Sulle trasformazioni funzionali lineari commutabili con la derivazione.

Autor(en): **Tricomi, Francesco**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **8 (1935-1936)**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-9287

Sulle trasformazioni funzionali lineari commutabili con la derivazione

Per FRANCESCO TRICOMI, Torino

1. La trasformazione di Laplace[1]) deve, com'è ben noto, la sua importanza principalmente al fatto che essa muta la derivazione in un'operazione assai più elementare: la moltiplicazione per la variabile indipendente. Essa è pertanto atta a semplificare in modo essenziale importanti classi di equazioni differenziali; p. es. un'equazione alle derivate parziali in due variabili indipendenti a coefficienti costanti, viene mutata in una equazione differenziale *ordinaria*, ecc.

Anche altri tipi di trasformazioni funzionali lineari possono però trovare utili applicazioni in Analisi, e specie nella teoria delle equazioni differenziali lineari, p. es. le trasformazioni *commutabili con la derivazione*, cioè le trasformazioni $\mathfrak{T}$ tali che da

$$f(s) = \mathfrak{T}[F(t)] \tag{1}$$

segua necessariamente

$$f'(s) = \mathfrak{T}[F'(t)] \tag{2}$$

dove gli apici denotano derivazioni rapporto ai rispettivi argomenti. Tali trasformazioni, già implicitamente considerate da *Appell*[2]) fin dal 1880, sono state più tardi esplicitamente studiate da *Pincherle*[3]) ma da un punto di vista molto astratto e prevalentemente formale, che verosimilmente è stata la causa dell'ingiusta dimenticanza in cui son presto cadute tali, pur pregevoli, ricerche.

Naturalmente dette trasformazioni non servono, in generale, per „semplificare" date equazioni differenziali chè, per esempio, un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti resta manifestamente inal-

---

[1]) Per la trasformazione di Laplace e qualche considerazione generale sulle trasformazioni funzionali, v. la mia Conferenza: Sulla trasformazione di Laplace, tenuta al Seminario Matematico e Fisico di Torino l'11-4-35, ch'è pure pubblicata nel „Periodico di Matematiche" (4) 15 (1935) pp. 238—250.

[2]) Sur une classe de polynomes. „Annales Ecole Norm. Sup." (2) 9 (1880) pp. 119—144. (V. spec. le § 12).

[3]) Sulle operazioni distributive commutabili ecc. . . „Atti Acc. Scienze Torino" 30 (1895) pp. 820—844; v. pure il libro di *Pincherle* e *Amaldi*, Le operazioni distributive ecc. . . (Bologna, Zanichelli, 1901) Cap. VII.

terata, ma potranno talvolta fornire utili contributi allo studio delle loro soluzioni; p. es. sfruttando la circostanza che, nel caso ora indicato, queste non potranno che venir mutate l'una nell'altra dalle trasformazioni in parola. A convincere di ciò mi lusingo possa contribuire la presente Nota in cui, riprendendo lo studio delle trasformazioni commutabili dal punto di vista moderno della rappresentazione mediante integrali definiti, mostrerò qualche loro concreta applicazione, e specialmente di una di queste che, per la sua immediata connessione con l'esponenziale gaussiano delle probabilità, proporrei venga chiamata *trasformazione di Gauss*.

2. Le trasformazioni funzionali *lineari*, val'a dire distributive rispetto alla somma, possono notoriamente rappresentarsi mediante un integrale di Stieltjes che, nella maggior parte dei casi, si riduce immediatamente ad un integrale ordinario; propriamente si può, in tali casi, porre

$$f(s) = \int_a^b K(s,t)F(t)\,dt, \tag{3}$$

dove a e b denotano due date costanti e K una funzione di s e t, detta ordinariamente „nucleo"[4]). In particolare le trasformazioni lineari commutabili con la derivazione, che Pincherle caratterizzava come quelle il cui sviluppo formale secondo le potenze del simbolo di derivazione D è a coefficienti costanti, possono anche — forse più utilmente — caratterizzarsi come *quelle il cui nucleo è una funzione della differenza* $s-t$[5]).

Infatti dalla (3), con una derivazione sotto il segno e un'integrazione per parti, sotto condizioni meramente qualitative pel nucleo K e la funzione F, si ha

$$f'(s) - \int_a^b K(s,t)\,F'(t)\,dt = \int_a^b [K'_s(s,t) + K'_t(s,t)]F(t)\,dt - [K(s,t)\,F(t)]_{t=a}^{t=b}$$

epperò affinchè la (2) valga *almeno essenzialmente*, cioè a prescindere

---

[4]) V. p. es. la mia Conferenza precedentemente citata.

[5]) Un accenno di ciò trovasi nell'Articolo di *Pincherle*, Equations et opérations fonctionnelles, nella „Encyclopédie des sc. math." (éd. franç.) T. II—5, art. 26 (1912), v. pg. 42. Delle trasformazioni del tipo (3) con nucleo funzione della differenza $s-t$, sono inoltre considerate in una Memoria di *Weierstrass* (Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen reeller Argumente, Werke, 3, 1—37) che dovremo ricordare anche più avanti. W. però non si preoccupa di studiare queste trasformazioni *in sè*, bensì le funzioni da esse generate, e non ha così occasione di accorgersi della fondamentale proprietà della commutabilità con la derivazione.

Ultimamente anche *G. Schulz* (Umkehrung von Integraltransformationen, Z. f. angew. Math. 14 [1934], pp. 373—374) ha considerate trasformazioni del tipo in discorso, accennando alla loro importanza in svariati problemi di Fisica-Matematica e proponendo un metodo per la loro inversione numerica nel caso di funzioni periodiche.

