Über die Unikohärenz n-dimensionaler Polyeder.

Üeber die Unikohärenz n-dimensionaler Polyeder

Von M. Rueff, Zürich

Ein Kontinuum K heißt „henkellos" oder „*unikohärent*", wenn bei *jeder* Darstellung von K als Vereinigung zweier Teilkontinuen

$$K = K_1 + K_2 \tag{1}$$

der Durchschnitt $K_1 \cdot K_2$ selbst zusammenhängend ist[1]); dagegen heißt K „*multikohärent*", wenn es eine Zerlegung (1) gibt, in der K_1 und K_2 Kontinuen sind, $K_1 \cdot K_2$ aber nicht zusammenhängend ist. Einfache Beispiele unikohärenter Kontinuen sind die Strecke und die Kugelfläche, multikohärenter Kontinuen die Kreislinie und der Kreisring.

Die naheliegende Frage, ob die Begriffe der kombinatorischen Topologie zur Charakterisierung dieser wichtigen gestaltlichen Unterscheidung ausreichen, ist von *K. Borsuk* und von *E. Čech* in zwei voneinander unabhängigen Untersuchungen für die Klasse der „Peanoschen" (d. h. „im Kleinen zusammenhängenden" oder „stetig durchlaufbaren") Kontinuen bejaht worden[2]); der Borsuk-Čechsche Satz liefert die Charakterisierung: *das Peanosche Kontinuum K ist dann und nur dann unikohärent, wenn seine erste Bettische Zahl 0 ist.* Damit ist zugleich ein rein *geometrisches* Kriterium für das Verschwinden oder Nicht-Verschwinden der ersten Bettischen Zahl gewonnen, welches im Hinblick auf die *algebraischen* Begriffe und Methoden, die der Definition der Bettischen Zahlen zugrunde liegen, beachtenswert ist.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Darstellung eines Beweises des Borsuk-Čechschen Satzes für die zusammenhängenden n-dimensionalen *Polyeder*[3]). Diese Polyeder sind spezielle Peanosche Kontinuen; es wird also nichts Neues bewiesen; aber die Beschränkung auf Polyeder läßt, wie ich hoffe, den kombinatorisch-elementargeometrischen Kern klarer hervortreten, als es in den beiden früheren Darstellungen möglich

---

[1]) *L. Vietoris,* Proc. Amsterdam 29 (1926), p. 445. — *C. Kuratowski,* Fund. Math. XIII (1929), p. 307. — *K. Borsuk,* Fund. Math. XVII (1931), p. 171.

[2]) *K. Borsuk,* Fund. Math. XX (1933), p. 224. — *E. Čech,* ibid. p. 232.

[3]) Wegen der Bezeichnungen und Begriffe aus der kombinatorischen Topologie verweise ich auf die Darstellung von *P. Alexandroff,* Einfachste Grundbegriffe der Topologie (Berlin 1932).

war, die infolge ihres viel weiteren Gültigkeitsbereiches erhebliche mengentheoretische Schwierigkeiten zu überwinden haben[4]).

Der Satz besteht aus zwei Teilen:

Satz A: Hat das (zusammenhängende) Polyeder P die erste Bettische Zahl $p^1(P) = 0$, *so ist es unikohärent.*

Satz B: Ist $p^1(P) > 0$, *so ist P multikohärent.*

Der Satz A ist ein einfaches Korollar bekannter „Additions-Sätze"[5]); nur weil die Beweise dieser allgemeinen Sätze für unseren Zweck unnötig kompliziert sind, stelle ich im § 1 seinen naheliegenden Beweis dar.

Weniger nahe liegt der Beweis des Satzes B. Für ihn ziehen die beiden genannten Autoren dasselbe Hilfsmittel heran: *die stetigen Abbildungen von K auf eine Kreislinie*; obwohl diese Abbildungen auf den ersten Blick weder mit dem Begriff der Unikohärenz noch mit dem der Bettischen Zahl etwas zu tun haben, scheinen sie doch als Bindeglied zwischen den beiden Begriffen unentbehrlich zu sein. Besonders klar wird ihre Rolle von *Borsuk* herausgearbeitet, dessen Darstellung ich mich hier enger anschließe.

