Über das Phänomen der Unzerlegbarkeit in der Polyedertopologie.

Autor(en): **Borsuk, Karol**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **8 (1935-1936)**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-9290

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Über das Phänomen der Unzerlegbarkeit in der Polyedertopologie

Von KAROL BORSUK, Warszawa

1. Eine Menge[1]) M von einer Eigenschaft Π heißt bezüglich dieser Eigenschaft unzerlegbar, wenn keine Zerlegung von M in zwei echte Teilmengen von der Eigenschaft Π existiert. So sind z. B. die bezüglich des Zusammenhanges unzerlegbaren Mengen die sog. unzerlegbaren Kontinuen, welche zu den merkwürdigsten Gebilden der Topologie gehören[2]).

Der Zweck dieser Arbeit ist, zu zeigen, daß das Phänomen der Unzerlegbarkeit schon unter den Polyedern erscheint, wenn man anstatt des Zusammenhanges sein höherdimensionales kombinatorisches Korrelat betrachtet. *Es existieren nämlich Polyeder, welche unzerlegbar bezüglich der Eigenschaft „ein azyklisches[3]) Polyeder zu sein" sind.* Da eine in sich zusammenziehbare[4]) Menge in allen Dimensionen azyklisch ist[5]) und da alle Bettischen Zahlen (außer der nulldimensionalen) einer azyklischen Menge verschwinden, so ist die vorstehende Behauptung in dem folgenden, genaueren Satze enthalten:

Satz. *Es gibt im dreidimensionalen euklidischen Raume ein in sich zusammenziehbares, zweidimensionales Polyeder, welches keine Zerlegung in zwei[6]) echte Teilpolyeder mit verschwindender eindimensionaler Bettischer Zahl zuläßt.*

2. Die Konstruktion eines die Behauptung unseres Satzes erfüllenden Polyeders läßt sich sehr einfach angeben. Wir werden nämlich ein solches

---

[1]) Unter einer Menge wird stets eine metrische in sich kompakte Menge verstanden.

[2]) Die unzerlegbaren Kontinuen wurden von *L. E. J. Brouwer* entdeckt. Siehe Math. Ann. 68 (1910), S. 426. Vgl. auch *Z. Janiszewski*, Journ. Ec. Pol. 16 (II), 1912, S. 79—170.

[3]) Eine Menge M heißt in der n-ten Dimension azyklisch, wenn jeder n-dimensionale, berandungsfähige, wahre Zyklus nach variablem Koeffizientenbereiche von M in M berandet. (Wegen dieser Begriffe siehe die Arbeit von *P. Alexandroff* „Über die Urysohnschen Konstanten", Fund. Math. 20, 1933, S. 142.) Die in der 0-ten Dimension azyklischen Mengen sind bekanntlich mit den Kontinuen identisch.

[4]) M heißt in sich zusammenziehbar, wenn es eine stetige Funktion $f(x, t)$ derart gibt, daß $f(x, 0) = x$; $f(x, t) \in M$; $f(x, 1) =$ konst. für jedes $x \in M$ und $0 \leq t \leq 1$ ist.

[5]) Fund. Math. 21 (1933), S. 95.

[6]) Es ist unschwer zu zeigen, daß P — wie jedes zweidimensionale, zusammenhängende Polyeder — in drei von ihm verschiedene und in sich zusammenziehbare Polyeder zerlegbar ist. Siehe meine Arbeit: „Sur la décomposition des polyèdres n-dimensionnels en polyèdres contractiles en soi", Compositio Math., in Vorbereitung.

Polyeder P erhalten, indem wir in der Kreisscheibe $K = \underset{z}{E}[\,|z| \leqslant 1\,]$[7]) der komplexen z-Ebene jeden Punkt x der Strecke $\overline{0;1}$ mit dem Punkte $e^{2\pi i x}$ identifizieren. Es ist klar, daß P topologisch als ein zweidimensionales Polyeder darstellbar ist. Man kann dabei ein Modell von P im euklidischen dreidimensionalen Raume R^3 (mit rechtwinkligen Koordinaten x, y, t) folgendermaßen konstruieren:

