Über die Krümmung einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit im vierdimensionalen Euklidischen Raum.

Über die Krümmung einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit im vierdimensionalen Euklidischen Raum

Von W. Scherrer, Bern

Das Gauß'sche Krümmungsmaß einer Fläche im dreidimensionalen Euklidischen Raum läßt sich bekanntlich sehr anschaulich definieren als das Verhältnis des Flächenelements der sphärischen Abbildung zum Flächenelement der gegebenen Fläche. Diese Definition läßt sich übertragen auf $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeiten, welche in einen n-dimensionalen Euklidischen Raum eingebettet sind[1]). Wesentlich anders liegen aber die Verhältnisse, sobald die Dimensionszahl der eingebetteten Mannigfaltigkeit um mehr als eine Einheit von der Dimensionszahl des Einbettungsraumes abweicht[2]). Der einfachste Fall dieser

[1]) Eine Darstellung dieser Analogie findet man im sechsten Kapitel des absoluten Differentialkalkül von *Levi-Civita* (Springer, Berlin 1928). Entgegen einer Behauptung dieses Autors ist das dabei gewonnene Krümmungsmaß nur von den Koeffizienten der ersten Fundamentalform abhängig. Damit ist allerdings noch nicht gesagt, daß eine neue absolute Invariante vorliegt, denn in mehr als 3 Dimensionen haben die die „Fläche" darstellenden Koordinatenfunktionen noch den Einbettungsrelationen zu genügen. Übrigens läßt sich für $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeiten im n-dimensionalen Euklidischen Raum die Analogie zum klassischen Fall wesentlich weiterführen, wie ich bei anderer Gelegenheit zeigen möchte. Bekanntlich existiert in diesem Falle eine dem klassischen Falle vollkommen entsprechende zweite Hauptform. Nun kann man, gestützt auf die Simultaninvarianten der beiden Hauptformen im ganzen $n-1$ Krümmungsmaße aufstellen, von denen $n-2$ effektiv nur von den Koeffizienten der ersten Hauptform abhängen. Ebenso gilt der Satz von Rodrigues über Krümmungslinien und der Satz von Dupin über Orthogonalsysteme.

[2]) Herr *H. Hopf*, Zürich, hatte die Freundlichkeit, mich darauf hinzuweisen, daß schon *W. Killing* in seinem Buche über „Die Nichteuklidischen Raumformen in analytischer Behandlung" (Teubner, Leipzig 1885) dieses Problem in einer Weise behandelt hat, die eventuell Interesse verdient. Killing gelangt auf anderem Wege zur Aufstellung der in Anmerkung 1) erwähnten Krümmungsmaße und gibt hierauf eine Methode an, um entsprechende Größen für eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit zu berechnen, die in einen n-dimensionalen Euklidischen Raum eingebettet ist. Diese Methode läßt sich kurz folgendermaßen charakterisieren: Die Tangentialhyperebene E_m in einem bestimmten Punkte P der zu untersuchenden Hyperfläche Φ_m wird mit Hilfe eines nicht in E_m liegenden Vektors $\mathfrak{y}$ erweitert zu einer $(m+1)$-dimensionalen Hyperebene $E_{m+1}(\mathfrak{y})$. Hierauf wird die Hyperfläche Φ_m normal projiziert auf diese Hyperebene. Die erhaltene Projektion ψ_m ist also eine m-dimensionale Hyperfläche, die in den $(m+1)$-dimensionalen Raum $E_{m+1}(\mathfrak{y})$ eingebettet ist. Nun kann man die unter Anmerkung 1) erwähnten Krümmungsgrößen berechnen, deren Zahl jetzt natürlich m ist und die bezeichnet sein mögen durch $K_1(\mathfrak{y}), K_2(\mathfrak{y}), \ldots K_m(\mathfrak{y})$. Aus diesen Größen gewinnt Killing durch geeignete Mittelbildung seine Krümmungsmaße $K_1, K_2, \ldots K_m$ und weist nach, daß dieselben mit Ausnahme eines einzigen nur von den Koeffizienten des Linienelements der Hyperfläche abhängen. Dabei konstatiert der Autor, daß ein Teil dieser Größen — diejenigen mit geradem Index — unabhängig ist von der Differenz $n-m$. Für diese Größen wäre damit die unter 1) aufgeworfene Frage nach der Existenz absoluter Invarianten in positivem Sinne beantwortet, denn man kann die Dimensionszahl n des Einbettungsraumes immer so hoch annehmen, daß keine Einbettungsbedingungen mehr nötig sind.

