$A(0) = 0, \; A(u) = A\, e^{u\alpha} (u > 0), \quad \frac{f(s)}{s} = \frac{A}{s-\alpha}$$

hervorgeht.

Ich benutze hier (5) für $\alpha = 0$, $A = f(0)$,

$$\frac{f(s) - f(0)}{s^{1-\varrho}} = \Psi(s), \quad 0 < \varrho < 1;$$

dann lautet die Formel

$$\int_{-T}^{+T} \Psi(s)\, s^{-\varrho}\, k_T(t)\, e^{\omega ti}\, dt = \int_0^\infty R(u)\, K_T(u-\omega)\, e^{-u\sigma} du. \tag{6}$$

Zum Beweise der Sätze I bedarf man folgender Approximationen:

A. Setzt man voraus $\alpha = 0$ und bezeichnet

$$B(\omega) = \int_0^\omega e^u dA(u)$$

so ist

$$R(\omega') - R(\omega) = \int_\omega^{\omega'} dA(u) = \int_\omega^{\omega'} e^{-u} dB(u)$$

$$= e^{-u} B(u) \Big|_\omega^{\omega'} + \int_\omega^{\omega'} e^{-u} B(u)\, du.$$

Auf Grund von Voraussetzung (i) Satz I, gibt es zu jedem $0 < \varepsilon$ ein ω_0, so daß

$$| \omega^{1-\varrho} e^{-\omega} \int_0^{\omega} e^u \, dA(u) | \leqq \theta + \varepsilon \qquad \text{für} \quad \omega_0 < \omega \, .$$

Somit

$$| R(\omega') - R(\omega) | \leqq \{ 2(\theta + \varepsilon) + | \omega' - \omega | (\theta + \varepsilon) \} \omega^{\varrho - 1} \tag{7}$$

für

$$\omega, \omega' > \omega_0 = \omega_0(\varepsilon) \, .$$

Speziell und weniger genau ist

$$R(u) = O(u) \text{ für } u \to \infty \, . \tag{8}$$

B. Es ist $(0 < \varrho < 1)$ für $\sigma \to +0 \; (i.e. \alpha + 0)$

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \to +0} \int_{-T}^{+T} \frac{\Psi(\sigma + it)}{(\sigma + it)^{\varrho}} k_T(t) \, e^{\omega t i} dt &= \lim J_1 \\ &= \int_{-T}^{+T} \Psi(it) \, (it)^{-\varrho} k_T(t) \, e^{\omega t i} dt \, . \end{aligned} \tag{9}$$

Zur Abkürzung sei $s^{-\varrho} \Psi(s) = g(s)$, $k_T(t) \, e^{\omega t i} = h(t)$; dann hat man

$$\begin{aligned} J_1 = \left\{ \int_{-T}^{-\sigma} + \int_{\sigma}^{+T} \right\} \big(g(s) - g(it)\big) \, h(t) \, dt &+ \left\{ \int_{-T}^{-\sigma} + \int_{\sigma}^{T} \right\} g(it) \, h(t) \, dt \\ &+ \int_{-\sigma}^{+\sigma} g(s) \, h(t) \, dt \\ = J_2 + J_3 \qquad\qquad &+ J_4 + J_5 \, . \end{aligned}$$

Das Maximum von $\Psi(\sigma + it) \, h(t)$ für $|t| \leqq \sigma$, $0 \leqq \sigma \leqq d$, sei mit M_1 bezeichnet; dann ist

$$| J_5 | \leqq M_1 \int_{-\sigma}^{+\sigma} | \sigma + it |^{-\varrho} dt \leqq M_1 \sigma^{1-\varrho} \int_{-1/4\pi}^{+1/4\pi} \cos^{\varrho - 2} \varphi \, d\varphi$$

also

$$J_5 \to 0 \quad \text{für} \quad \sigma \to +0 \, .$$

$$J_2 = \int_{-T}^{-\sigma} [\Psi(\sigma+it) - \Psi(it)]\,(\sigma+it)^{-\varrho} h(t)\,dt$$

$$+ \int_{-T}^{-\sigma} \Psi(it)\,[(\sigma+it)^{-\varrho} - (it)^{-\varrho}]\,h(t)\,dt \;=\; J_6 + J_7\,.$$