Die für unseren Zweck ausschlaggebende Eigenschaft von Abbildungen ist die „Wesentlichkeit": allgemein heißt eine stetige Abbildung f von P in einem Raum R „*wesentlich*", wenn es keine, von dem Parameter t $(0 \leq t \leq 1)$ stetig abhängende, Schar f_t von Abbildungen von P in R gibt, daß $f_0 = f$ und die Bildmenge $f_1(P)$ nur ein echter Teil von R ist[6]). Ist speziell R die Kreislinie, so gilt der Satz, daß f dann und nur dann wesentlich ist, wenn in P ein eindimensionaler Zyklus z^1 existiert, der durch f mit einem von 0 verschiedenen Grade auf R abgebildet wird[7]); dabei darf man, da jeder eindimensionale Zyklus die Summe einmal durchlaufener, einfach geschlossener Polygone ist, z^1 selbst als ein solches Polygon voraussetzen. Überhaupt werden wir im folgenden unter einem „eindimensionalen Zyklus" immer ein einmal durchlaufenes einfach geschlossenes Polygon verstehen.

---

[4]) Die Anregung zu dieser Arbeit (die aus meiner Diplomarbeit an der Eidgenössischen Technischen Hochschule hervorgegangen ist) habe ich von Herrn Prof. H. Hopf erhalten; ihm verdanke ich auch zahlreiche Verbesserungen und Ratschläge bei ihrer Abfassung und ihre endgültige Redaktion.

[5]) *W. Mayer*, Monatshefte f. Math. u. Phys. XXXVI (1929), Über abstrakte Topologie, IV. Abschnitt. — *L. Vietoris*, ibid. XXXVII (1930), p. 160. — Zum ersten Male treten derartige Sätze übrigens in dem Beweis des Jordan-Brouwerschen Satzes von *J. W. Alexander* auf (Trans. Am. Math. Soc. XXIII, 1922).

[6]) *H. Hopf*, Moskauer Math. Sammlung 1930, sowie: Math. Ann. 104 (1931), S. 637.

[7]) *H. Hopf*, Math. Ann., wie unter [6]), Satz V.

Den Satz B zerlegen wir (im Anschluss an *Borsuk*) in zwei Teile:

Satz B_1: Ist $p^1(P) > 0$, so kann man P wesentlich auf die Kreislinie R abbilden.

Satz B_2: Kann man P wesentlich auf die Kreislinie R abbilden, so ist P multikohärent.

Der Satz B_1 ist (samt seiner Umkehrung) von *H. Hopf* bewiesen worden, und ich habe diesem Beweise nichts hinzuzufügen[8]).

Das eigentliche Ziel dieser Arbeit bleibt somit der Beweis von B_2, zumal er in der Arbeit von Borsuk indirekt geführt wird, während im folgenden die Zerlegung von P, die die Multikohärenz in Evidenz setzt, direkt konstruiert werden soll[9]). Man kann dem Satz eine rein kombinatorische, von Stetigkeitsbegriffen freie Form geben. Wenn nämlich eine Abbildung von P auf R existiert, die wesentlich ist, bei welcher also nach einem oben genannten Satze ein einfach geschlossenes Polygon $z \subset P$ mit von 0 verschiedenem Grade abgebildet wird, so kann man eine simpliziale Approximation f dieser Abbildung heranziehen, welche z mit demselben Grade abbildet; dabei liegt der simplizialen Abbildung f eine Simplizialzerlegung von R sowie im allgemeinen eine Verfeinerung der ursprünglichen Simplizialzerlegung von P zugrunde. Der Satz B_2 ist dann in dem folgenden enthalten:

Satz B_2': Das zusammenhängende n-dimensionale Polyeder P sei durch die simpliziale Abbildung f so auf den einfach geschlossenen Streckenkomplex R abgebildet, dass das einfach geschlossene Polygon $z \subset P$ mit von 0 verschiedenem Grade abgebildet ist. Dann gibt es eine Zerlegung $P = P_1 + P_2$ in Teilpolyeder P_1, P_2, von denen jedes selbst zusammenhängend ist, während ihr Durchschnitt $P_1 \cdot P_2$ nicht zusammenhängend ist.

Dabei sind P_1 und P_2 aus Simplexen einer festen vorgegebenen Zerlegung von P aufgebaut; diese Zerlegung wird auch während des Beweises (§ 2) niemals abgeändert; B_2' ist also in der Tat ein rein kombinatorischer Satz.