Wir setzen:

$$R^+ = \underset{(x,y,t)}{E}\,[t \geqslant 0]; \qquad R^- = \underset{(x,y,t)}{E}\,[t \leqslant 0],$$

$$I = \underset{p}{E}\,\underset{\varphi}{\Sigma}\left[p = \left(1 + \sin^2\frac{\varphi}{4}\right)\cos\varphi - 1, \left(1 + \sin^2\frac{\varphi}{4}\right)\sin\varphi,\ 0\right);\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\right]^{8}),$$

$$J = \underset{p}{E}\,\underset{\varphi}{\Sigma}\left[p = (\cos\varphi,\ 0,\ \sin\varphi);\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\right],$$

$$A = \underset{p}{E}\,\underset{q}{\Sigma}\left[\varrho(p, q) = \varrho(q, (-1, 0, 0)) - 1;\ q \varepsilon I\right] \cdot R^-\,^{9}),$$

$$B = \underset{p}{E}\,\underset{q}{\Sigma}\left[\varrho(p, q) = 1;\ q \varepsilon J\right] \cdot R^+,$$

$$C = \underset{p}{E}\,\underset{q}{\Sigma}\left[\varrho(p, (1, 0, 0)) \geqslant 1;\ \varrho(p, q) \leqslant \varrho(q, (-1, 0, 0)) - 1;\ q \varepsilon I\right] \cdot R^+ \cdot R^-.$$

Es ist leicht festzustellen, daß die Summe $P' = A + B + C$ mit P homöomorph ist. Zu diesem Zweck braucht man nur die geometrisch ersichtliche Tatsache zu beachten, daß die längs der Kreislinie $S = \underset{(x,y,t)}{E}\,[(x+1)^2 + y^2 = 1;\ t = 0]$ aufgeschnittene Fläche P' sich topologisch auf die Kreisscheibe $K = \underset{z}{E}\,[\,|z| \leqslant 1\,]$ abbilden läßt und zwar derart, daß ein Exemplar von S in den Rand von K und das im Punkte 0 aufgeschnittene zweite Exemplar von S in den Radius $\overline{0;1}$ übergeht.

3. Um zu beweisen, daß P in sich zusammenziehbar ist, bemerken wir vor allem, daß die Kreisscheibe K mit derjenigen Menge topologisch identisch ist, welche aus K entsteht, wenn man dort alle Punkte von der Gestalt $e^{2\pi i x}$, wo $0 \leqslant x \leqslant \frac{4}{3}\pi$, miteinander identifiziert. P ist somit

[7]) $\underset{p}{E}[\,]$ bedeutet die aus allen Punkten p von der Eigenschaft $[\,]$ bestehende Menge.

[8]) $\underset{\varphi}{\Sigma}[\,]$ bedeutet die Aussage: „Es gibt ein φ derart, daß $[\,]$ wahr ist. Vgl. *C. Kuratowski*, Topologie I, Monografje Matematyczne III, Warszawa-Lwów, 1933, S. 3.

[9]) $\varrho(p, q)$ bezeichnet die Entfernung zwischen den Punkten p und q.

homöomorph mit der Menge, welche aus K entsteht, indem wir die beiden folgenden Operationen nacheinander ausführen:

1^0 Identifizierung jedes Punktes $x \varepsilon \overline{0;1}$ mit dem Punkte $e^{\frac{2}{3}\pi i(x+2)}$,

2^0 Zusammenziehung auf einen einzigen Punkt des Kreisbogens $\underset{z}{E}\,\underset{\varphi}{\Sigma}\left[z = e^{i\varphi};\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{4}{3}\pi\right]$.

Wir zerlegen die Kreisscheibe K in zwei Halbkreisscheiben K^+ und K^-, von denen die erste die Punkte von nichtnegativem und die zweite diejenigen von nichtpositivem reellen Teil enthält. Nun entsteht aus K^- durch 1^0 eine mit K homöomorphe Menge K^*, und K^+ bleibt dabei ungeändert. K^* und K^+ sind also zwei absolute Retrakte[10]) und ihre Durchschnittsmenge besteht aus einem einfachen Bogen. Somit ist auch die Summe von K^* und K^+, d. h. die aus K durch 1^0 entstehende Menge K' ein absoluter Retrakt[11]). Da ferner, durch Zusammenziehung eines einfachen Teilbogens eines absoluten Retraktes wieder ein absoluter Retrakt entsteht[12]), so ist das aus K' durch 2^0 entstehende Polyeder P auch einer. Damit ist aber auch bewiesen, daß P in sich zusammenziehbar ist.