Art liegt offenbar vor, wenn eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit in einen vierdimensionalen Euklidischen Raum eingebettet wird. Diesen Fall, der überdies durch besondere Symmetrieverhältnisse ausgezeichnet ist, wollen wir hier betrachten und zeigen, daß sich für ihn Krümmungen definieren lassen, die in gewissem Sinne der eingangs erwähnten Definition an die Seite gestellt werden können.

Es sei also eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit — eine Fläche, wie wir in Zukunft kurz sagen wollen — in einem vierdimensionalen Euklidischen Raum mit Hilfe der Parameter u und v dargestellt durch ihren Ortsvektor

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v) = [\, x_1(u, v),\ x_2(u, v),\ x_3(u, v),\ x_4(u, v) \,] \tag{1}$$

Die Tangentialebene dieser Fläche läßt sich dann charakterisieren mit Hilfe des Flächentensors

$$(F^{ik}) = (F^{12}, F^{13}, F^{14}, F^{23}, F^{24}, F^{34}) \tag{2}$$

dessen Komponenten gegeben sind durch die Determinanten der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u}, & \dfrac{\partial x_2}{\partial u}, & \dfrac{\partial x_3}{\partial u}, & \dfrac{\partial x_4}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial x_1}{\partial v}, & \dfrac{\partial x_2}{\partial v}, & \dfrac{\partial x_3}{\partial v}, & \dfrac{\partial x_4}{\partial v} \end{matrix} \right\| \tag{3}$$

Die Hochstellung der Indizes in (2), die ja der Indexstellung in (1) entgegensteht, erfolgt nur mit Rücksicht auf eine bequeme Schreibweise der Ableitungen F_u^{ik} und F_v^{ik}.

Gestützt auf die Tatsache, daß der Ausdruck

$$\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{4} F^{ik} F^{ik} \equiv F \tag{4}$$

invariant ist gegenüber orthogonalen Transformationen des Einbettungsraumes, könnte der Tensor (2) auch gedeutet werden als Vektor in einem 6-dimensionalen Euklidischen Raum. Doch wäre diese Darstellung unvollständig, da der Tensor (2) auch noch die identisch verschwindende Invariante

$$F^{41} F^{23} + F^{42} F^{31} + F^{43} F^{12} \equiv \Phi \tag{5}$$

besitzt. Die durch den Flächentensor gegebene Darstellung der vierdimensionalen Drehgruppe ist also charakterisiert durch die simultane Invarianz der beiden quadratischen Formen (4) und (5). Hierbei ist noch zu beachten, daß das identische Verschwinden der Invariante (5) für die Beurteilung der Transformationsweise keine Rolle spielt, da dieser Ausdruck bei jedem alternierenden Tensor invariant ist gegenüber eigentlichen orthogonalen Transformationen. Wir können also einen beliebigen alternierenden Tensor betrachten und wollen seine Transformationsweise studieren, indem wir an die Stelle seiner Komponenten 6 neue Variable treten lassen vermöge der Gleichungen

$$\begin{aligned} Y_1 &= F^{41} + F^{23}\,; & Z_1 &= F^{41} - F^{23} \\ Y_2 &= F^{42} + F^{31}\,; & Z_2 &= F^{42} - F^{31} \\ Y_3 &= F^{43} + F^{12}\,; & Z_3 &= F^{43} - F^{12} \end{aligned} \tag{6}$$

Wir sind damit übergegangen zu einer äquivalenten Darstellung, die offenbar auf den besonderen Symmetrieverhältnissen des betrachteten Falles beruht. An Stelle der Invarianten (4) und (5) treten jetzt die Invarianten

$$Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 = F + 2\,\Phi; \quad Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = F - 2\,\Phi; \tag{7}$$

Stellen wir nun die Transformation, welche die neuen Variablen unter dem Einfluß einer Drehung des vierdimensionalen Raumes erfahren, dar durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} Y_i &= \sum_{k=1}^{3} a_{ik}\, Y_k' + \sum_{k=1}^{3} b_{ik}\, Z_k' \\ Z_i &= \sum_{k=1}^{3} c_{ik}\, Y_k' + \sum_{k=1}^{3} d_{ik}\, Z_k' \end{aligned} \tag{8}$$

und bringen wir dabei die Invarianz der Formen (7) zur Geltung, so gelangen wir zum Resultat, daß die Matrizen (a_{ik}) und (d_{ik}) orthogonal sind, während die Matrizen (b_{ik}) und (c_{ik}) verschwinden.