$\Psi(\sigma+it)$ ist für $|t| \leqq T$, $0 \leqq \sigma \leqq d$ stetig; also gibt es zu jedem $0 < \varepsilon$ ein $0 < \sigma_1$ so, daß

$$|\Psi(\sigma+it) - \Psi(it)| < \varepsilon \text{ für } |t| \leqq T\,,\; 0 \leqq \sigma < \sigma_1\,.$$

Das Maximum von $h(t)$ für $|t| \leqq T$ sei M_2. Dann ist

$$|J_6| \leqq \varepsilon M_2 \int_{-T}^{-\sigma} |\sigma+it|^{-\varrho} dt \leqq \varepsilon M_2 \int_{\sigma}^{T} t^{-\varrho} dt\;;$$

folglich $J_6 \to 0$ für $\sigma \to +0$.

Das Integral von $-\varrho\, z^{-1-\varrho}$, geradlinig von it bis $\sigma+it$, liefert

$$|(\sigma+it)^{-\varrho} - (it)^{-\varrho}| \leqq \varrho\,\sigma\,|t|^{-1-\varrho}$$

und somit

$$|J_7| \leqq \varrho\,\sigma M_1 \int_{\sigma}^{T} t^{-1-\varrho} dt \leqq M_1 \sigma^{1-\varrho}\;;$$

folglich $J_7 \to 0$ für $\sigma \to +0$. Somit ist $J_2 \to 0$ und ebenso $J_3 \to 0$ für $\sigma \to +0$. Zusammengenommen hat man $\lim J_1 = \lim J_4$ für $\sigma \to +0$ und dies ist die Behauptung (9).

Lemma 3. (Es ist $\alpha = 0$).

1. Wenn $t^{-\varrho}(\Psi(it) - \Psi(0)$ für $|t| \leqq T$ stetig ist, dann ist

$$\int_{-T}^{+T} \Psi(it)\,(it)^{-\varrho}\, k_T(t)\, e^{\omega t i}\, dt = J_8 \to 0 \text{ für } \omega \to \infty\,. \tag{10}$$

2. Wenn $\Psi(it)$ für $|t| \leqq T$ von beschränkter Schwankung ist, dann ist

$$\int_{-T}^{+T} \Psi(it)\,(it)^{\varrho}\, k_T(t)\, e^{\omega t i} dt = J_8 = \Omega(\omega)\,\omega^{\varrho-1} \tag{11}$$

   wo $\Omega(\omega)$ beschränkt ist für $\omega \to \infty$.

3. Wenn $t^{-\varrho}(\Psi(it) - \Psi(0))$ für $|t| \leqq T$ von beschränkter Schwankung ist, dann ist in (11)

$$\Omega(\omega) = \Omega + o(1) \quad \text{für } \omega \to \infty\,,$$

   wo Ω eine Konstante ist.

Man hat

$$J_8 = \int_{-T}^{+T} [\Psi(it) - \Psi(0)]\ (it)^{-\varrho} k_T(t)\ e^{\omega t i} dt$$

$$+ \Psi(0) \int_{-T}^{+T} [k_T(t) - k(0)]\ (it)^{-\varrho} e^{\omega t i} dt$$

$$+ \Psi(0)\ k(0) \int_{-T}^{+T} (it)^{-\varrho} e^{\omega t i} dt \quad = \quad J_9 + J_{10} + J_{11} \ .$$

Hier ist

$$J_{11} = \omega^{\varrho-1} \left(\Omega + o(1)\right) \quad \text{für} \quad \omega \to \infty \ , \tag{12}$$

da das Integral $\int_0^\infty e^{xi} x^{-\varrho} dx$, $0 < \varrho < 1$ konvergent ist.