(eventualmente) da termini dipendenti solo da $F(a)$ ed $F(b)$, dovrà essere

$$K'_s(s, t) + K'_t(s, t) = 0$$

il che implica appunto che K dipenda soltanto dalla differenza $s-t$, e non da s e t separatamente.

Quanto al cammino d'integrazione e ai suoi estremi a e b, nella più parte dei casi ci si può limitare ad assumere come tale *un'intera retta del piano complesso* t. Oppure si può, con qualche vantaggio formale, integrare costantemente lungo l'asse reale, da $-\infty$ a $+\infty$, a patto di sostituire in luogo di t il binomio $\varkappa + \lambda t$, essendo $\varkappa$ e λ due date costanti non necessariamente reali: È quello che faremo generalmente in questo scritto, in cui si considereranno dunque trasformazioni funzionali del tipo:

$$\boxed{f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} N(s - \varkappa - \lambda t)\, F(\varkappa + \lambda t)\, dt = \mathfrak{T}[F(t)]} \tag{4}$$

essendo N una data funzione di una sola variabile.

È ben facile ma non inutile verificare che *le trasformazioni del tipo* (4) *sono effettivamente commutabili con la derivazione*, a patto che le funzioni F che si considerano siano dotate di derivate prime continue e che esista la trasformata di F', anzi che l'integrale analogo a quello che figura nella (4) ma operante sulla funzione $F'(\varkappa + \lambda t + x)$ sia *uniformemente* convergente, rispetto ad x, nell'intorno di $x = 0$.

Infatti, supposto dato ad s un incremento della forma $h = \lambda h_1$, con h_1 reale, eseguendo la sostituzione $t = t_1 + h_1$ si avrà

$$f(s + h) = \int_{-\infty}^{+\infty} N(s - \varkappa - \lambda t_1)\, F(\varkappa + \lambda t_1 + h)\, dt_1$$

donde, tornando a scrivere t in luogo di t_1, sottraendo la (4) e dividendo per h, segue:

$$\frac{f(s+h) - f(s)}{h} = \int_{-\infty}^{+\infty} N(s - \varkappa - \lambda t)\, \frac{F(\varkappa + \lambda t + h) - F(\varkappa + \lambda t)}{h}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} N(s - \varkappa - \lambda t)\, F'(\varkappa + \lambda t + x)\, dt$$

con $x = \theta h$, $0 < \theta < 1$. Ma, nelle ipotesi in cui ci siamo messi, il limite per $h \to 0$ dell'ultimo integrale è uguale all'integrale del limite; dunque passando al limite per $h \to 0$, viene $f'(s) = \mathfrak{T}[F'(t)]$, come volevasi dimostrare.

3. Val la pena di verificare ulteriormente, appoggiandovi sulla (4), il fatto noto che le trasformazioni di cui ci occupiamo, *formano gruppo*, onde ricavare la semplice formula che, sotto una condizione più appresso specificata, dà la legge di composizione delle funzioni nucleari N.

All'uopo supponiamo date le due trasformazioni commutabili

$$\mathfrak{T}_1[F(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} N_1(s-\varkappa_1-\lambda_1 t) F(\varkappa_1+\lambda_1 t)\, dt\,, \quad \mathfrak{T}_2[F(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} N_2(s-\varkappa_2-\lambda_2 t) F(\varkappa_2+\lambda_2 t)\, dt$$

e, supposto esistenti gli integrali che dovremo considerare, formiamoci la sostituzione-prodotto $\mathfrak{T}_2\, \mathfrak{T}_1$, intesa come risultato dell'applicazione della $\mathfrak{T}_1$ *prima* e della $\mathfrak{T}_2$ *dopo*, avremo così:

$$\mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_1[F(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} N_2(s-\varkappa_2-\lambda_2\tau)\, d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} N_1(\varkappa_2+\lambda_2\tau-\varkappa_1-\lambda_1 t) F(\varkappa_1+\lambda_1 t)\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F(\varkappa_1+\lambda_1 t)\, dt \int_{-\infty}^{+\infty} N_1(\varkappa_2+\lambda_2\tau-\varkappa_1-\lambda_1 t)\, N_2(s-\varkappa_2-\lambda_2\tau)\, d\tau$$

cioè

$$\mathfrak{T}_2\, \mathfrak{T}_1\, [F(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} K^*(s, t)\, F(\varkappa_1+\lambda_1 t)\, dt, \tag{5}$$

avendo posto per un momento

$$K^*(s, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} N_1(\varkappa_2+\lambda_2\tau-\varkappa_1-\lambda_1 t)\, N_2(s-\varkappa_2-\lambda_2\tau)\, d\tau\,.$$

Eseguiamo ora, nell'ultimo integrale, la sostituzione

$$s-\varkappa_2-\lambda_2\tau = \xi \tag{6}$$

ponendo nel contempo

$$s-\varkappa_1-\lambda_1 t = x$$

il che implica

$$x-\xi = \varkappa_2+\lambda_2\tau-\varkappa_1-\lambda_1 t;$$

avremo così

$$K^* = \frac{1}{\lambda_2}\int_{r_s} N_1(x-\xi)\, N_2(\xi)\, d\xi$$

avendo indicato con r_s la retta del piano complesso ξ luogo dei punti (6) al variare di τ, per valori reali, da $+\infty$ a $-\infty$. La formula ottenuta mostra che, *se l'ultimo integrale non si altera quando, variando s, la retta r_s si sposta parallelamente a se stessa nel piano ξ* [6]), il nucleo K^* è, com'era da prevedersi, una funzione soltanto del trinomio $x = s - \varkappa_1 - \lambda_1 t$. Pertanto, detta N^* questa funzione, posto cioè

$$\boxed{N^*(x) = \frac{1}{\lambda_2} \int_{r_s} N_1(x-\xi)\, N_2(\xi)\, d\xi\,,} \tag{7}$$

in virtù della (5), il prodotto delle due trasformazioni date $\mathfrak{T}_1$ e $\mathfrak{T}_2$ prese in quest'ordine, coincide con la trasformazione-capostipite (4) in cui sia posto $N = N^*$, $\varkappa = \varkappa_1$, $\lambda = \lambda_1$.