§ 1.

Additionssatz: Jedes der Polyeder P_1, P_2, $P = P_1 + P_2$ sei zusammenhängend, und es sei $p^1(P) = 0$. Dann ist auch $P_3 = P_1 \cdot P_2$ zusammenhängend.

---

[8]) *H. Hopf*, wie unter [6]), Satz Va. Ich kann auf den Beweis hier um so leichter verzichten, als er in dem Buch über Topologie von *Alexandroff* und *Hopf*, das sich in Vorbereitung befindet, dargestellt wird. — Man vergleiche auch *N. Bruschlinsky*, Math. Ann. 109 (1934), S. 525. — Der Satz ist von *Borsuk* für beliebige kompakte metrische Räume P verallgemeinert worden: Fund. Math. XX (1933), p. 224.

[9]) Hierbei berührt sich mein Beweis enger mit dem letzten Schritt des Beweises von *Čech*.

Beweis: Infolge des Zusammenhanges von P ist P_3 nicht leer. a und b seien Eckpunkte von P_3. Infolge des Zusammenhanges von P_1 und von P_2 gibt es Kantenzüge $C_1^1 \subset P_1$, $C_2^1 \subset P_2$ mit den Berandungsrelationen[10])

(2) $$\dot{C}_1^1 = a - b, \; \dot{C}_2^1 = b - a.$$

Dann ist $C_1^1 + C_2^1$ ein eindimensionaler Zyklus in P, und wegen $p^1 \, (P) = 0$ gibt es einen zweidimensionalen Komplex $C^2 \subset P$ mit

(3) $$\dot{C}^2 = m \, (C_1^1 + C_2^1),$$

wobei m eine von 0 verschiedene ganze Zahl ist. Da jedes zweidimensionale Simplex von C^2 wenigstens einem der Polyeder P_1, P_2 angehört, existiert eine Zerlegung

(4) $$C^2 = C_1^2 + C_2^2, \; C_1^2 \subset P_1, \; C_2^2 \subset P_2.$$

Aus (3) und (4) ergibt sich

(5) $$mC_1^1 - \dot{C}_1^2 = \; - mC_2^1 + \dot{C}_2^2.$$

Der durch (5) gegebene Komplex C_{12}^1 gehört, wie die linke Seite von (5) zeigt, zu P_1 und, wie die rechte Seite zeigt, zu P_2; es ist also $C_{12}^1 \subset P_3$. Bildet man seinen Rand, so folgt aus $\left(\dot{C}_i^2\right)^{\bullet} = 0$ und aus (2)

$$\dot{C}_{12}^1 = m \; (a - b).$$

Hieraus ist ersichtlich, daß man a und b durch einen Kantenzug von P_3 miteinander verbinden kann. Da dies für jedes Paar a, b von Eckpunkten von P_3 gilt, ist P_3 zusammenhängend.

Beweis des Satzes A (man vergleiche die Einleitung): K_1, K_2 seien Teilkontinuen des zusammenhängenden Polyeders P, und es sei $P = K_1 + K_2$; ferner sei wieder $p^1 \, (P) = 0$; wir haben zu zeigen, daß $K_1 \cdot K_2$ zusammenhängend ist.

Wir nehmen mit P eine Folge von Unterteilungen vor, so daß die i-te Unterteilung eine Verfeinerung der $(i-1)$-ten ist, und daß die Simplexdurchmesser mit wachsendem i gegen 0 streben; die Polyeder $P_1^{(i)}$ und

[10]) Siehe Fussnote [3])

$P_2^{(i)}$ seien aus denjenigen Simplexen der i-ten Unterteilung aufgebaut, welche Punkte von K_1 bezw. K_2 enthalten; dann ist $P = P_1 + P_2$, und wegen des Zusammenhanges von K_1 und von K_2 sind auch P_1 und P_2 zusammenhängend. Daher ist nach dem Additionssatz auch $P_3^{(i)} = P_1^{(i)} \cdot P_2^{(i)}$ zusammenhängend.