In J_{10} ist

$$[k_T(t) - k(0)]\ t^{-\varrho} = t^{1-\varrho} T^{-1} g_1\left(\frac{t}{T}\right) \quad \text{in } |t| \leqq T$$

von beschränkter Schwankung, da $g_1(t)$ in $|t| \leqq 1$ von beschränkter Schwankung ist. Folglich ist

$$J_{10} = O(\omega^{-1}) \ \text{für} \ \omega \to \infty \ . \tag{13}$$

Unter der Voraussetzung 1 des Lemmas ist J_9 Fourierkonstante einer stetigen Funktion, also $J_9 \to 0$ für $\omega \to \infty$. Dies, (12) und (13) beweisen (10).

Wenn die Voraussetzung 2 erfüllt ist, so ist $J_9 = O(\omega^{\varrho-1})$ woraus mit (12) und (13) sich (11) ergibt.

Die Voraussetzung 3 hat endlich $J_9 = O(\omega^{-1})$ zur Folge, womit alle Teile des Lemmas bewiesen sind.

Die hier benutzten Aussagen über die Größenordnung eines trigonometrischen Integrals findet man in § 3 in S. Bochner, Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leipzig 1932.

II.

Beweis von Satz I. Geht man in (6) zur Grenze $\sigma \to +0$ (i.e. $\alpha + 0$) über, so folgt wegen (9)

$$\begin{aligned} J_8 &= \int_{-T}^{+T} \Psi(it)\ (it)^{-\varrho} k_T(t)\ e^{\omega t i} dt = \int_0^\infty R(u)\, K_T(u - \omega)\, du \\ &= \int_{-T\omega}^{\infty} R(\omega + y T^{-1})\, K(y)\, dy \ , \end{aligned} \tag{14}$$

da das dritte und daher auch das zweite Integral wegen (8) und (4) absolut konvergieren.

Definiert man $R(u) = 0$ für $u < 0$, so ergibt (14)

$$
\begin{aligned}
R(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} K(y)\, dy &= R(\omega)\, K \\
= \int_{-\infty}^{+\infty} \{R(\omega) - R(\omega + yT^{-1})\}\, K(y)\, dy &+ J_8 = J_{12} + J_8
\end{aligned}
\tag{15}
$$

und das ist die Gleichung, die Ingham pag. 468, Zeile 11 v. u. auf dieselbe Weise ableitet; hier wird der Grenzübergang $\omega \to \infty$ ausgeführt.

$$J_{12} = \int_{-\infty}^{-1/2\,T\omega} + \int_{-1/2\,T\omega}^{+\infty} = J_{13} + J_{14}\,.$$

In J_{13} ist $\omega \leqq 2\,|y|T^{-1}$ und $\omega + yT^{-1} \leqq \frac{1}{2}\omega \leqq |y|T^{-1}$.

Somit $|J_{13}| \leqq C_1 T^{-1} \int_{1/2\,T\omega}^{\infty} |y|^{-3} dy \leqq 2\,C_1 T^{-3}\omega^{-2}$.

In J_{14} ist $\omega + yT^{-1} \geqq \frac{1}{2}\omega$. Wenn daher $2\omega_0 < \omega$, so ergibt (7)

$$
\begin{aligned}
|J_{14}| &\leqq \int_{-1/2\,T\omega}^{\infty} (\theta + \varepsilon)\, \{2 + |y|\, T^{-1}\}\, \omega^{\varrho-1} K(y)\, dy \\
&\leqq (\theta + \varepsilon)\, \omega^{\varrho-1} \{2K + T^{-1} K'\} \leqq (\theta + \varepsilon)\, \omega^{\varrho-1} K (2 + 6T^{-1})\,.
\end{aligned}
$$

Also ist

$$|J_{12}| \leqq \omega^{\varrho-1} \{(\theta + \varepsilon)\, C_2 + C_3\, \omega^{-1-\varrho}\}\,. \tag{16}$$

Dies, (10) und $K > 0$ in (15) verwendet, geben

$$R(\omega) \to 0 \quad \text{für} \quad \omega \to \infty\,,$$

womit Ia bewiesen ist.