4. La proprietà fondamentale (1) $\rightarrow$ (2) delle trasformazioni commutabili implica che se si opera con una di queste — diciamola $\mathfrak{T}$ — sulle funzioni $F_0(t)$, $F_1(t)$, $F_2(t)$, ... di un sistema tale che la derivata di ogni sua funzione sia esprimibile come una combinazione lineare a coefficienti costanti di funzioni del sistema stesso — come per es. succede nel caso dei due sistemi $1, t, t^2, t^3, \ldots$ e $1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots$ — anche le funzioni $f_0(s)$, $f_1(s)$, $f_2(s)$, ... del sistema trasformato, dovranno ammettere la medesima „*regola di derivazione*". In particolare se si trasformano per mezzo della $\mathfrak{T}$ le successive potenze $1, t, t^2, t^3, \ldots$, si otterranno certi polinomi π_0, $\pi_1(s)$, $\pi_2(s)$ ..., di gradi uguali ai rispettivi indici, che ammettono la stessa regola di derivazione delle potenze, cioè sono tali da aversi

$$\boxed{\pi_n'(s) = n\, \pi_{n-1}(s)\,.} \tag{8}$$

Questi polinomi diconsi *di Appell* [7]) e possono, dal nostro punto di vista definirsi, mediante la formula:

---

[6]) La condizione in parola è certo verificata se le funzioni N_1 ed N_2 sono, come spesso succede, *funzioni analitiche intere*; caso a cui, nel seguito, intenderemo particolarmente riferirci.

[7]) Questa denominazione è di *Pincherle* e *Amaldi* (*Op. cit.* [3], pg. 130). I polinomi in discorso furono invero considerati per la prima volta da *Appell*, nella Memoria cit. (2), prendendo come punto di partenza l'equazione (8). In tale Mem. l'A. studia inoltre, astrattamente, l'operazione consistente nel sostituire, in una serie di potenze, x^n con $\pi_n(x)$, e ne fa alcune brillanti applicazioni alla teoria delle equazioni differenziali lineari. Pertanto si può dire che tale lavoro stia alle trasformazioni commutative come il metodo simbolico di Heaviside sta alla trasformazione di Laplace.

$$\pi_n(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} N(s - \varkappa - \lambda t)\,(\varkappa + \lambda t)^n\,dt, \quad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

dove N denota una funzione „*arbitraria*", formula che, ponendo $s - \varkappa - \lambda t = \xi$ diviene più semplicemente

$$\pi_n(s) = \frac{1}{\lambda}\int_{r_s} N(\xi)\,(s-\xi)^n\,d\xi = \frac{1}{\lambda}\int_{r_s} N(\xi) \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \xi^n\, s^{n-\nu}\,d\xi$$

cioè

$$\pi_n(s) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a_\nu\, s^{n-\nu}, \tag{9}$$

avendo posto

$$a_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\lambda}\int_{r_s} N(\xi)\,\xi^\nu\,d\xi, \tag{10}$$

avendo cioè indicati con a_0, a_1, a_2, ... i successivi *momenti* (in senso lato) della funzione N.

5. Un tipico esempio di polinomi soddisfacente all'equazione (8) è offerto dai *polinomi di Hermite* H_n definiti dalla formula

$$H_n(x) = (-1)^n\, e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$

donde [8]) facilmente si trae

$$H_n(x) = \sum_{r=0}^{[n/2]} (-1)^r \binom{n}{2r}\, 1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2r-1)\, x^{n-2r} \tag{11}$$

avendo indicato con $[n/2]$ il massimo intero contenuto in $n/2$. Invero si ha notoriamente

$$H_n'(x) = nH_{n-1}(x).$$

Viene pertanto spontaneo domandarsi quale sia la trasformazione commutabile che muta le potenze in polinomi di Hermite.

Per cercare di risolvere questo problema confrontiamo la (9) con la (11), si vede così che la trasformazione cercata dovrà esser tale da aversi

$$a_{2r+1} = 0\,, \quad a_{2r} = (-1)^r\, 1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2r-1)\,, \quad (r = 0, 1, 2, \cdots)\,; \tag{12}$$

[8]) Pei polinomi di Hermite v. p. es. il recente libro di *Appell* et *Kampé de Fériet*, Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynomes d'Hermite. (Paris, Gauthier-Villars, 1926.)

dovranno cioè esser tutti nulli i momenti dispari della funzione N, e quelli pari uguali, a meno del segno, ai prodotti dei successivi numeri dispari 1, 3, 5, ... Orbene una funzione che soddisfa *press'a poco* a queste condizioni è presto trovata ed è il classico esponenziale di Gauss della teoria degli errori:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi m}} e^{-\frac{x^2}{2m}}$$

dove m denota una costante positiva (ordinariamente designata con μ^2), esponenziale i cui momenti sono dati dalle ben note formule:

$$(13) \qquad M_{2r+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2m}} x^{2r+1} dx = 0\,,$$

$$M_{2r} = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2m}} x^{2r} dx = 1 \cdot 3 \cdots (2r-1)\, m^r\,;$$

essi differiscono dunque, nel caso $m = 1$, *solo pel segno* dai momenti (12).