Zum Beweise betrachten wir die aus der Invarianz der Formen (7) folgende Gleichung

$$Y_i Y_i = a_{ik}\, a_{il}\, Y_k'\, Y_l' + 2\, a_{ik}\, b_{il}\, Y_k'\, Z_l' + b_{ik}\, b_{il}\, Z_k'\, Z_l' \equiv Y_i'\, Y_i' \tag{9}$$

in der über doppelt auftretende Indizes zu summieren ist und argumentieren folgendermaßen:

1. Aus $Z_1' = Z_2' = Z_3' = 0$ folgt die Relation

$$a_{ik}\, a_{il} = \delta_{kl}$$

wo δ_{kl} das bekannte Symbol für die Einheitsmatrix bedeutet. Diese Relation bildet den Ausdruck für die Orthogonalität der Matrix (a_{ik}).

2. Aus $Y_1' = Y_2' = Y_3' = 0$ folgt die Relation

$$b_{ik}\, b_{il} = 0$$

3. Zufolge der unter 1. und 2. gewonnenen Relationen reduziert sich die Gleichung (9) auf die Gestalt

$$2\, a_{ik}\, b_{il}\, Y_k'\, Z_l' \equiv 0$$

und hieraus folgt

$$a_{ik}\, b_{il} = 0$$

Da nun nach 1. die Matrix (a_{ik}) nicht singulär sein kann, folgt aus der letzten Gleichung das Verschwinden der Matrix (b_{ik}). Ganz analog beweist man die Behauptungen über die Matrizen (c_{ik}) und (d_{ik}).

Indem wir bei unserer Verabredung betreffend die Summation über doppelte Indizes bleiben, können wir das erzielte Resultat durch folgende Gleichungen zum Ausdruck bringen:

$$\begin{aligned} Y_i &= a_{ik}\, Y_k'; & a_{ik}\, a_{il} &= \delta_{kl}; \\ Z_i &= d_{ik}\, Z_k'; & d_{ik}\, d_{il} &= \delta_{kl}; \end{aligned} \tag{10}$$

In Worten: Die betrachtete Darstellung des alternierenden Tensors ist das Produkt zweier dreidimensionalen Drehgruppen. Wir können also die Variablentripel

$$\begin{aligned} (Y_1, Y_2, Y_3) &= \mathfrak{Y} \\ (Z_1, Z_2, Z_3) &= \mathfrak{Z} \end{aligned}$$

auffassen als gewöhnliche Vektoren in einem dreidimensionalen Euklidischen Bildraum und auf sie die elementare Vektorrechnung anwenden.

Aus (7) folgt unmittelbar

$$\Phi = \frac{1}{4}\,(\mathfrak{Y}^2 - \mathfrak{Z}^2) \tag{11}$$

Damit der Tensor (F^{ik}) einen Flächentensor im engern Sinne darstellt, ist, wie schon erwähnt, das Verschwinden des Ausdrucks (5), d. h. der

Invariante Φ notwendig und hinreichend. Dies ergibt nach (11) die Bedingung

$$\mathfrak{Y}^2 = \mathfrak{Z}^2 \tag{12}$$

Da es nur darauf ankommt, die Stellung der Tangentialebene zu kennen, so wird man die Vektoren $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ normieren, d. h. also durch die Einheitsvektoren

$$\mathfrak{y} = \frac{\mathfrak{Y}}{|\mathfrak{Y}|} \quad \text{und} \quad \mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{Z}}{|\mathfrak{Z}|} \tag{13}$$

ersetzen, wo mit $|\mathfrak{Y}|$ und $|\mathfrak{Z}|$ die gewöhnlichen Beträge der Vektoren gemeint sind. Offenbar gilt nach (7) und (12)

$$|\mathfrak{Y}| = |\mathfrak{Z}| = |\sqrt{F}| \tag{14}$$

Während also im dreidimensionalen Falle ein Flächentensor äquivalent ist mit einem Einheitsvektor, nämlich der Normalen, so kann er im vierdimensionalen Falle ersetzt werden durch die beiden unabhängigen Einheitsvektoren unseres dreidimensionalen Bildraums: $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$. Wir haben gewissermaßen zwei sphärische Abbildungen und können nun ihre Flächenelemente