Benutzt man in (15) die Abschätzungen (16), (11) und $K > 0$, so folgt Satz Ib.

Berücksichtigt man schließlich in (16) die engere Voraussetzung $\theta = \varepsilon$, benutzt die Aussage 3 von Lemma 3 und $K > 0$, so erhält man aus (15) Satz Ic.

III.

Bezeichnet man $\zeta^\varrho(s) = \sum_1^\infty \alpha(\varrho, n)\, n^{-s}$, $f_\varrho(s) = \sum_2^\infty n^{-s} \lg^{\varrho-1} n$, so gilt

Satz II. Die Dirichletsche Reihe der Funktion

$$\zeta^\varrho(s) - \Gamma^{-1}(\varrho)\, f_\varrho(s) = f(s) = \sum_1^\infty a_n n^{-s}\ (0 < \varrho < 1)$$

ist an der Stelle $s = 1$ konvergent und, für $x \to \infty$

$$\sum_1^x \alpha(\varrho, n)\, n^{-1} = \Gamma^{-1}(\varrho + 1) \lg^\varrho x + (\Omega + o(1)) \lg^{\varrho-1} x\,, \tag{17}$$

wo Ω eine Konstante ist.

Beweis. Es ist (vgl. A. Kienast [2, 3]) für $0 < \varrho$ und $x \to \infty$

$$\sum_1^x \alpha(\varrho, n)\, n^{-1} \sim \Gamma^{-1}(\varrho + 1) \lg^\varrho x$$

was aus dem Satze von G. H. Hardy und J. E. Littlewood über Reihen mit positiven Termen, z. B. Acta Math. 41 (1918), Lemma 2. 113, p. 128, folgt und

$$\sum_1^x \alpha(\varrho, n) \sim \Gamma^{-1}(\varrho)\, x \lg^{\varrho-1} x\,.$$

Daher ist

$$\sum_1^x a_n = \sum_1^x \alpha(\varrho, n) - \Gamma^{-1}(\varrho) \sum_2^x \lg^{\varrho-1} n = o(x \lg^{\varrho-1} x)\,;$$

dies ist Voraussetzung (i) von Satz I und $\theta = \varepsilon$ beliebig klein. Weiter ist

$$\begin{aligned}(s-1)^\varrho \zeta^\varrho(s) &= (1 + E(s-1) - E_1(s-1)^2 + \cdots)^\varrho \\ &= 1 + d_1(s-1) + d_2(s-1)^2 + \cdots\,;\end{aligned}$$

letzteres ist eine Potenzreihe, deren Konvergenzradius von 0 verschieden ist.

K. Knopp berechnet Acta Math. 34 (1911), S. 180—1,

$$\begin{aligned}f_\varrho(s) &= \Gamma(\varrho)\,(s-1)^{-\varrho} - \int_1^2 u^{-s} \lg^{\varrho-1} u\, du \\ &\quad + \sum_2^\infty \Big\{n^{-s} \lg^{\varrho-1} n - \int_n^{n+1} u^{-s} \lg^{\varrho-1} u\, du\Big\} \\ &= \Gamma(\varrho)\,\{(s-1)^{-\varrho} + h_0 + h_1(s-1) + \cdots\}\,.\end{aligned}$$

$f_\varrho(s)$ ist für $0 < R(\varrho)$, abgesehen vom ersten Term $(s-1)^{-\varrho}$, durch eine für $0 < \sigma$ konvergierende Reihe dargestellt, die in eine Potenzreihe von $s-1$ umgesetzt werden kann, die mindestens für $|s-1| < 1$ konvergiert. Aus beiden Darstellungen folgt

$$f(s) = (s-1)^{1-\varrho}\,[d_1 + d_2(s-1) + \cdots] - h_0 - h_1(s-1) - \cdots .$$