Ne segue che ponendo nella (4) $\varkappa = 0$, $\lambda = 1$ e

$$(14) \qquad N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

o, più generalmente,

$$(14^*) \qquad N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} e^{-\frac{x^2}{2m}}$$

si genererà una trasformazione funzionale che, pur non essendo certamente quella che muta le potenze in polinomi di Hermite, non dovrà esser da essa molto lontana.

Propriamente, ricordando un'importante formula sui polinomi di Hermite [9]), già da altri e da me utilizzata per altri scopi, formula che, con lievi cambiamenti formali, può scriversi

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(s-t)^2}{2m}} H_n(t)\, dt = (\sqrt{1-m})^n H_n\left(\frac{s}{\sqrt{1-m}}\right), \quad (0 < m < 1);$$

con un passaggio al limite per $m \to 1$, si ha

[9]) *Appell* et *Kampé de Fériet*, *op. cit.* (8), pg. 351.

$$(15)\qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(s-t)^2}{2}} H_n(t)\,dt = s^m ,$$

il che mostra come la trasformazione commutabile corrispondente alla funzione N data dalla (14) non è quella che muta le potenze in polinomi di Hermite, bensì la sua *inversa.*

6. Per determinare la trasformazione di cui andiamo in cerca bisogna dunque *invertire* quella corrispondente alla funzione N data dalla (14) o, più generalmente, dalla (14*) ; trasformazione che propongo chiamare *di Gauss* e designare col simbolo $\mathfrak{G}^{(m)}$ o $\mathfrak{G}_s^{(m)}$ se occorre porre in luce la variabile indipendente [10]), si porrà cioè in generale

$$(16)\qquad \boxed{\mathfrak{G}^{(m)}[F(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(s-t)^2}{2m}} F(t)\,dt = f(s)\,,}$$

convenendo inoltre che sia $\mathfrak{G} \equiv \mathfrak{G}^{(1)}$.

Il problema suaccennato può risolversi — in certo senso assai agevolmente — riconducendolo al classico problema dell'inversione della trasformazione (bilatera) di Laplace:

$$\mathfrak{L}_{II}[\Phi(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st}\Phi(t)\,dt = \varphi(s)$$

---

[10]) La trasformazione in parola era stata da me già incontrata nella Nota: Su la rappresentazione di una legge di probabilità mediante esponenziali di Gauss e la trasformazione di Laplace. (Giorn. Ist. Italiano Attuari, 6 [1935], pp.135–140).

Essa si era, del resto, già da tempo presentata in problemi di propagazione del calore chè, ad esempio, la temperatura $\Phi(x, t)$ al tempo t e all'ascissa x di un conduttore rettilineo, indefinitamente esteso nei due versi, di conduttanza $= 1$, è data, coi nostri simboli, dalla formula

$$\Phi(x, t) = \mathfrak{G}_x^{(2t)}[\Phi(\xi, 0)]\,.$$

(Cfr. *G. Doetsch,* Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung. III. Mathem. Zeitschr. 25 [1926], pp. 608—626; v. spec. a pg. 613.)

Inoltre il punto di partenza di *Weierstrass* nel suo lavoro cit. (5) è proprio una formula sulla trasformazione $\mathfrak{G}^{(m)}$, è precisamente, coi nostri simboli, la formula

$$\lim_{m\to 0} \mathfrak{G}_s^{(m)}[F(t)] = F(s)\,,$$

che l'illustre *A.* estende, sotto certe condizioni, alle trasformazioni generali col nucleo del tipo $N\,(s—t)$.

che, a prescindere da difficoltà su cui non è il caso di qui soffermarsi[11]), viene risolto dalla nota formula:

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} e^{st} \varphi(s)\, ds, \tag{17}$$

dove $\varkappa$ è una costante (reale), entro certi limiti, arbitraria.

Infatti dalla (16), ponendo $s = -\sqrt{m}\, s_1$, $t = \sqrt{m}\, t_1$ e sviluppando il quadrato ad esponente, segue

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}s_1^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s_1 t_1 - \frac{1}{2}t_1^2} F(\sqrt{m}\, t_1)\, dt_1 = f(-\sqrt{m}\, s_1)$$

cioè

$$\sqrt{2\pi}\, e^{\frac{1}{2}s_1^2} f(-\sqrt{m}\, s_1) = \mathfrak{L}_{II}\left[e^{-\frac{1}{2}t_1^2} F(\sqrt{m}\, t_1)\right], \tag{18}$$

donde, in virtù della (17), si trae

$$e^{-\frac{1}{2}t_1^2} F(\sqrt{m}\, t_1) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} e^{s_1 t_1} e^{\frac{1}{2}s_1^2} f(-\sqrt{m}\, s_1)\, ds_1,$$

ovvero, tornando a porre s al posto di $-\sqrt{m}\, s_1$ e t al posto di $\sqrt{m}\, t_1$:

$$F(t) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi m}} \int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} e^{\frac{(s-t)^2}{2m}} f(s)\, ds.$$

Siamo così condotti alla considerazione della trasformazione „*antigauss*“:

---

[11]) Per l'inversione della trasformazione di Laplace, v. la mia Nota succitata e le altre tre (Trasformazione di Laplace e polinomi di Laguerre, Note 1ª e 2ª; Ancora sull'inversione della trasformazione di Laplace) pubblicate nei Rendiconti dell'Acc. dei Lincei (6) 21 (1935I), pp. 232—239, 332—335 e 420—426.