Ist x_i ein Simplex von $P_3^{(i)}$ und x_{i-1} dasjenige Simplex der $(i—1)$-ten Unterteilung von P, dem x_i angehört, so enthält x_{i-1}, ebenso wie sein Teilsimplex x_i, sowohl einen Punkt von K_1 als auch einen von K_2; es ist also $x_{i-1} \subset P_3^{(i-1)}$. Dies bedeutet: $P_3^{(i)} \subset P_3^{(i-1)}$, die $P_3^{(i)}$ bilden also eine absteigende Folge.

Aus der Definition von $P_3^{(i)}$ folgt unmittelbar $K_1 \cdot K_2 \subset P_3^{(i)}$ für jedes i. Ist andererseits a ein Punkt von P, der nicht zu $K_1 \cdot K_2$ gehört, so hat er von einer der beiden Mengen, etwa von K_1, eine positive Entfernung; da die Simplexdurchmesser mit wachsendem i beliebig klein werden, gehört a für hinreichend großes i nicht zu $P_1^{(i)}$, also nicht zu $P_3^{(i)}$. Daher ist $K_1 \cdot K_2$ der Durchschnitt aller $P_3^{(i)}$.

Als Durchschnitt der absteigenden Folge der zusammenhängenden $P_3^{(i)}$ ist $K_1 \cdot K_2$ offenbar und bekanntlich selbst zusammenhängend.

§ 2.

Zum Beweis des Satzes B_2' knüpfen wir unmittelbar an den Wortlaut der Einleitung an; wir stellen noch einmal fest: P liegt in einer bestimmten Simplizialzerlegung vor, an der niemals etwas geändert wird; alle auftretenden Teilpolyeder von P sind aus Simplexen dieser Zerlegung aufgebaut.

a und b seien zwei voneinander verschiedene Eckpunkte von R; ihre Originalmengen $A = f^{-1}(a)$, $B = f^{-1}(b)$ sind infolge der Simplizialität von f Teilpolyeder von P mit der folgenden Eigenschaft: gehören alle Eckpunkte eines Simplexes von P zu A oder B, so gehört das ganze Simplex zu A bezw. B.

Jedes (echte oder unechte) Teilpolyeder P' von P wird durch B in eine endliche Anzahl (offener) Teilmengen, die Komponenten von $P'—B$, zerlegt; den Durchschnitt von A mit einer dieser Komponenten nennen wir eine „*Familie von A in P'*“. Die Anzahl der Familien ist endlich; jede Familie ist ein Teilpolyeder von P'.

Je zwei Punkte einer Familie A_1 von A in P' kann man, nach Definition der „Familie“, durch einen in P' verlaufenden, zu B fremden Weg, also auch durch einen ebensolchen Streckenzug, verbinden. Man kann die Familien aber auch rein kombinatorisch durch die folgende Eigenschaft charakterisieren: je zwei Eckpunkte x und x' von A_1 kann man durch einen zu B fremden *Kantenzug von* P' miteinander verbinden.

In der Tat: S sei ein zu B fremder, in P' verlaufender Streckenzug von x nach x'; bei Durchlaufung von S notiere man in jedem Augenblick das Simplex *höchster Dimension* von P', in dem man sich befindet; die so entstehende Simplexreihe sei

$$x = x_1, x_2, \ldots, x_n = x'.$$

In dieser Reihe sind je zwei aufeinanderfolgende Simplexe inzident, d.h. es ist immer entweder x_i Seite von x_{i+1} oder x_{i+1} Seite von x_i; daraus folgt: ist e_i irgend ein Eckpunkt von x_i, e_{i+1} irgend ein Eckpunkt von x_{i+1}, so bestimmen e_i und e_{i+1} eine Kante von P'. Nun enthält jedes x_i einen Punkt, der nicht zu B gehört, nämlich einen Punkt von S; folglich können, wie wir oben bemerkt haben, nicht alle Ecken von x_i zu B gehören. Wir verstehen nun für jedes i unter e_i eine nicht zu B gehörige Ecke von x_i; insbesondere ist $e_1 = x$, $e_n = x'$; dann bilden die Kanten $e_1 e_2, e_2 e_3, \ldots, e_{n-1} e_n$ einen Kantenzug, der die Behauptung erfüllt.

Analog definiert man die „*Familien von B in* P'“ als die Durchschnitte von B mit den Komponenten von $P' - A$; man kann dann je zwei Eckpunkte einer solchen Familie durch einen zu A fremden Kantenzug von P' verbinden.

