# Ueber Fluchtlinientafeln von Beziehungen nomographisch dritter und vierter Ordnung.

# Ueber Fluchtlinientafeln von Beziehungen nomographisch dritter und vierter Ordnung

Von E. VÖLLM, Zürich

## 1. Einleitung

Durch Arbeiten von Clark[1]), d'Ocagne[2]) Soreau[3]) u. A. ist gezeigt worden, daß, abgesehen von Degenerationsfällen, alle Beziehungen zwischen drei Variablen von der nomographischen Ordnung 3 und 4 durch Fluchtlinientafeln darstellbar sind. Für die vierte Ordnung bestehen diese Nomogramme im allgemeinen aus zwei Leitern auf demselben nichtdegenerierten Kegelschnitt und einer dritten allgemeinen Leiter, in Spezialfällen aus zwei geradlinigen und einer allgemeinen Leiter. Jede Beziehung dritter Ordnung gestattet sowohl Tafeln der einen als auch der andern dieser beiden Arten und die dritte Leiter ist in beiden Fällen geradlinig. — Zweck der nachstehenden Ausführungen ist, durch konsequente Verwendung einiger bekannter projektiver Grundbegriffe diese bekannten Sätze und die zugehörigen Konstruktionsregeln einheitlich und, wie mir scheint, einfacher zu begründen, als es bisher geschah[4]).

---

Wir betrachten Beziehungen zwischen drei Variablen $z_1$, $z_2$, $z_3$ und bezeichnen mit $f_i$, $g_i$, $x_i$ usw. Funktionen von $z_i$, mit $f_{ik}$ eine Funktion von $z_i$ und $z_k$ und mit $f_{123}$ eine Funktion der drei Variablen. Unter $f_i$ und $f_k$ sind im allgemeinen verschiedene Funktionen der beiden Variablen $z_i$, $z_k$ zu verstehen. Eine Kurve der $(x,y)$-Ebene mit der Parameterdarstellung $x_i$, $y_i$, deren Punkte mit den Werten der Variablen $z_i$ kotiert sind, heißt Funktionsleiter $(z_i)$. Hat man drei Leitern $(z_i)$ und ordnet man solche Werte der drei Variablen einander zu, deren Bildpunkte auf einer Geraden (Fluchtgerade) liegen, so besteht zwischen ihnen eine Beziehung $f_{123} = 0$. Die Gesamtheit der drei Leitern mit der eben erwähnten Ablesevorschrift heißt eine *Fluchtlinientafel* dieser Be-

[1]) Revue de mécanique 1907/08.

[2]) A. M. t. XXI, p. 301. Siehe auch *d'Ocagne*, Traité de Nomographie, 1921, p. 201.

[3]) *Soreau*, Nomographie ou Traité des abaques, 1921, t. I, p. 258 et t. II, p. 75.

[4]) Die vorliegenden Betrachtungen bilden einen Teil der von der Eidgenössischen Technischen Hochschule genehmigten Habilitationsschrift des Verfassers.

ziehung. Eine Relation ist dann und nur dann durch eine Fluchtlinientafel darstellbar (kurz: darstellbar), wenn sie die Determinantenform

$$(1.1)\qquad | f_i,\ g_i,\ h_i | = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

annehmen kann, die ausdrückt, daß die drei Punkte $x_i = \frac{f_i}{h_i}$, $y_i = \frac{g_i}{h_i}$ in einer Geraden liegen.