Dell'inversione della trasformazione qui detta di Gauss, si era già occupato *G. Doetsch* (Die Elimination des Dopplereffekts bei spektroskopischen Feinstrukturen usw., Z. f. Physik, 49 [1928], pp. 705—730) che aveva incontrata, ma non sistematicamente studiata, questa trasformazione in un problema di spettroscopia o, meglio, in un problema di teoria del calore a cui quello di spettroscopia è riconducibile. Doetsch compie l'inversione mediante un'interessantissima formula, contenente un integrale doppio reale, che ha dato origine ad una mia Nota dal titolo: Über Doetsch's Umkehrformel der Gauß-Transformation und eine neue Umkehrung der Laplace-Transformation, attualmente in corso di stampa nella Mathem. Zeitschrift.

$$(19) \qquad \overline{\mathfrak{G}}^{(m)}[F(t)] = \frac{1}{i\sqrt{2\pi m}} \int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} e^{\frac{(s-t)^2}{2m}} F(t)\, dt\,,$$

che, cambiando t in $\varkappa + it$ si riduce subito alla forma canonica (4):

$$(20) \qquad \boxed{\overline{\mathfrak{G}}^{(m)}[F(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{(s-\varkappa-it)^2}{2m}} F(\varkappa + it)\, dt;}$$

propriamente siamo del caso di

$$\lambda = i\ ,\ N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} e^{\frac{x^2}{2m}}\,.$$

Anche qui converremo che sia $\overline{\mathfrak{G}} \equiv \overline{\mathfrak{G}}^{(1)}$.

Coi simboli adottati i principali risultati raggiunti in questo e nel precedente possono essere brevemente condensati nelle seguenti formule:

$$(21) \qquad \begin{gathered} \mathfrak{G}^{(m)}[H_n(t)] = (\sqrt{1-m})^n H_n(s/\sqrt{1-m})\,,\ (0 < m < 1)\,;\ \mathfrak{G}[H_n(t)] = s^n\,; \\ \mathfrak{G}^{(m)}\overline{\mathfrak{G}}^{(m)} = \overline{\mathfrak{G}}^{(m)}\mathfrak{G}^{(m)} = \mathbf{1}\ ,\ \ \overline{\mathfrak{G}}(t^n) = H_n(s)\,. \end{gathered}$$

Meritano inoltre di essere esplicitamente osservate le due ovvie *relazioni di omogeneità:*

$$(22) \qquad \mathfrak{G}_s^{(m)}[F(t)] = \mathfrak{G}_{s/\sqrt{m}}[F(\sqrt{m}\,t)]\ ,\ \overline{\mathfrak{G}}_s^{(m)}[F(t)] = \overline{\mathfrak{G}}_{s/\sqrt{m}}[F(\sqrt{m}\,t)]$$

nonchè la formula

$$(23) \qquad \mathfrak{G}[t^n] = \sum_{r=0}^{[n/2]} \binom{n}{2r} 1\cdot 3 \cdots (2r-1)\, s^{n-2r} = \frac{H_n(is)}{i^n}\,,$$

immediatamente deducibile confrontando le (12) con le (13) in cui si sia posto $m = 1$.

7. Le trasformazioni $\mathfrak{G}^{(m)}$ e $\overline{\mathfrak{G}}^{(m)}$ costituiscono due interessanti sottogruppi a un parametro del gruppo delle trasformazioni commutabili, dotati di semplicissime leggi di composizione.

Invero, la funzione N^* corrispondente al prodotto delle due trasformazioni di Gauss $\mathfrak{G}^{(m_1)}$ e $\mathfrak{G}^{(m_2)}$ (per cui è $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$) è data, in virtù della (7), dalla formula:

$$N^*(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{m_1 m_2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2m_1}} e^{-\frac{\xi^2}{2m_2}} d\xi = \frac{e^{-\frac{x^2}{2m_1}}}{2\pi\sqrt{m_1 m_2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\frac{\xi^2}{2}+\frac{x}{m_1}\xi} d\xi$$

donde, sostituendo all'ultimo, ben noto integrale il suo valore, segue

$$N^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(m_1+m_2)}} e^{-\frac{x^2}{2(m_1+m_2)}} \quad ;$$

si ha dunque, simbolicamente,

$$\mathfrak{G}^{(m_1)} \mathfrak{G}^{(m_2)} = \mathfrak{G}^{(m_1+m_2)} . \tag{24}$$

In modo perfettamente analogo si trova che

$$\overline{\mathfrak{G}}^{(m_1)} \overline{\mathfrak{G}}^{(m_2)} = \overline{\mathfrak{G}}^{(m_1+m_2)} \tag{24'}$$

e, da queste due e dal fatto che $\mathfrak{G}^{(m)}$ e $\overline{\mathfrak{G}}^{(m)}$ son l'una l'inversa dell'altra si deduce senz'altro che

$$\overline{\mathfrak{G}}^{(m_2)} \mathfrak{G}^{(m_1)} = \mathfrak{G}^{(m_1)} \overline{\mathfrak{G}}^{(m_2)} = \begin{cases} \mathfrak{G}^{(m_1-m_2)} & , \ (m_1 > m_2) \\ \overline{\mathfrak{G}}^{(m_2-m_1)} & , \ (m_2 > m_1) \end{cases} \tag{24''}$$

Più semplicemente, ponendo formalmente

$$\mathfrak{G}^{(m)} = \Gamma^m \ , \quad \overline{\mathfrak{G}}^{(m)} = \Gamma^{-m}$$

(il che poi implica $\mathfrak{G} \equiv \Gamma$), tutte queste formule di composizione possono condensarsi nell'unica:

$$\Gamma^m \Gamma^{m'} = \Gamma^{m+m'} . \tag{25}$$

Merita infine la pena — prima di passare a qualche applicazione — d'indagare come si presentino gli sviluppi formali di Pincherle, secondo le potenze del simbolo di derivazione D, nel caso delle trasformazioni $\mathfrak{G}^{(m)}$ e $\overline{\mathfrak{G}}^{(m)}$.

