

# Sur les systèmes isogonaux de courbes dont le rapport des courbures est constant.

Autor(en): **Plancherel, M.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **8 (1935-1936)**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-9299>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Sur les systèmes isogonaux de courbes dont le rapport des courbures est constant

Par M. PLANCHEREL, Zurich

1. Un problème de la théorie de l'élasticité a conduit mon collègue, M. le prof. Ritter, à me poser la question suivante :

*Trouver tous les systèmes orthogonaux de courbes planes pour lesquels le rapport des courbures en un point arbitraire (des deux courbes du système passant par ce point) est constant.*

La réponse est très simple. Appelons isogonale ( $\omega$ ) d'une famille de courbes planes, une courbe coupant les courbes de la famille sous l'angle  $\omega$ .  $q^2$  désignant le rapport constant des carrés des courbures et  $\omega$  étant défini par

$$\cotg \omega = \pm q, \quad (1)$$

la solution générale de la question est donnée par le système des isogonales ( $\omega$ ) et  $(\omega + \frac{\pi}{2})$  d'une famille arbitraire de droites. Cette propriété est un cas particulier d'une proposition générale concernant les systèmes isogonaux de courbes, que nous établirons ci-dessous.

Nous dirons de deux familles monoparamétriques de courbes  $F_1, F_2$  qu'elles forment un système isogonal d'angle  $\theta$ , lorsque les courbes de la famille  $F_2$  sont les isogonales ( $\theta$ ) de la famille  $F_1$ . Introduisons un sens de rotation positif dans le plan et convenons de prendre pour  $\theta$  l'angle compris entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$  dont la tangente à une courbe de  $F_1$  doit tourner autour de son point de contact  $P$  pour se superposer à la tangente en  $P$  à la courbe de  $F_2$  passant par ce point. Désignons encore par  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  les courbures respectives des courbes de  $F_1$  et de  $F_2$  et par  $q^2$  le rapport  $(\frac{\kappa_2}{\kappa_1})^2$ . On a alors le théorème :

*Tout système isogonal d'angle  $\theta$ , pour lequel le rapport des carrés des courbures  $(\frac{\kappa_2}{\kappa_1})^2 = q^2$  est constant, est formé par les isogonales ( $\omega$ ),  $(\omega + \theta)$  d'une famille de droites où  $\omega$  est déterminé par*

$$\tg \omega = \frac{\sin \theta}{\pm q - \cos \theta}. \quad (2)$$

Réciproquement, les isogonales  $(\omega)$ ,  $(\omega + \theta)$  d'une famille arbitraire de droites ont leurs courbures en rapport constant :

$$\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)^2 = \left(\frac{\sin(\omega + \theta)}{\sin \omega}\right)^2. \quad (3)$$

Etant donné une courbe  $L$ , différente d'une droite, une constante  $q^2 \geq 0$  et un angle  $\theta \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ , on peut chercher à déterminer un système isogonal  $F_1 F_2$ , d'angle  $\theta$ , tel que  $L$  soit une courbe de la famille  $F_1$  et pour lequel le rapport des carrés des courbures soit égal à  $q^2$ . Le théorème ci-dessus donne une construction géométrique simple d'un tel système. Il montre de plus que si  $q^2 > 0$ , il y a deux systèmes isogonaux répondant à la question. Il y a de même deux systèmes isogonaux d'angle  $-\theta$  répondant aux mêmes conditions pour  $L$  et  $q^2$ ; ils coïncident avec les précédents si  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ . Si  $q = 0$ ,  $F_2$  est une famille de droites; il n'y a qu'un seul système isogonal d'angle  $\theta$  et un seul système d'angle  $-\theta$ , pour lesquels  $L$  est une courbe de  $F_1$ ; ces deux systèmes sont identiques lorsque  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ . Le cas particulier où la famille de droites est un faisceau donne le système isogonal formé de deux familles de spirales logarithmiques.