Eine Beziehung heißt von der nomographischen Ordnung 2 in bezug auf $z_3$, wenn sie die Form

$$F_{12} \cdot f_3 + G_{12} \cdot g_3 + H_{12} = 0 ,$$

nicht aber, mit andern Funktionen, die Form

$$F_{12} \cdot f_3 + G_{12} = 0$$

annehmen kann. Die Beziehung heißt von der Ordnung 1 in bezug auf $z_3$, wenn sie in der zweiten Form darstellbar ist. Unter der Totalordnung einer Beziehung versteht man die Summe ihrer Ordnungen bezüglich der einzelnen Variablen. Nach (1.1) beträgt sie für darstellbare Beziehungen mindestens 3 und höchstens 6. Sind $a_0 \dots . c_3$ Konstanten, so gestattet die allgemeinste Beziehung vierter Ordnung die Form

$$(1.2)\qquad (a_0 f_1 f_2 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3) f_3 + (b_0 f_1 f_2 + b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3) g_3 + (c_0 f_1 f_2 + c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3) = 0$$

nicht aber die Form

$$(1.3)\qquad (a_0 f_1 f_2 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3) f_3 + (b_0 f_1 f_2 + b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3) = 0,$$

die die allgemeinste Beziehung dritter Ordnung ist.

Eine Beziehung heißt degeneriert, wenn sie in Beziehungen zwischen zwei Veränderlichen oder Gleichungen für eine zerfällt. Ein spezielles Wertepaar $(\bar{z}_i, \bar{z}_k)$ heißt für eine Beziehung kritisch, wenn dafür die dritte Variable unbestimmt wird. In einer Fluchtlinientafel trifft dies z. B. zu für die beiden Quoten eines Schnittpunktes zweier Leitern, der ebenfalls kritisch heißt.

Ist nach willkürlicher Wahl dreier Grundpunkte $E, N, U$ auf einer Geraden oder einem Kegelschnitt ein variabler Punkt $F$ mit dem Wert $f = (F, E, N, U)$ seiner projektiven Koordinate kotiert, so nennen wir die entstehende Leiter projektiv erster oder zweiter Ordnung in $f$. Ein Büschel, dessen Strahl von einem Parameter $f$ abhängt, heißt in $f$ projektiv, wenn es auf einer Geraden und folglich auf allen Geraden, die nicht durch den Träger gehen, eine projektive Leiter bestimmt. Projiziert man eine projektive Leiter zweiter Ordnung von einem ihrer Punkte aus, so sind Strahlbüschel und Projektion auf eine Gerade projektiv in derselben Variablen. Auf gegebenem Träger ist eine projektive Leiter durch drei kotierte Punkte bestimmt. Im Falle zweiter Ordnung erkennt man aber auch, daß vier kotierte Punkte $A, B, C, D$ mit Quoten $a, b, c, d$ Träger und Leiter bestimmen, etwa als Ort gleichkotierter Strahlen der in $f$ projektiven Strahlbüschel $A\,(B, C, D)$ und $B\,(A, C, D)$, von denen man je drei kotierte Strahlen kennt.

Zwei Punktreihen auf demselben oder verschiedenen Trägern sind dann und nur dann im üblichen Sinne projektiv, wenn ihre irgendwie definierten projektiven Koordinaten $x$ und $y$ einer bilinearen Beziehung genügen:

$$axy + bx + cy + d = 0. \tag{1.4}$$

Sie heißt singulär, wenn $ad - bc = 0$, in welchem Falle

$$\begin{aligned} y \text{ beliebig ist} \quad &\text{für } x = -\frac{c}{a} = -\frac{d}{b} \\ \text{und } x \text{ beliebig ist} \quad &\text{für } y = -\frac{b}{a} = -\frac{d}{c}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

## 2. Projektive Begründung der gebräuchlichsten Typen von Fluchtlinientafeln

Sehr häufig lassen sich in den Anwendungen auftretende Beziehungen in einer der beiden nachstehenden Formen schreiben, deren Totalordnung im allgemeinen 4, in Sonderfällen 3 beträgt:

$$f_1 g_3 + f_2 h_3 + f_3 = 0 \tag{2.1}$$

$$f_1 f_2 f_3 + (f_1 + f_2) g_3 + h_3 = 0 \tag{2.2}$$

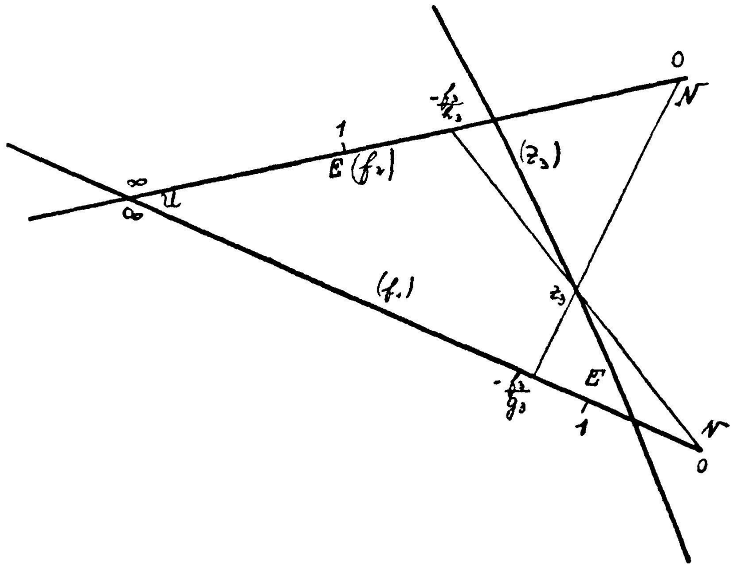
wo wir fortan $f_1, f_2$ und $z_3$ als Variablen betrachten. Beide definieren für festes $z_3$ eine bilineare Beziehung zwischen $f_1$ und $f_2$, die von $z_3$

abhängt, wenn nicht alle Verhältnisse $f_3 : g_3 : h_3$ konstant sind und die singulär ist, wenn

$$\text{im Falle (2.1)} \quad g_3 \cdot h_3 = 0, \quad \text{im Falle (2.2)} \quad g_3^2 - f_3 h_3 = 0 \text{ ist.}$$

Wir setzen voraus, daß diese Gleichungen für $z_3$ nicht identisch erfüllt seien, da sonst die zugehörigen Beziehungen degenerieren würden. Sie sind also Bestimmungsgleichungen für $z_3$, deren Lösungen zu kritischen Wertepaaren $(z_1, z_3)$ und $(z_2, z_3)$ gehören.

Das Paar $f_1 = \infty$, $f_2 = \infty$ befriedigt die Beziehung (2.1) für jedes $z_3$. Betrachtet man also $f_1$ und $f_2$ als projektive Koordinaten auf zwei Geraden der Ebene, deren Schnittpunkt auf beiden die Quote $\infty$ trägt, so definiert (2.1) für jedes $z_3$ perspektive Punktreihen. Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte $f_1$, $f_2$ schneiden sich also in einem Punkt, dem Perspektivzentrum, dem wir als Quote den festen Wert von $z_3$ erteilen. Die dritte Leiter ist der Ort dieses Punktes bei variablem $z_3$. Jede Beziehung (2.1) gestattet also Fluchtlinientafeln mit zwei projektiven Leitern erster Ordnung und einer dritten, im allgemeinen krummlinigen Leiter. Nimmt man (Figur 1)



Figur 1.

$$f_1 = 0, \text{ so wird } f_2 = -\frac{f_3}{h_3}$$

$$f_2 = 0, \text{ so wird } f_1 = -\frac{f_3}{g_3}$$

Man hat damit zwei Büschel mit den Punkten $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$ als Trägern, die in $\dfrac{f_3}{h_3}$, bezw. $\dfrac{f_3}{g_3}$ projektiv sind. Die Leiter $(z_3)$ ist der