Ricordando che, in generale, per una trasformazione commutabile, si ha

$$\mathfrak{T}[F] \equiv \sum_\nu \frac{a_\nu}{\nu!} D^\nu F \ ,$$

dove le costanti a_ν sono le stesse che figurano nella (9) [12]; nel caso delle trasformazioni $\mathfrak{G}$ e $\overline{\mathfrak{G}}$ si trova rispettivamente:

[12]) *Pincherle* e *Amaldi*, *op. cit.* (3), pp. 119—130.

$$(26) \qquad \mathfrak{G}[F] \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} D^{2n} F \; , \quad \overline{\mathfrak{G}}[F] \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} D^{2n} F \; ;$$

più generalmente si hanno le formule

$$(26^*) \qquad \mathfrak{G}^{(m)}[F] \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n}{2^n n!} D^{2n} F \; , \quad \overline{\mathfrak{G}}^{(m)}[F] \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-m)^n}{2^n n!} D^{2n} F \, .$$

Queste formule presentano, fra l'altro, l'inconveniente d'identificare $\overline{\mathfrak{G}}^{(m)}$ con $\mathfrak{G}^{(-m)}$, il che non è sempre vero.

8. Una delle più interessanti applicazioni delle trasformazioni più sopra considerate, consiste nella *sommazione di serie di polinomi di Hermite.*

Invero, per sommare una serie della forma:

$$(27) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x)$$

potrà cercarsi di sommare la serie di potenze:

$$(28) \qquad F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \, ,$$

il che costituisce certo un problema più elementare; se ciò riesce, se si riesce cioè ad esprimere $F(x)$ in termini finiti, allora $f(x)$ potrà calcolarsi mediante la formula

$$(29) \qquad f(s) = \overline{\mathfrak{G}}[F(t)] = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} e^{\frac{1}{2}(s-t)^2} F(t)\, dt \, ,$$

ammesso che la costante $\varkappa$ possa determinarsi in modo da far sì che l'integrale del secondo membro risulti convergente.

Un'altra circostanza assai importante da tenersi presente nello studio di serie del tipo (27) per la via ora indicata, è che *se la funzione $F(t)$ soddisfa ad una certa equazione differenziale lineare, ordinaria o alle derivate parziali E, la funzione $f(s)$ soddisfa all'equazione differenziale ottenuta operando con $\overline{\mathfrak{G}}$ su E, epperò, in particolare, all'equazione E stessa, se questa è un'equazione a coefficienti costanti*[13]).

[13]) Quest'osservazione, che evidentemente vale per tutte le trasformazioni commutabili (e non commutabili), è, in sostanza, dovuta ad *Appell* che, nella Mem. cit. (2), indica, fra l'altro, un metodo per determinare la trasformata d'ogni equazione differenziale (ordinaria) a *coefficienti polinomiali.*

Per esempio, prendendo le mosse dalla serie esponenziale

$$y = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

che soddisfa all'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti $y' - y = 0$, si ha, senz'alcun calcolo, che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}$$

deve rappresentare ancora una soluzione della medesima equazione, cioè una funzione del tipo ce^x. Si trova così, determinando la costante c col porre $x = 0$, la formula

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} = \frac{1}{\sqrt{e}} e^x , \tag{30}$$

che può agevolmente controllarsi per mezzo della classica funzione generatrice dei polinomi di Hermite.

Analogamente, partendo invece dagli sviluppi in serie di potenze delle funzioni $\cos kx$ e $\sin kx$, dove k denota una costante qualsiasi, si trovano le formule:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{k^{2n} H_{2n}(x)}{(2n)!} = e^{\frac{1}{2}k^2} \cos kx , \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{k^{2n+1} H_{2n+1}(x)}{(2n+1)!} = e^{\frac{1}{2}k^2} \sin kx , \tag{31}$$

la seconda delle quali, ponendo $k = \sqrt{2}$ e cambiando x in $x/\sqrt{2}$, s'identifica con la formula (14) della mia 2^a Nota sulla „Trasformazione di Laplace e polinomi di Laguerre", citata sotto[11]); formula che è stata il punto di partenza delle ricerche formanti oggetto del presente lavoro. Ponendo invece $k = i\sqrt{2}$ le (31) divengono:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{H_{2n}(x)}{(2n)!} = \frac{1}{e} \mathfrak{Cos}(\sqrt{2}\,x) , \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+\frac{1}{2}} \frac{H_{2n+1}(x)}{(2n+1)!} = \frac{1}{e} \mathfrak{Sin}(\sqrt{2}x) \tag{31*}$$

e forniscono così i valori di due serie incontrate (ma non sommate) da *G. Doetsch* in un suo recente lavoro[14]).

---

[14]) Integraleigenschaften der Hermiteschen Polynome. (Mathem. Zeitschr., 32 [1930], pp. 587—599). Attenzione al significato leggermente diverso del simbolo H_n dei polinomi di Hermite!