$$|[\mathfrak{y}_u, \mathfrak{y}_v]|\, du\, dv \quad \text{und} \quad |[\mathfrak{z}_u, \mathfrak{z}_v]|\, du\, dv$$

vergleichen mit dem Element

$$|\sqrt{F}|\, du\, dv$$

der gegebenen Fläche. Auf diese Weise resultieren zwei Krümmungsmaße, die wir zufolge (14) darstellen können durch

$$G = \frac{|[\mathfrak{y}_u, \mathfrak{y}_v]|}{|\mathfrak{Y}|}\,; \tag{15}$$

$$H = \frac{|[\mathfrak{z}_u, \mathfrak{z}_v]|}{|\mathfrak{Z}|}\,; \tag{16}$$

Genau wie im dreidimensionalen Falle können wir nun auch hier die Zähler der Ausdrücke für G und H unter Einführung eines Vorzeichens rational durch $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ ausdrücken:

Aus $\mathfrak{y}^2 = 1$ folgt $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_u = 0$ und $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_v = 0$, also $[\mathfrak{y}_u, \mathfrak{y}_v] = \lambda\, \mathfrak{y}$ mit $|[\mathfrak{y}_u, \mathfrak{y}_v]| = |\lambda|$. Demnach gilt $\mathfrak{y}\, [\mathfrak{y}_u, \mathfrak{y}_v] = \lambda$. Analoges ergibt sich für den

Vektor $\mathfrak{z}$. Wir verleihen also den Größen G und H ein Vorzeichen, indem wir sie statt durch (15) und (16) durch die Gleichungen

$$G = \frac{\mathfrak{y}\,[\mathfrak{y}_u\,,\,\mathfrak{y}_v]}{|\,\mathfrak{Y}\,|}\;; \tag{15'}$$

$$H = \frac{\mathfrak{z}\,[\mathfrak{z}_u\,,\,\mathfrak{z}_v]}{|\,\mathfrak{Z}\,|}\;; \tag{16'}$$

definieren. Zum Zwecke der expliciten Darstellung greifen wir zurück auf (13) und erhalten

$$\mathfrak{y}_u = \left(\frac{\mathfrak{Y}}{|\,\mathfrak{Y}\,|}\right)_u = \frac{\mathfrak{Y}_u}{|\,\mathfrak{Y}\,|} - \frac{|\,\mathfrak{Y}\,|_u}{\mathfrak{Y}^n}\cdot\mathfrak{Y}$$

und einen analogen Ausdruck für $\mathfrak{y}_v$. Daraus folgt

$$\mathfrak{y}\,[\mathfrak{y}_u\,,\,\mathfrak{y}_v] = \frac{\mathfrak{Y}\,[\mathfrak{Y}_u\,,\,\mathfrak{Y}_v]}{(\mathfrak{Y}^2)^{3/2}}$$

Entsprechendes gilt für $\mathfrak{z}$.

Schließlich erhalten wir aus (15′) und (16′) unter Berücksichtigung von (6) und (14) für die beiden Krümmungsmaße die endgültigen Ausdrücke

$$G = \frac{\begin{vmatrix} F^{41}+F^{23}\,, & F^{42}+F^{31}\,, & F^{43}+F^{12} \\ F^{41}_u+F^{23}_u\,, & F^{42}_u+F^{31}_u\,, & F^{43}_u+F^{12}_u \\ F^{41}_v+F^{23}_v\,, & F^{42}_v+F^{31}_v\,, & F^{43}_v+F^{12}_v \end{vmatrix}}{F^2} \tag{17}$$

$$H = \frac{\begin{vmatrix} F^{41}-F^{23}\,, & F^{42}-F^{31}\,, & F^{43}-F^{12} \\ F^{41}_u-F^{23}_u\,, & F^{42}_u-F^{31}_u\,, & F^{43}_u-F^{12}_u \\ F^{41}_v-F^{23}_v\,, & F^{42}_v-F^{31}_v\,, & F^{43}_v-F^{12}_v \end{vmatrix}}{F^2} \tag{18}$$

bei deren Auswertung die Größe F nach (4) zu berechnen ist.