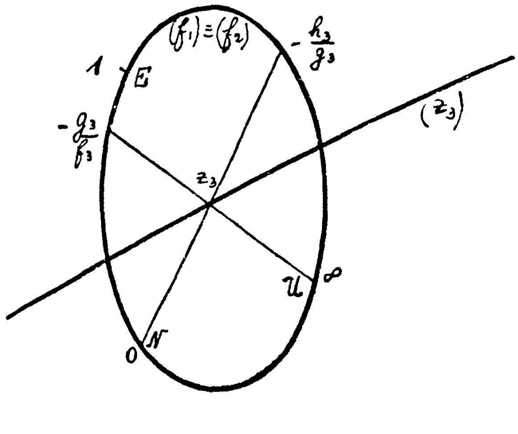
Ort der Schnitte gleichkotierter Strahlen. Ist einer dieser Quotienten von $z_3$ unabhängig, z. B. $\frac{f_3}{h_3} = k$, so ist die Gerade $f_1 = 0$, $f_2 = -k$ dritter Träger. In diesem Falle ist (2.1) von der Ordnung 3. Besteht eine Beziehung

$$\sum_{\substack{m_i \leq m \\ n_i \leq n}} \alpha_{ik} \left(\frac{f_3}{h_3}\right)^{m_i} \left(\frac{f_3}{g_3}\right)^{n_i} = 0$$

mit Konstanten $\alpha_{ik}$, so stehen die Strahlbüschel in $(m, n)$-deutiger Verwandtschaft und der dritte Träger ist eine algebraische Kurve von der Maximalordnung $m + n$, die sich auf $m + n - 1$ reduziert, wenn die Verbindungsgerade beider Träger sich selbst einfach entspricht. Sind insbesondere $f_3$, $g_3$, $h_3$ ganze lineare Funktionen einer gleichen Funktion, so genügen $\frac{f_3}{h_3}$ und $\frac{f_3}{g_3}$ einer bilinearen Beziehung und die Ordnung ist $1 + 1 - 1 = 1$.

Betrachtet man $f_1$ und $f_2$ als Quoten zweier Punkte $F_1$ und $F_2$ derselben projektiven Leiter zweiter Ordnung, so definiert (2.2) für festes $z_3$ eine Projektivität mit vertauschbarem Entsprechen, eine Involution zwischen $F_1$ und $F_2$. Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte schneiden sich in einem festen Punkt, dem Pol der Involution, dem wir den festen Wert von $z_3$ als Quote erteilen. Die dritte Leiter ist der Ort dieses Punktes bei variablem $z_3$. Jede Beziehung (2.2) gestattet also unter den oben genannten Voraussetzungen Fluchtlinientafeln mit zwei identischen projektiven Leitern zweiter Ordnung und einer dritten, im allgemeinen krummlinigen Leiter.

Für $f_1 = 0$ wird $f_2 = -\frac{h_3}{g_3}$, für $f_1 = \infty$ wird $f_2 = -\frac{g_3}{f_3}$




Figur 2.

Diese beiden, in $\frac{h_3}{g_3}$ bezw. $\frac{g_3}{f_3}$ projektiven Büschel, aber auch irgend zwei andere Büschel $f_1 =$ konst., bestimmen die dritte Leiter (Figur 2). Bezüglich der Ordnung ihres Trägers gelten analoge Bemerkungen wie für die Beziehungen vom Typus (2.1). Ist insbesondere einer der eben genannten Quotienten konstant oder sind $f_3$, $g_3$, $h_3$ ganze lineare Funktionen einer gleichen Funktion, so ist der dritte Träger geradlinig und (2.2) ist dritter Ordnung.

Die in den Anwendungen häufig auftretenden Beziehungen von der Form $f_1 + f_2 + f_3 = 0$ und $f_1 = f_2 \cdot f_3$ sind Sonderfälle sowohl von (2.1) als auch von (2.2). Sie lassen sich also durch Tafeln mit drei projektiven Leitern wiedergeben, darunter keine oder zwei von zweiter Ordnung. In beiden Fällen erweist sich nämlich die dritte Leiter als geradlinig und projektiv.