9. Per mostrare un esempio meno immediato e perciò più istruttivo di applicazione del metodo indicato nel § precedente, proponiamoci lo studio della trascendente

$$(32) \qquad j(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{H_{2n}(x)}{(2^n n!)^2},$$

ottenuta rimpiazzando x^{2n} con $H_{2n}(x)$ nella classica serie che definisce la *funzione di Bessel d'ordine zero* $J_0(x)$, il che implica

$$(33) \qquad j(s) = \overline{\mathfrak{G}}[J_0(t)]$$

Lo studio di questa interessante funzione intera può compiersi da due diversi punti di vista che si completano a vicenda, e cioè o si può, traducendo in forma esplicita la (33), partire dall'integrale definito

$$(34) \qquad j(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(s-it)^2} J_0(it)\, dt \;;$$

oppure si può partire dall'equazione differenziale cui soddisfa $J_0(x)$:

$$(35) \qquad x y'' + y' + x y = 0,$$

cominciando con l'osservare che dalla (19), con una derivazione rapporto ad s, si trae:

$$\frac{d}{ds}\overline{\mathfrak{G}}^{(m)}[F(t)] = \frac{1}{i\sqrt{2\pi m}} \int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} e^{-\frac{(s-t)^2}{2m}} \frac{s-t}{m} F(t)\,dt =$$

$$= \frac{s}{m}\overline{\mathfrak{G}}^{(m)}[F(t)] - \frac{1}{m}\overline{\mathfrak{G}}^{(m)}[tF(t)],$$

donde segue:

$$(36) \qquad \overline{\mathfrak{G}}^{(m)}[tF(t)] = s\overline{\mathfrak{G}}^{(m)}[F(t)] - m\frac{d}{ds}\overline{\mathfrak{G}}^{(m)}[F(t)] \;;$$

pertanto, operando con la $\overline{\mathfrak{G}}$ sulla (35), avremo

$$x\overline{\mathfrak{G}}[y''] - \frac{d}{dx}\overline{\mathfrak{G}}[y''] + \overline{\mathfrak{G}}[y'] + x\overline{\mathfrak{G}}[y] - \frac{d}{dx}\overline{\mathfrak{G}}[y] = 0$$

cioè

$$xz'' - z''' + z' + xz - z' = 0$$

ovvero

$$(37) \qquad z''' - x(z'' + z) = 0,$$

avendo posto $\overline{\mathfrak{G}}[y] = z$.

La funzione $j(x)$ può dunque caratterizzarsi come la soluzione dell'equazione differenziale di terz'ordine (37) soddisfacente alle condizioni iniziali:

$$z(0) = k_0 \, , \; z'(0) = 0 \, , \; z''(0) = k_2$$

essendo

$$k_0 = j(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{H_{2n}(0)}{(2^n \cdot n!)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{(2 \cdot 4 \cdots 2n)^2} \, ,$$

$$k_2 = j''(0) = \sum_{n\;0}^{\infty} (-1)^n \frac{H''_{2n}(0)}{(2^n \cdot n!)^2} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{(2 \cdot 4 \cdots 2n)^2} \; ;$$

espressioni più semplici (in termini finiti) di k_0 e k_2 si vedranno più avanti.

Per tal via, col classico metodo d'integrazione per serie, si giunge alla seguente, semplice espressione della funzione in esame:

$$\boxed{j(x) = k_0 R(x) + k_2 S(x)} \tag{38}$$

essendo $R(x)$ ed $S(x)$ le due *trascendenti intere* definiti dalle serie:

$$R(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{2n}}{(2n)!} x^{2n} \, , \quad S(x) = \frac{x^2}{2!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} x^{2n} \, , \tag{39}$$

dove A_{2n} e B_{2n} sono dei numeri interi positivi definiti da una medesima equazione ricorrente, e precisamente dalla

$$X_{2n+2} = (2n-1)\,(X_{2n} + X_{2n-2}) \, , \; (X_{2n} = A_{2n} \text{ oppure } X_{2n} = B_{2n}) \tag{40}$$

congiunta alle „condizioni iniziali“ $A_0 = 1$, $A_2 = 0$; $B_0 = 0$, $B_2 = 1$. Calcolando esplicitamente i primi termini delle due serie si trova:

$$\begin{aligned} R(x) &= 1 + \frac{1}{4!} x^4 + \frac{3}{6!} x^6 + \frac{20}{8!} x^8 + \frac{161}{10!} x^{10} + \frac{1629}{12!} x^{12} + \cdots \, , \\ S(x) &= \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 + \frac{6}{6!} x^6 + \frac{35}{8!} x^8 + \frac{287}{10!} x^{10} + \frac{2898}{12!} x^{12} + \cdots \end{aligned} \tag{39*}$$

Ponendosi invece dal primo dei due punti di vista sopra accennati, si procurerà di semplificare l'integrale (34) con opportune trasformazioni. Per esempio si può sostituire in esso, in luogo di $J_0(it)$, la sua espressione data dal noto integrale di Hansen, ottenendo così:

$$j(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(s-it)^2} \frac{dt}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-t\cos\varphi} d\varphi = \frac{e^{\frac{1}{2}s^2}}{\pi\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2 - (\cos\varphi + is)t} dt ,$$

donde, per una nota formula già più sopra applicata, segue

$$j(s) = \frac{e^{\frac{1}{2}s^2}}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\frac{1}{2}(\cos\varphi + is)^2} d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\frac{1}{2}\cos^2\varphi + is\cos\varphi} d\varphi$$

ovvero, eseguendo la sostituzione $2\varphi = \varphi_1$,

$$j(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\frac{1}{4}(1+\cos\varphi_1) + is\cos\frac{1}{2}\varphi_1} d\varphi_1 = \frac{e^{\frac{1}{4}}}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\frac{1}{4}\cos\varphi_1} e^{is\cos\frac{1}{2}\varphi_1} d\varphi_1 ;$$

avremo dunque in definitiva, tenuto conto della realtà di j per argomento reale e scrivendo x e φ in luogo di s e φ_1, la formula, notevolmente semplice ed espressiva:

$$\boxed{j(x) = \frac{\sqrt[4]{e}}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\frac{1}{4}\cos\varphi} \cos\left(x\cos\frac{1}{2}\varphi\right) d\varphi .} \tag{41}$$