4. Es bleibt zu beweisen, daß P keine Zerlegung in zwei echte Teilpolyeder mit verschwindender eindimensionaler Bettischer Zahl zuläßt.

Wir können annehmen, daß P in der Gestalt eines geometrischen Komplexes, d. h. in einer Simplizialzerlegung[13]) gegeben ist. Es bezeichne a_0 den Punkt von P, welcher durch Verschmelzung von 0 und $e^{2\pi i 0} = 1$ entsteht. Es ist klar, daß der baryzentrische Stern[14]) jedes von a_0 verschiedenen Punktes $a \varepsilon P$ eine Umgebung (*„baryzentrische Umgebung"*) von a bildet, die entweder mit einer Kreisscheibe oder mit der Summe dreier Dreiecke mit einer gemeinsamen Seite homöomorph ist. Die baryzentrische Umgebung von a ist dabei beliebig klein, wenn nur die betrachtete Simplizialzerlegung von P hinreichend fein ist. Wir beachten ferner, *daß die Punkte a, für welche die baryzentrischen Umgebungen mit einer Kreisscheibe homöomorph sind, ein mit* $K - \{\underset{z}{E}\,[\,|z| = 1\,] + \overline{0;1}\}$

[10]) Wegen des Begriffes eines absoluten Retraktors, siehe z. B. Fund. Math. 19 (1932), S.222. Unter den Polyedern sind die absoluten Retrakte durch Zusammenziehbarkeit in sich charakterisiert. Siehe l. c. S. 227 und 229.

[11]) Siehe *N. Aronszajn* und *K. Borsuk*, Fund. Math. 18 (1932). S. 194.

[12]) Siehe Fund. Math. 24 (1935), S. 250.

[13]) Wegen der Definition eines geometrischen Komplexes und einer Simplizialzerlegung siehe z. B. *P. Alexandroff* „Einfachste Grundbegriffe der Topologie", Berlin, Springer, 1932, S. 6.

[14]) Wegen dieses Begriffes siehe l. c. S. 32.

(*also auch mit der Ebene*) *homöomorphes Gebiet G bilden* und daß die Menge aller übrigbleibenden Punkte von P nirgendsdicht in P ist. Es folgt daraus insbesondere, *daß P eine zweidimensionale Cantorsche Mannigfaltigkeit*[15]) (*eine Fläche*) *ist.*

5. *Ist A ein geometrischer Komplex*[13]), *welcher entweder mit einer Kreisscheibe oder mit der Summe dreier Dreiecke mit einer gemeinsamen Seite homöomorph ist und bezeichnet L eine lineare Menge*[16]), *die mit dem Rande R von A*[17]). *einen zusammenhängenden Durchschnitt hat, so ist A — L zusammenhängend.*

Um den Beweis dieser Behauptung anzugeben, braucht man nur zu zeigen, daß L das Gebiet $A - R$ nicht zerschneidet. Wir können deshalb die Menge $\overline{L - R}$ anstatt L betrachten und somit voraussetzen, daß jede Komponente von L mit R höchstens einen gemeinsamen Punkt hat. Ist nun A mit einer Kreisscheibe homöomorph, so ist die Behauptung in dem sogenannten *Janiszewski*'schen Satze[18]) enthalten. Ist dagegen A mit der Summe dreier Dreiecke Δ_1, Δ_2 und Δ_3 mit einer gemeinsamen Seite homöomorph und sind a und b irgend zwei Punkte von $A - R - L$, so gibt es zwei unter diesen Dreiecken, z. B. Δ_1 und Δ_2, so daß a und b in dem der Summe $\Delta_1 + \Delta_2$ entsprechenden und mit einer Kreisscheibe homöomorphen Teilkomplex A' von A enthalten sind. Da aber jede Komponente von L mit dem Rande von A' (der eine Teilmenge von R bildet) höchstens einen gemeinsamen Punkt hat, so ist die Behauptung auf den schon erledigten Fall zurückgeführt.