### 3. Allgemeine Beziehung vierter Ordnung

Setzt man in (1.2)

$$a_i f_3 + b_i g_3 + c_i = Q_i \qquad (i = 0, 1, 2, 3)$$

und ergänzt man die Matrix

$$\begin{Vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{Vmatrix}$$

durch die Zeile

$$\begin{Vmatrix} Q_0 & Q_1 & Q_2 & Q_3 \end{Vmatrix}$$

die eine lineare Kombination der drei ersten ist, so hat man die Clark'sche Identität

$$D_0 Q_0 - D_1 Q_1 + D_2 Q_2 - D_3 Q_3 = 0,$$

wenn mit $D_i$ die aus der dreizeiligen Matrix durch Unterdrückung der $i$-ten Spalte entstehende Determinante bezeichnet wird. Mit ihrer Hilfe beweist man, daß für $D_0 D_3 - D_1 D_2 \neq 0$ die Substitution $f_1 = \frac{D_0 + D_1 \varphi_1}{D_2 + D_3 \varphi_1}$ die Beziehung (1.2) überführt in

$$\varphi_1 f_2 F_3 + (\varphi_1 + f_2) G_3 + H_3 = 0,$$

wo $F_3$, $G_3$, $H_3$ die Form $\lambda f_3 + \mu g_3 + \nu$ haben. In den Tafeln dieser Relation vom Typus (2.2) hat man zwei identische projektive Leitern zweiter Ordnung $(\varphi_1)$ und $(f_2)$, deren erste auch in $f_1$ projektiv ist. Die beiden Quoten eines gleichen Punktes sind verbunden durch die Beziehung $\varphi_1 = f_2$ oder $f_1 = \frac{D_0 + D_1 f_2}{D_2 + D_3 f_2}$, die man zur Ermittlung dreier Quotenpaare benützt, um hierauf die Leitern mit Hilfe projektiver Büschel zu konstruieren.

Ist dagegen $D_0 D_3 - D_1 D_2 = 0$, so können doch nicht alle $D_i$ verschwinden, da sonst die drei Zeilen der Matrix linear abhängig würden, weshalb (1.2) von der Ordnung 3 wäre oder degenerieren würde. Ist also z. B. $D_3 = 0$, so entsteht aus (1.2) durch die Substitution

$$f_1 = \frac{1}{\varphi_1} + \frac{D_1}{D_3} \qquad f_2 = \frac{1}{\varphi_2} - \frac{D_2}{D_3}$$

eine Beziehung

$$\varphi_1 F_3 + \varphi_2 G_3 + H_3 = 0$$

vom Typus (2.1), in deren Tafeln die beiden ersten Leitern in $\varphi_1$ und $\varphi_2$ aber auch in $f_1$ und $f_2$ projektiv sind. Der Leiterschnittpunkt hat die Quoten $\varphi_1 = \varphi_2 = \infty$, also $f_1 = \frac{D_1}{D_3}$, $f_2 = -\frac{D_2}{D_3}$. Ist $D_3 = 0$, so ist ein anderes $D_i \neq 0$ und man wird auf den behandelten Fall zurückgeführt, indem man die vorgelegte Beziehung dividiert durch $f_1$, oder $f_2$ oder $f_1 \cdot f_2$.

## 4. Allgemeine Beziehung dritter Ordnung

Beziehungen vom Typus (1.3) lassen sich als Spezialfälle von Beziehungen (1.2) behandeln, mit willkürlichen Konstanten $b_i$ und $g_3 = 0$. Zu den allgemeinsten, auf diesem Wege bisher erhaltenen Ergebnissen gelangt man durch die nachfolgenden einfachen projektiven Ueberlegungen.

Setzt man
$$F_{12} = a_0 f_1 f_2 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3$$
$$G_{12} = b_0 f_1 f_2 + b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3$$

so wird aus (1.3) die Beziehung

$$F_{12} f_3 + G_{12} = 0. \tag{4.1}$$

Dieses Buschel von bilinearen Beziehungen zwischen $f_1$ und $f_2$ ist von $f_3$ abhängig, wenn wir voraussetzen, daß sich $F_{12}$ und $G_{12}$ nicht nur um einen konstanten Faktor unterscheiden. (1.3) läßt sich auch schreiben:

$$f_1 f_2 (a_0 f_3 + b_0) + f_1 (a_1 f_3 + b_1) + f_2 (a_2 f_3 + b_2) + (a_3 f_3 + b_3) = 0$$