Per mostrare un'applicazione della (41), serviamocene per esprimere in termini finiti — mediante funzioni di Bessel — le costanti k_0 e k_2 più sopra incontrate. All'uopo deriviamo anzitutto l'ultima formula n volte rispetto ad x, avremo così

$$j^{(n)}(x) = \frac{\sqrt[4]{e}}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\frac{1}{4}\cos\varphi} \cos\left(x\cos\frac{1}{2}\varphi + n\frac{\pi}{2}\right) \cos^n\frac{1}{2}\varphi\, d\varphi$$

donde, ponendo $x = 0$, segue

$$j^{(2\nu+1)}(0) = 0 , \; j^{(2\nu)}(0) = (-1)^{\nu} \frac{\sqrt[4]{e}}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\frac{1}{4}\cos\varphi} \cos^{2\nu}\frac{1}{2}\varphi\, d\varphi , \; (\nu = 0, 1, 2, \cdots) ;$$

avremo dunque in particolare:

$$j(0) = \frac{\sqrt[4]{e}}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\frac{1}{4}\cos\varphi} d\varphi , \; j'(0) = 0 , \; j''(0) = -\frac{\sqrt[4]{e}}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\frac{1}{4}\cos\varphi} \frac{1+\cos\varphi}{2} d\varphi ,$$

epperò, ricordando la rappresentazione di Hansen della funzione $J_n(z)$, viene

$$(42) \qquad k_0 = j(0) = \sqrt[4]{e}\, J_0\left(\frac{i}{4}\right), \; k_2 = j''(0) = -\frac{\sqrt[4]{e}}{2}\left[J_0\left(\frac{i}{4}\right) - i J_1\left(\frac{i}{4}\right)\right].$$

Eseguendo il calcolo numerico con l'ausilio delle tabelle (a quattro decimali) dei valori delle funzioni di Bessel per argomento immaginario puro contenute nelle ben note Funktionentafeln di *Jahnke-Emde*[15]), si trova così che

$$k_0 = 1{,}3042 \qquad\qquad k_2 = -0{,}7330$$

L'integrale (34) può però trattarsi anche in altro modo, e cioè eseguire dapprima la sostituzione $s = ix$, $t = x + y$, così che viene

$$j(ix) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} J_0(ix + iy)\, dy,$$

e servirsi poscia del così detto teorema d'addizione della funzione J_0, che fornisce

$$(43) \qquad j(ix) = c_0 J_0(ix) + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} c_{2\nu} J_{2\nu}(ix),$$

avendo posto

$$c_{2\nu} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}y^2} J_{2\nu}(iy)\, dy, \; (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

e osservato che gli integrali analoghi contenenti funzioni J d'indice dispari sono tutti nulli.

Le costanti $c_{2\nu}$ possono esplicitamente calcolarsi mediante funzioni di Bessel, servendosi ancora una volta della rappresentazione integrale di Hansen, con l'ausilio della quale si trova che:

$$c_{2\nu} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} \frac{dy}{\pi i^{2\nu}} \int_0^{\pi} e^{-y\cos\varphi} \cos 2\nu\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{(-1)^{\nu}}{\pi\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} \cos 2\nu\varphi\, d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2 - y\cos\varphi} dy = \frac{(-1)^{\nu}}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-\frac{1}{2}\cos^2\varphi} \cos 2\nu\varphi\, d\varphi\,;$$

[15]) Zweite Auflage (Leipzig, Teubner, 1933).

ponendo $2\varphi = \varphi_1$ come più sopra, avremo dunque in definitiva, sempre per la formula di Hansen, che:

$$c_{2\nu} = (-1)^\nu \frac{\sqrt[4]{e}}{\pi} \int_0^\pi e^{\frac{1}{4}\cos\varphi_1} \cos \nu\varphi_1 d\varphi_1 = (-1)^\nu \sqrt[4]{e}\, i^\nu J_\nu\left(-\frac{i}{4}\right) = \sqrt[4]{e}\, i^\nu J_\nu\left(\frac{i}{4}\right).$$

Se ne conclude, sostituendo nella (43) e cambiando $i\,x$ in x, che sussiste la semplice ed elegante formula:

$$\boxed{j(x) = \sqrt[4]{e}\left[J_0\left(\frac{i}{4}\right) J_0(x) + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} i^\nu J_\nu\left(\frac{i}{4}\right) J_{2\nu}(x)\right].} \tag{44}$$

Un controllo numerico delle precedenti formule, eseguito in corrispondenza ad $x = 1$, ha fornito i seguenti risultati: La serie originaria (32), tenuto conto dei termini fino a quello con H_{12} (il che assicura almeno 5 decimali esatti), dà $j(1) = 0{,}960823$; la formula (38) dà (con quattro decimali esatti) $j(1) = 0{,}96083$; finalmente la formula (44) dà, pure con 4 decimali esatti, $j(1) = 0{,}96082$. Come si vede, l'accordo non potrebbe esser migliore!

(Reçu le 31 mai 1935.)