Wir betrachten insbesondere die Familien von A und B in z. Da z ein einfach geschlossenes Polygon ist, wechseln bei Durchlaufung von z die Familien von A mit denen von B ab; ihre Anzahlen sind daher gleich. Diese Familien seien A_i, B_i $(i = 1, 2, \ldots m)$.

Nun kann es vorkommen, daß zwei verschiedene Familien in z, etwa A_1, A_2, zur gleichen Familie in P gehören. Einen solchen Zustand wollen wir beseitigen; dies gelingt auf Grund des folgenden Hilfssatzes:

Hilfssatz I: Die Voraussetzung des Satzes B_2' sei erfüllt; A_1 und A_2 seien zwei verschiedene Familien in z, die zu derselben Familie in P gehören. Dann gibt es einen Zyklus $z_1 \subset P$ mit den folgenden beiden Eigenschaften: a) er wird durch f mit einem von 0 verschiedenen Grade abgebildet; b) die Anzahl der Familien von A und B in z_1 ist kleiner als die Familienzahl in z.

Beweis: a_1, a_2 seien Eckpunkte von A_1 bezw. A_2; da A_1 und A_2 derselben Familie in P angehören, können wir a_1 mit a_2 durch einen einfachen Kantenzug W verbinden, der fremd zu B ist. Wir verstehen unter einer „Brücke“ in W einen Teilstreckenzug von W, dessen Anfangs- und Endpunkt auf z liegen, und der im übrigen fremd zu z ist. W_1 sei die erste

Brücke, die man bei Durchlaufung von W in Richtung $\overrightarrow{a_1 a_2}$ antrifft. Durch ihren Anfangspunkt p und ihren Endpunkt q wird z in zwei einfache Streckenzüge zerlegt:

$$z = s_1 + s_2.$$

Von den beiden Zyklen

$$z_1 = s_1 + \overrightarrow{W_1},\ z_2 = s_2 + \overleftarrow{W_1}$$

wird, da $z = z_1 + z_2$ ist, wenigstens einer durch f mit von 0 verschiedenem Grade abgebildet; es habe etwa z_1 diese Eigenschaft, von der wir übrigens erst später Gebrauch machen werden.

Im Augenblick ist für uns die folgende Eigenschaft wichtig: Die Anzahl der Familien von A in z_1 ist nicht größer als die Familienzahl in z; in der Tat: wenn p', q' die ersten Punkte von B sind, die man von p bezw. von q aus auf s_1 erreicht, so liegt auf dem Streckenzug $p'\, q'$ von z_1, der W_1 enthält, höchstens eine Familie A'_1 von A in z_1, aber auf dem Streckenzug $p'\, q'$ von z, der s_2 enthält, mindestens eine Familie von A in z, nämlich gewiß A_1. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. z_1 besitzt weniger Familien als z. In diesem Fall ist der Hilfssatz bereits bewiesen.

2. z_1 besitzt ebenso viele Familien wie z. In diesem Fall liegt auf dem oben genannten, W_1 enthaltenden Streckenzug $p'\, q'$ von z_1 gewiß ein Eckpunkt a'_1 von A'_1; ferner liegt auf dem anderen, also W_1 nicht enthaltenden, Bogen $p'\, q'$ von z_1 die ganze Familie A_2, also der Punkt a_2. Nun sei W' der folgende Weg von a'_1 nach a_2: man läuft von a'_1 auf $\overrightarrow{p'\, q'}$ in Richtung $a'_1 q$, bis man das erste Mal W trifft — dies geschieht spätestens in q —, und dann auf dem Rest von W bis a_2. Dieser Streckenzug W' spielt für z_1 dieselbe Rolle wie W für z. Die Anzahl der Brücken von W' ist aber bestimmt kleiner als die Anzahl der Brücken von W, da ja insbesondere der Streckenzug W_1 die Eigenschaft einer Brücke verloren hat.

Wir haben also, wenn wir z durch z_1 ersetzen, entweder — Fall 1 — die Anzahl der Familien vermindert, oder — Fall 2 — wir sind bei gleichbleibender Familienzahl zu einem, B vermeidenden, A'_1 mit A_2 verbindenden Kantenzug W' gekommen, der weniger Brücken enthält als der ursprüngliche Verbindungsweg W zwischen A_1 und A_2. Wiederholen wir das Verfahren mehrere Male, so kann der Fall 2 nur endlich oft eintreten, da W nur endlich viele Brücken enthält; es tritt also gewiß einmal der Fall 1 ein.