2. Pour éviter des confusions, nous affecterons, là où cela sera utile, de l'indice 1 les grandeurs se rapportant à la famille  $F_1$  et de l'indice 2 celles se rapportant à la famille  $F_2$ . Si

$$y_1' = f(x, y_1) \quad (4)$$

est l'équation différentielle de la famille  $F_1$ , les courbes de  $F_2$  coupant celles de  $F_1$  sous l'angle  $\theta$  auront pour équation différentielle

$$y_2' = \frac{f(x, y_2) + \tau}{1 - \tau f(x, y_2)},$$

en notant  $\text{tg } \theta = \tau$ . Par suite,

$$y_1'' = f_x(x, y_1) + f_y(x, y_1) f(x, y_1),$$

$$y_2'' = \frac{1 + \tau^2}{[1 - \tau f(x, y_2)]^3} \left[ f_x(x, y_2) (1 - \tau f(x, y_2)) + f_y(x, y_2) (f(x, y_2) + \tau) \right].$$

Les courbures  $\kappa_1, \kappa_2$  au même point  $(x, y)$  auront donc les valeurs

$$\kappa_1 = \pm \frac{y_1''}{(1 + y_1'^2)^{3/2}} = \pm \frac{f_x + ff_y}{(1 + f^2)^{3/2}},$$

$$\kappa_2 = \pm \frac{y_2''}{(1 + y_2'^2)^{3/2}} = \pm \frac{f_x(1 - \tau f) + f_y(f - \tau)}{\sqrt{1 + \tau^2}(1 + f^2)^{3/2}}.$$

En égalant à  $q^2$  le carré des rapports de ces courbures, on aura

$$f_x(1 - \tau f) + f_y(f + \tau) = \pm q \sqrt{1 + \tau^2} (f_x + ff_y).$$

$q^2$  étant donné,  $q$  n'est déterminé qu'au signe près; il suffira donc de traiter la première des deux équations précédentes.

3. Le problème est donc réduit à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles suivante pour  $z = f(x, y)$

$$(1 - q\sqrt{1 + \tau^2} - \tau z) \frac{\partial z}{\partial x} + (\tau + z(1 - q\sqrt{1 + \tau^2})) \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \quad (5)$$

L'intégration du système différentiel de ses caractéristiques

$$\frac{dx}{1 - q\sqrt{1 + \tau^2} - \tau z} = \frac{dy}{\tau + z(1 - q\sqrt{1 + \tau^2})} = \frac{dz}{0}$$

donne sa solution générale sous la forme paramétrique

$$\begin{aligned} x &= [1 - q\sqrt{1 + \tau^2} - \tau z_0(v)] \frac{u}{\tau} + x_0(v), \\ y &= [\tau + z_0(v)(1 - q\sqrt{1 + \tau^2})] \frac{u}{\tau} + y_0(v), \\ z &= z_0(v), \end{aligned} \quad (6)$$

dans laquelle  $x_0(v), y_0(v), z_0(v)$  sont des fonctions arbitraires du paramètre  $v$ . La surface réglée que ces formules représentent a ses génératrices parallèles au plan  $xy$  et passe par la courbe

$$x = x_0(v), \quad y = y_0(v), \quad z = z_0(v).$$

Lorsque  $z_0(v)$  est une constante  $a$ , la surface est le plan  $z = a$  et l'équation différentielle (4) est celle d'une famille de droites parallèles.

Le système isogonal est alors formé de deux familles de droites parallèles et le rapport des courbures est indéterminé.