6. *Ist die eindimensionale Bettische Zahl eines Streckenkomplexes $S \subset P$ gleich Null, so zerschneidet S die Fläche P nicht.*

Beweis. Würde S die Fläche P zwischen irgend zwei Punkten a, b von $P - S$ zerschneiden, so gäbe es eine Teilmenge S' von S, die einen irreduziblen Schnitt[19]) zwischen a und b bildet. Da aber die Fläche P — als

---

[15]) Das heißt eine zweidimensionale Menge, welche durch keine höchstens 0-dimensionale Teilmenge zerlegt werden kann.

[16]) Das heißt eine mit einer Menge der reellen Zahlen homöomorphe Menge.

[17]) R bezeichnet also die Summe aller 1-dimensionalen Simplexe des geometrischen Komplexes A, die nur auf einem Dreiecke von A liegen.

[18]) *Z. Janiszewski*, Prace Mat. — Fiz. 26 (1913), S. 11—63. Siehe auch *C. Kuratowski*, Fund. Math. 14 (1929), S. 309—310.

[19]) Das heißt daß S^1 die Fläche P zwischen a und b zerschneidet, im Gegensatze zu jeder seiner echten Teilmengen. Der Beweis, daß jeder Schnitt zwischen a und b einen irreduziblen Schnitt zwischen diesen Punkten enthält, ist von *S. Mazurkiewicz*, Fund. Math. 1 (1920), S. 63 gegeben worden.

ein absoluter Retrakt — unikohärent ist[20]), so muß der irreduzible Schnitt ein (nicht einpunktiges) Kontinuum[21]) und somit ein Baum[22]) sein. Es folgt daraus, daß S' mindestens zwei Endpunkte enthält[23]). Es gibt also einen von a_0 verschiedenen Endpunkt e von s'. Es sei Σ eine Simplizialzerlegung und U eine so kleine baryzentische Umgebung (in P) von e, daß alle e nicht enthaltenden eindimensionalen Simplexe von Σ mit U punktfremd sind. Wenn man nun beachtet, daß U ein Stern mit dem Mittelpunkte e ist, so schließt man, daß das e enthaltende eindimensionale Simplex L von Σ einen zusammenhängenden Durchschnitt mit dem Rande R von U hat. Da ferner S' als ein irreduzibler Schnitt von P zwischen a und b vorausgesetzt ist, so gibt es einen einfachen Bogen B, welcher a und b im $P - (S' - U)$ verbindet. Es sei nun a_1 der erste und b_1 der letzte Punkt von B (wenn man B von a bis b durchläuft), welcher der Menge R angehört. Die Punkte a_1 und b_1 lassen sich dann — auf Grund von 5 — durch einen einfachen Bogen $B_1 \subset U - S' \subset U - L$ verbinden. Wenn wir nun den Teilbogen B_0 von B mit den Endpunkten a_1 und b_1 durch B_1 ersetzen, so erhalten wir aus B einen einfachen Bogen $B' = (B - B_0) + B_1$, der die Punkte a und b im $P - S'$ verbindet, was der Definition von S' als Schnitt zwischen a und b widerspricht.

7. *Wenn $Q \subset P$ ein P zerschneidendes Polyeder ist, so verschwindet seine eindimensionale Bettische Zahl nicht.*

Beweis. Wir können annehmen, daß Q ein Teilkomplex einer Simplizialzerlegung Σ von P ist, welches m zweidimensionale Simplexe (Dreiecke) von Σ enthält. Im Falle $m = 0$ ist Q ein Streckenkomplex und, auf Grund von **6**, ist die Behauptung richtig. Wir wollen also annehmen, die Behauptung sei für den Fall $m \leqslant m_0$ gültig und unter dieser Annahme ihre Gültigkeit für den Fall $m = m_0 + 1$ nachweisen.

Da auf Grund von **4**, die Punkte, wo P mit der Ebene lokal homöomorph ist, ein mit der Ebene homöomorphes Gebiet G bilden, so gibt es

---

[20]) Ein zusammenhängender Raum M heißt unikohärent, wenn der Durchschnitt je zweier zusammenhängender in M abgeschlossener Mengen mit der Summe M, zusammenhängend ist. Wegen der Unikohärenz der absoluten Retrakte siehe Fund. Math. 17 (1931), S. 163, 3°.

[21]) *C. Kuratowski*, Fund. Math. 13 (1929), S. 309 ($\mathfrak{A}_3$).