ist also für jedes $f_3$ singulär, wenn die Gleichung

$$(a_0 a_3 - a_1 a_2) f_3^2 + (a_0 b_3 + a_3 b_0 - a_1 b_2 - a_2 b_1) f_3 + (b_0 b_3 - b_1 b_2) = 0 \tag{4.2}$$

in bezug auf $f_3$ eine Identität ist, wenn also simultan

$$a_0 a_3 - a_1 a_2 = 0, \qquad b_0 b_3 - b_1 b_2 = 0, \qquad a_0 b_3 + a_3 b_0 - a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0.$$

Ist $a_0 \cdot b_0 \neq 0$, so ergibt die letzte dieser Gleichungen mit Hilfe der beiden andern $(a_0 b_1 - a_1 b_0)(a_0 b_2 - a_2 b_0) = 0$. Aus den beiden ersten schließt man, daß $F_{12}$ und $G_{12}$ nur von einer Variablen abhangen oder in Faktoren mit nur einer Variablen zerfallen. Zusammen mit der dritten zeigen sie, daß diese Variable dieselbe ist, bezw. daß einer dieser Faktoren gemeinsam ist, daß also (1.3) degeneriert.

Ist die Gleichung (4.2) keine Identität, was wir nun voraussetzen, so sind ihre beiden Lösungen $p_3$, $q_3$ die einzigen Werte, für die die bilineare Beziehung singulär wird. Eine dieser beiden Lösungen oder beide sind unendlich, wenn in (4.2) der erste oder die beiden ersten Koeffizienten verschwindén. Ferner sind $p_3$ und $q_3$ reell oder konjugiert-komplex, da wir nur reelle Koeffizienten zulassen.

Aus (1.5) ergibt sich, daß

$$\begin{aligned} &f_2 \text{ beliebig ist für } f_3 = p_3,\ f_1 = -\frac{a_2 p_3 + b_2}{a_0 p_3 + b_0} = -\frac{a_3 p_3 + b_3}{a_1 p_3 + b_1} = p_1 \\ &f_1 \text{ beliebig ist für } f_3 = p_3,\ f_2 = -\frac{a_1 p_3 + b_1}{a_0 p_3 + b_0} = -\frac{a_3 p_3 + b_3}{a_2 p_3 + b_2} = p_2 \end{aligned} \tag{4.3}$$

wo $p_1$ und $p_2$ Abkürzungen für obige Quotienten sind. Ersetzt man in diesen beiden Zeilen $p_3$ durch $q_3$ und schreibt für die neuen Quotienten $q_1$ und $q_2$, so ist auch

$$\begin{aligned} &f_2 \text{ beliebig für } f_3 = q_3\,,\quad f_1 = q_1 \\ &f_1 \text{ beliebig für } f_3 = q_3\,,\quad f_2 = q_2 \end{aligned}$$

m. a. W. $(p_1, p_3)$ und $(q_1, q_3)$ sind kritische Wertepaare der Variablen $(f_1, f_3)$, $(p_2, p_3)$ und $(q_2, q_3)$ sind es für $(f_2, f_3)$.

Nun sei zunächst $p_3 \neq q_3$. Dann ist auch $p_1 \neq q_1$ und $p_2 \neq q_2$. Wäre nämlich $p_1 = q_1$, so schlösse man aus (4.3), daß $\frac{a_2}{a_0} = \frac{b_2}{b_0} = \frac{a_3}{a_1} = \frac{b_3}{b_1}$ und (4.2) wäre eine Identität. Sind ferner $p_3$ und $q_3$ konjugiert, so sind es auch $p_1$ und $q_1$, $p_2$ und $q_2$.