Lorsque  $z_0(v)$  n'est pas une constante, l'intersection du plan  $z = z_0(v)$  et de la surface (6) est une droite faisant avec l'axe des  $x$  l'angle  $\alpha$  donné par

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\tau + z_0(v) (1 - q \sqrt{1 + \tau^2})}{1 - q \sqrt{1 + \tau^2} - \tau z_0(v)} .$$

Introduisons l'angle  $\omega$  donné par

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\tau}{q \sqrt{1 + \tau^2} - 1} = \frac{\sin \theta}{q - \cos \theta} .$$

On a

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{z_0 + \operatorname{tg} \omega}{1 - z_0 \operatorname{tg} \omega} ,$$

d'où

$$z_0(v) = \operatorname{tg} (\alpha + \omega) .$$

Substituons aux paramètres  $u, v$  les paramètres  $\alpha, t$  définis par

$$\operatorname{tg} (\alpha + \omega) = z_0(v) , \quad t = u + \frac{\tau x_0(v)}{1 - q \sqrt{1 + \tau^2} + \tau z_0(v)} .$$

La surface (6) est alors représentée sous la forme

$$\begin{aligned} x &= (1 - q \sqrt{1 + \tau^2} + \tau \operatorname{tg} (\alpha + \omega)) \frac{t}{\tau} , \\ y &= ((1 - q \sqrt{1 + \tau^2}) \operatorname{tg} (\alpha + \omega) - \tau) \frac{t}{\tau} + \Phi(\alpha) , \\ z &= \operatorname{tg} (\alpha + \omega) , \end{aligned} \quad (7)$$

où  $\Phi(\alpha) = y_0(v) - x_0(v) \operatorname{tg} \alpha$

est une fonction arbitraire de  $\alpha$ . La famille de droites

$$y = x \operatorname{tg} \alpha + \Phi(\alpha) \quad (8)$$

représente les projections des génératrices de la surface (7) sur le plan  $z = 0$ .

Revenons à l'équation différentielle (4). La condition nécessaire et suffisante pour que la famille  $F_1$  qu'elle représente et la famille  $F_2$  de ses

isogonales ( $\theta$ ) aient leurs courbures en rapport constant est que  $z = f(x, y)$  soit de la forme (7). Considérons la courbe intégrale qui passe par un point arbitraire du plan et menons la droite (8) qui passe par ce point. L'angle de cette courbe intégrale avec l'axe des  $x$  est  $\alpha + \omega$ , et celui de cette droite (8) avec l'axe est  $\alpha$ . La courbe intégrale coupe donc la droite (8) sous l'angle  $\omega$ . Elle est, par conséquent, une isogonale ( $\omega$ ) de la famille de droites (8).

Il est ainsi établi qu'à tout système isogonal de courbes planes pour lequel le rapport des courbures est constant correspond une famille de droites et réciproquement; il est formé par les isogonales ( $\omega$ ) et ( $\omega + \theta$ ) de cette famille.

La réciproque du théorème démontré peut aussi se vérifier directement en calculant la courbure d'une isogonale ( $\omega$ ) de la famille (8). Un calcul élémentaire donne pour cette courbure

$$\kappa(\omega) = \pm \frac{\cos \alpha \sin \omega}{x + \Phi'(\alpha) \cos^2 \alpha} \quad \text{d'où} \quad \left( \frac{\kappa(\omega + \theta)}{\kappa(\omega)} \right)^2 = \frac{\sin^2(\omega + \theta)}{\sin^2 \omega}.$$

En construisant l'enveloppe de la famille (8) et en désignant par  $l$  la distance d'un point  $(x, y)$  d'une droite (8) au point de contact de cette droite et de l'enveloppe, on démontre que  $l \cos \alpha = x + \Phi'(\alpha) \cos^2 \alpha$ . Par suite,  $\kappa(\omega) = \pm \frac{\sin \omega}{l}$ . Cette formule donne une construction simple du cercle de courbure des isogonales d'une famille de droites, construction due à G. Scheffers (*Leipziger Berichte*, 50, 1898, p. 276). Elle montre aussi que les isogonales qui passent par un point fixe arbitraire ont en ce point des cercles de courbure qui ont un second point commun. Cette dernière propriété est d'ailleurs, comme l'a remarqué E. Cesàro (*Geometria intrinseca*, 1896, p. 115, édition allemande, p. 147—148) encore vraie lorsque la famille de droites est remplacée par une famille de courbes.

(Reçu le 21 octobre 1935).