[22]) Das heißt ein zusammenhängender Streckenkomplex, der kein geschlossenes Polygon enthält, oder — was dasselbe bedeutet — dessen eindimensionale Bettische Zahl verschwindet.

[23]) Siehe z. B. *K. Menger*, Kurventheorie, Leipzig und Berlin, 1932, S. 307.

zwei Dreiecke $\Delta \subset Q$ und $\Delta' \subset \overline{P-Q}$ von Σ, die eine in G liegende (eventuell mit Ausnahme ihrer Endpunkte), gemeinsame Seite Λ besitzen. Es sei $\Psi(x)$ eine Funktion, welche Δ auf die Summe zweier von Λ verschiedenen Seiten von Δ retrahiert[24]) und auf $Q - \Delta$ die Identität ist. Die so definierte Funktion Ψ retrahiert das Polyeder Q auf ein Polyeder $Q_0 = \Psi(Q)$, welches aus Q entsteht, indem man dort alle Innenpunkte von Δ und Λ entfernt. Da ferner Q_0 nur m_0 Dreiecke von Σ enthält und seine eindimensionale Bettische Zahl die eindimensionale Bettische Zahl von Q nicht übertrifft[25]) (da Q_0 ein Retrakt von Q ist), so wird unsere Behauptung bewiesen sein, wenn nur gezeigt ist, daß Q_0 die Fläche P zwischen denselben Punkten a und b zerschneidet wie Q. Existierte aber ein einfacher Bogen $B \subset P - Q_0$ mit den Endpunkten a und b, so müßte er Δ und somit auch Λ treffen. Es bezeichne a_1 den ersten und b_1 den letzten Punkt von B (wenn man B von a bis b durchläuft), welcher der Strecke Λ angehört. Ein hinreichend nahe bei a_1 (bezw. bei b_1) und zwischen a und a_1 (bezw. zwischen b und b_1) liegender Punkt $a_0 \varepsilon \Lambda$ (bezw. $b_0 \varepsilon \Lambda$) gehört dann zum Inneren des Dreieckes Δ' und der Teilbogen B' (bezw. B'') von B mit den Endpunkten a und a_0 (bezw. b und b_0) ist in der Menge $P - Q$ enthalten. Das Kontinuum $B' + \overline{a_0 ; b_0} + B''$, wo $\overline{a_0 ; b_0}$ die geradlinige Strecke mit den Endpunkten a_0, b_0 bezeichnet, verbindet dann die Punkte a und b außerhalb von Q, was unserer Voraussetzung widerspricht.

8. Wir brauchen nun nur wenige Worte, um den Beweis unseres Satzes zu vollenden. Es sei nämlich eine Zerlegung von P in zwei echte Teilpolyeder P_1 und P_2 gegeben. Ist $a \varepsilon P - P_1$ und $b \varepsilon P - P_2$, so zerschneidet das Polyeder $P_1 \cdot P_2$ die Fläche P zwischen a und b, und somit — auf Grund von **7** — verschwindet seine eindimensionale Bettische Zahl nicht. Wenn wir aber berücksichtigen, daß die zweidimensionale Bettische Zahl der Fläche P (als eines absoluten Retraktes[5])), und somit auch die zweidimensionale Bettischen Zahlen von P_1 und P_2 verschwinden, so schließen wir auf Grund der bekannten Formel[26]), die eine Beziehung zwischen den Homologieeigenschaften zweier Polyeder und ihrer Summe und Durchschnitt anbetrifft, daß das Verschwinden der eindimensionalen Bettischen Zahlen von P_1 und P_2 das Verschwinden der eindimensionalen

---

[24]) Eine Funktion f retrahiert eine Menge M auf ihre Teilmenge N, wenn sie M stetigerweise auf N abbildet, indem sie auf N als Identität bestimmt ist.

[25]) Fund. Math. 21 (1933), S. 91—92.

[26]) *W. Mayer*, Monatshefte f. Math. u. Phys. 36 (1929), S. 40 (96).

Bettischen Zahl von $P_1 \cdot P_2$ zur Folge hat. Somit können also die eindimensionalen Bettischen Zahlen von P_1 und P_2 nicht beide verschwinden, w. z. b. w.

Die Frage, ob P auch bezüglich der Eigenschaft „eine azyklische *Menge* zu sein" unzerlegbar ist, bleibt unentschieden.

(Eingegangen den 21. Mai 1935.)