Damit ist der Hilfssatz I bewiesen. Durch seine wiederholte Anwendung gelangt man zu einem Zyklus z mit den folgenden Eigenschaften: 1) z wird durch f mit von 0 verschiedenem Grade abgebildet; 2) sind A_i und A_j zwei voneinander verschiedene Familien in z, so gehören sie auch nicht zu derselben Familie in P, und das Analoge gilt für die Familien von B.

Hilfssatz II: P sei durch f simplizial auf R abgebildet, und es gebe einen Zyklus $z \subset P$ mit den eben genannten Eigenschaften 1) und 2); dann lassen sich zwei Punkte p und q in P und zwei Teilpolyeder U und V von P mit den folgenden drei Eigenschaften angeben: α) U und V sind zueinander fremd; β) p und q werden weder durch U noch durch V voneinander getrennt; γ) p und q werden durch $U+V$ voneinander getrennt.

Beweis: Das einfach geschlossene Polygon R wird durch die Punkte a und b in zwei Bögen L_1 und L_2 zerlegt. Unter den Bögen, in die z durch die zu $A+B$ gehörigen Punkte zerlegt wird, unterscheiden wir zwei Arten: die „unwesentlichen" Bögen, von denen beide Endpunkte zu A oder beide zu B gehören, und die „wesentlichen" Bögen, von denen je ein Endpunkt zu A, der andere zu B gehört. Jeder unwesentliche Bogen wird, da seine Endpunkte auf a (bezw. b), aber keine seiner Punkte auf b (bezw. a) abgebildet werden, mit dem Grade 0 auf einen echten Teil von R abgebildet; jeder wesentliche Bogen wird entweder auf L_1 oder auf L_2 mit dem Grade ± 1 abgebildet. Aus der Eigenschaft 1) von z folgt daher: es gibt sowohl wenigstens einen wesentlichen Bogen L'_1, der auf L_1, als auch wenigstens einen wesentlichen Bogen L'_2, der auf L_2 abgebildet wird. Es muß daher bei der Durchlaufung von z ein solches Paar L'_1, L'_2 geben, zwischen denen kein weiterer wesentlicher Bogen liegt; dann liegt zwischen ihnen außer etwa vorhandenen unwesentlichen Bögen genau eine Familie von A oder eine Familie von B; wir dürfen annehmen, es sei die Familie A_1. Ferner sei B_1 die an L'_1 anschließende Familie von B.

Jetzt seien p und q innere Punkte von L'_1 und L'_2; U und V seien diejenigen Familien von A und B in P, zu denen A_1 bezw. B_1 gehören. Wir behaupten, daß p, q, U, V die in dem Hilfssatz genannten Eigenschaften α, β, γ besitzen. α folgt unmittelbar aus $U \subset A$, $V \subset B$.

Beweis von β: Infolge der Eigenschaft 2) von z sind A_1 und B_1 die Durchschnitte von U bezw. V mit z. Daher ist derjenige Bogen pq von z, welcher A_1 nicht enthält, fremd zu U, derjenige Bogen pq, welcher B_1 nicht enthält, fremd zu V.

Beweis von γ: W sei ein Streckenzug in P, der p mit q verbindet; wir haben zu zeigen, daß er $U+V$ trifft. Da von den Punkten $f(p)$, $f(q)$ der eine in L_1, der andere in L_2 liegt, liegt wenigstens einer der Punkte a und b

auf $f(W)$, folglich wird $A+B$ von W getroffen; bei der Durchlaufung von W in Richtung $\overrightarrow{pq}$ sei s der erste Schnittpunkt mit $A+B$. Ist $s \subset A$, so kann man von s auf W zurück bis p und dann auf L_1' bis A_1 laufen, ohne B zu treffen; folglich gehört s zu U. Ist $s \subset B$, so laufe man ebenfalls auf W zurück bis p und dann auf L_1' bis B_1; da man dabei A nicht trifft, gehört s zu V.

Damit ist der Hilfssatz II bewiesen. Der folgende Hilfssatz liefert unmittelbar den Beweis des Satzes B_2'.