Nun besitzt jede Fläche eine biegungsinvariante Gauß'sche Krümmung und es erhebt sich also die Frage, wie diese Krümmung — die wir mit K bezeichnen wollen — mit den eben definierten Größen G und H zusammenhängt. Die Koeffizienten der Fundamentalform e, f und g sind definiert durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} e &= \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial x_i}{\partial u}\,\frac{\partial x_i}{\partial u} \\ f &= \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial x_i}{\partial u}\,\frac{\partial x_i}{\partial v} \\ g &= \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial x_i}{\partial v}\,\frac{\partial x_i}{\partial v} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

und die Gauß'sche Biegungsinvariante K berechnet sich aus der Gleichung

$$\begin{aligned} (eg - f^2)^2\, K = &\begin{vmatrix} -\tfrac{1}{2} g_{uu} + f_{uv} - \tfrac{1}{2} e_{vv}\,, & \tfrac{1}{2} e_u\,, & f_u - \tfrac{1}{2} e_v \\ f_v - \tfrac{1}{2} g_u\,, & e\,, & f \\ \tfrac{1}{2} g_v\,, & f\,, & g \end{vmatrix} \\ - &\begin{vmatrix} 0\,, & \tfrac{1}{2} e_v\,, & \tfrac{1}{2} g_n \\ \tfrac{1}{2} e_v\,, & e\,, & f \\ \tfrac{1}{2} g_u\,, & f\,, & g \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{20}$$

Wir behaupten nun, daß der Zusammenhang zwischen den Größen G, H und K gegeben ist durch die Gleichung

$$K = \frac{1}{2}\,(G - H) \tag{21}$$

Die zur Verifikation dieser Behauptung notwendige Rechnung läßt sich weitgehend vereinfachen durch folgendes Verfahren. Man wähle einen beliebigen aber festen Punkt der Fläche aus und richte daselbst das Parametersystem so ein, daß die Tangentenvektoren an die Parameterlinien in diesem Punkte sich spezialisieren auf

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_u &= (1,\ 0,\ 0,\ 0) \\ \mathfrak{x}_v &= (0,\ 1,\ 0,\ 0) \end{aligned}$$

was natürlich leicht und auf unendlich viele Weisen möglich ist. Wenn man nun die linke und die rechte Seite der Gleichung (21) berechnet, erhält man ein und denselben Ausdruck, nämlich

$$\frac{\partial^2 x_3}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial^2 x_3}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 x_3}{\partial u \partial v}\right)^2 + \frac{\partial^2 x_4}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial^2 x_4}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 x_4}{\partial u \partial v}\right)^2$$

Hieraus folgt, daß die Ausdrücke K und $\frac{1}{2}(G - H)$ in jedem Punkte der Fläche denselben Wert haben und demnach dieselbe Funktion darstellen, w. z. b. w.

Hier möge noch eine Bemerkung Platz finden über die Auszeichnung des Index 4 bei der Einführung der neuen Variablen Y_1, Y_2, Y_3, Z_1, Z_2, Z_3 vermittels der Gleichungen (6). Daß sie von sekundärer Bedeutung ist, ersieht man am besten an der Wirkung, welche die Vertauschung irgend zweier Indizes auf die durch (17) und (18) definierten Krümmungsmaße ausübt. Unter ihrem Einfluß geht — wie man leicht nachprüft — einfach G über in $-H$ und H über in $-G$. Die Größe $\frac{1}{2}(G - H) = K$ ist also gegenüber beliebigen Permutationen der Indizes invariant. Es liegt nahe, eventuell neben dieser Größe den Ausdruck $\frac{1}{2}(G + H)$ zu benutzen, welcher gegenüber Indexpermutationen bis auf das Vorzeichen invariant bleibt.

Zum Schluß sei noch auf das Beispiel[3])

$$\mathfrak{x} = (\cos u \cos v,\ \cos u \sin v,\ \sin u \cos v,\ \sin u \sin v)$$

hingewiesen, durch welches eine ganz im Endlichen verlaufende geschlossene Fläche dargestellt wird, deren Biegungsinvariante K in allen Punkten verschwindet. Die Anwendung der Formeln (17) und (18) auf dieses Beispiel ergibt, daß sogar die Krümmungsmaße G und H auf der Fläche identisch gleich Null sind.

(Eingegangen den 8. September 1934.)

[3]) Siehe *Hilbert - Cohn - Vossen*, Anschauliche Geometrie, Seite 302 (Springer, Berlin 1932).