Die Eulersche Formel ergibt

$$\sum_2^x n^{-1} \lg^{\varrho-1} n = \varrho^{-1} \lg^\varrho x + E_{\varrho-1} + O(x^{-1} \lg^{\varrho-1} x) \tag{18}$$

und es ist

$$f(1) = -h_0 = -E_{\varrho-1} .$$

Jetzt kann man feststellen, daß die Voraussetzungen von Satz Ic erfüllt sind; es ist

$$(f(s) - f(1))\,(s-1)^{\varrho-1} = \Psi(s)$$
$$= d_1 + d_2(s-1) + \cdots - (s-1)^\varrho\,[h_1 + h_2(s-1) + \cdots] ;$$

die Dirichletschen Reihen für $\zeta^\varrho(1+it)$, $-1 < \varrho < 1$, (vgl. [3] § 3) und für $f_\varrho(1+it)$, also diejenige für $f(1+it)$, konvergieren gleichmäßig für $0 < \varepsilon \leqq |t| \leqq T$. Somit folgt Voraussetzung (ii);

$$(\Psi(s) - \Psi(1))\,(s-1)^{-\varrho}$$
$$= (s-1)^{1-\varrho}\,[d_2 + d_3(s-1) + \cdots] - h_1 - h_2(s-1) - \cdots ;$$

somit ist (iii) erfüllt.

Nach Satz Ic ist daher

$$1 + \sum_2^x [\alpha(\varrho, n) - \Gamma^{-1}(\varrho) \lg^{\varrho-1} n]\, n^{-1} = f(1) + (\Omega + o(1)) \lg^{\varrho-1} x ,$$

wobei Ω eine Konstante ist.

Verwendet man hierin (18), so erhält man (17), womit Satz II bewiesen ist.

Während der Satz von Hardy und Littlewood das erste Glied der asymptotischen Darstellung (17) liefert, führt Satz Ic zum zweiten Term. Die rechte Seite von (17) bildet den Anfang einer Reihe, die nach absteigenden Potenzen von $\log x$ mit ganzzahligen Exponentendifferenzen fortschreitet und besitzt damit die Form, die für analoge Ausdrücke bei den Reihen ζ^{-1} und $\zeta^{-1}\zeta'$ bekannt ist. Ich habe Sätze

Ib und c getrennt aufgeführt, um die Eigenschaften ersichtlich zu machen, durch deren Zusammenwirken das Resultat dieses Beispiels entsteht.

Ergebnisse analog zu Satz II für $1 < \varrho$ kann man durch analoges Verfahren ableiten.

(Eingegangen den 12. November 1936.)

1. *A. E. Ingham*, On Wiener's Method in Tauberian Theorems. Proc. London Math. Soc. (2), 38 (1935), 458—480.

2. *A. Kienast*, Über die Dirichletsche Reihe für ζ^{ϱ}. Verhandl. Intern. Math.-Kongreß Zürich 1932. II, 141—2.

3. „ Über die Dirichletschen Reihen für ζ^{ϱ}, L^{ϱ}. Comment. Math. Helv., 8 (1936), 359—370.

4. *E. Landau*, Über den Wienerschen neuen Weg zum Primzahlsatz. Sitz. ber. Preuß. Akad. Wiss. Berlin 1932, 514—521.

5. *M. Riesz*, Sur les séries de Dirichlet, C. R. Paris, 148 (1909), 1658—60.

6. „ Ein Konvergenzsatz für Dirichletsche Reihen. Acta Math. 40 (1916), 349—361.

7. „ Über die Summierbarkeit durch typische Mittel. Acta Lit. ac. Scient. Univ. Hung. 2 (1924), 18—31.