Hilfssatz III[11]: In dem zusammenhängenden Polyeder P gebe es ein Punktepaar p, q und zwei Teilpolyeder U, V mit den im Hilfssatz II genannten Eigenschaften α, β, γ. Dann gibt es eine Zerlegung $P = P_1 + P_2$ in Teilpolyeder P_1, P_2, so daß jedes von ihnen zusammenhängend, ihr Durchschnitt $P_1 \cdot P_2$ nicht zusammenhängend ist.

Beweis: U und V gehören einer festen Simplizialzerlegung von P an, an der nichts geändert wird. Unter allen, aus Simplexen dieser Zerlegung aufgebauten Teilpolyedern von $U+V$, welche auch noch die Eigenschaft haben, p von q zu trennen, sei S eines mit möglichst wenig Simplexen. $G_1, G_2, \ldots G_m$ seien die Komponenten von $P - S$, und zwar sei $p \subset G_1$, $q \subset G_2$; die abgeschlossene Hülle von G_i nennen wir wie üblich $\overline{G}_i$; sie ist ein Polyeder. Wir setzen $P_1 = \overline{G}_1$, $P_2 = \overline{G}_2 + \ldots \overline{G}_m$ und werden zeigen, daß P_1 und P_2 die Behauptung erfüllen.

$P_1 + P_2 = P$ ist selbstverständlich. Ferner ist klar, daß P_1 zusammenhängend ist. Zu zeigen bleibt zweierlei: 1) P_2 ist zusammenhängend, 2) $P_1 \cdot P_2$ ist nicht zusammenhängend.

Für jedes i gilt

$$\overline{G}_i - G_i \subset S \tag{6}$$

sowie infolge des Zusammenhanges von P

$$\overline{G}_i - G_i \neq 0; \tag{7}$$

aus (6) und

$$\overline{G}_i \cdot G_j = 0 \quad (i \neq j)$$

folgt

$$\overline{G}_i \cdot \overline{G}_j \subset S \quad (i \neq j) \tag{8}$$

[11]) Man vergleiche *C. Kuratowski*, Fund. Math. XIII (1929), p. 309 (II 4).

Darüber hinaus ergibt sich aus der Minimaleigenschaft von S

$$(9) \qquad \overline{G}_1 \cdot \overline{G}_2 = S;$$

denn wäre $\overline{G}_1 \cdot \overline{G}_2$ ein echter Teil von S, so wäre er, da alle auftretenden Polyeder aus Simplexen derselben festen Zerlegung von P bestehen, ein echtes Teilpolyeder von S, welches p und q trennte, im Widerspruch zu der Definition von S.

Nach (6) und (7) enthält jedes $\overline{G}_i$ einen Punkt von S, also nach (9) einen Punkt von $\overline{G}_2$; daher folgt aus der Tatsache, daß $\overline{G}_2$ zusammenhängend ist, der Zusammenhang von $P_2 = \overline{G}_2 + \ldots + \overline{G}_m$.

Aus (8) und (9) folgt $P_1 \cdot P_2 = S$, und wir haben zu zeigen, daß S nicht zusammenhängend ist. Nun folgt aus $S \subset U + V$:

$$(10) \qquad S = S \cdot U + S \cdot V;$$

da U und V zueinander fremd sind, ist (10) eine Zerlegung von S in zwei fremde Polyeder, und wir haben uns nur noch davon zu überzeugen, daß keines von ihnen leer ist. Aber wäre etwa $S \cdot U = 0$, so wäre $S = S \cdot V$, im Widerspruch zu der Tatsache, daß p von q zwar durch S, aber nicht durch V, also erst recht nicht durch $S \cdot V$ getrennt wird.

Damit ist der Hilfssatz III bewiesen, und zugleich ist der Beweis des Satzes B_2' erbracht. Denn, um den Beweisgang zusammenzufassen, es ergibt sich aus den Voraussetzungen von B_2' auf Grund des Hilfssatzes I zunächst die Existenz eines Zyklus z, der die beiden Voraussetzungen des Hilfssatzes II erfüllt; infolgedessen existieren Punkte p, q und Polyeder U, V, auf die wir den Hilfssatz III anwenden können; die Behauptung dieses Hilfssatzes ist mit der Behauptung des Satzes B_2' identisch.

(Eingegangen den 5. Mai 1934.)