Von den singulären bilinearen Relationen

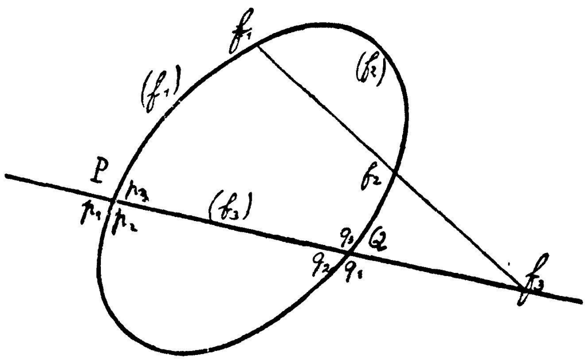
$$F_{12}\, p_3 + G_{12} = 0$$

$$F_{12}\, q_3 + G_{12} = 0$$

wird die erste befriedigt durch das Paar $f_1 = p_1$, $f_2$ beliebig, die zweite durch das Paar $f_1$ beliebig, $f_2 = q_2$. Also genügt das Paar $f_1 = p_1$, $f_2 = q_2$ beiden Beziehungen und deshalb auch den Gleichungen

$$F_{12} = 0 \qquad\qquad G_{12} = 0.$$

Dasselbe gilt vom Paar $f_1 = q_1$, $f_2 = p_2$. Daraus und aus (4.1) schließen wir, daß die Paare $(p_1, q_2)$ und $(q_1, p_2)$ für $(f_1, f_2)$ kritisch sind und allen bilinearen Beziehungen des Büschels als Paare entsprechender Werte angehören, eine Eigenschaft, die nur ihnen zukommt. Gibt man also auf einem Kegelschnitt zwei verschiedene projektive Leitern $(f_1)$ und $(f_2)$ so, daß ihre Quoten $f_1 = p_1$, $f_2 = p_2$ in einem Punkt $P$ (Figur 3) und ihre Quoten




Figur 3.

$f_1 = q_1$, $f_2 = q_2$ in einem andern $Q$ zusammenfallen, daß also die beiden Quoten irgend eines Punktes verbunden sind durch eine Relation

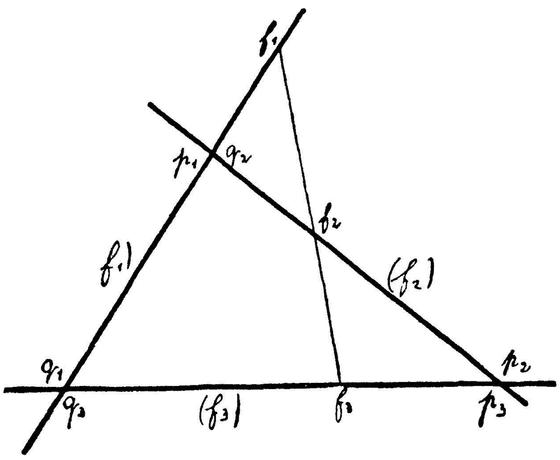
$$\frac{f_2 - p_2}{f_2 - q_2} = C \cdot \frac{f_1 - p_1}{f_1 - q_1} \tag{4.4}$$

mit einer willkürlichen Konstante $C$, so definiert (1.3) ein Büschel von Projektivitäten, die sämtlich das Punktepaar $(P, Q)$ vertauschbar enthalten, also ein Büschel von Involutionen, deren Pole sämtlich auf der Geraden $PQ$ liegen. Irgendein Strahlbüschel $f_1 =$ konst. $(\neq p_1, q_1)$ zeigt zusammen mit (1.3), daß die dritte Leiter in $f_3$ projektiv ist. Man kann noch einem beliebigen Punkt $M \neq P, Q$ beliebige nichtkritische Quoten $f_1 = m_1$, $f_2 = m_2$ erteilen und damit die beiden ersten Leitern bestimmen. Da die Punkte $P$ und $Q$ für $(f_1, f_3)$ und $(f_2, f_3)$ [nicht aber für $(f_1, f_2)$] kritisch sind, kennt man nach Auflösung von (4.2) bereits zwei kotierte Punkte der dritten Leiter. Einen dritten liefert die zu einem Lösungstripel von (1.3) gehörige Fluchtgerade.

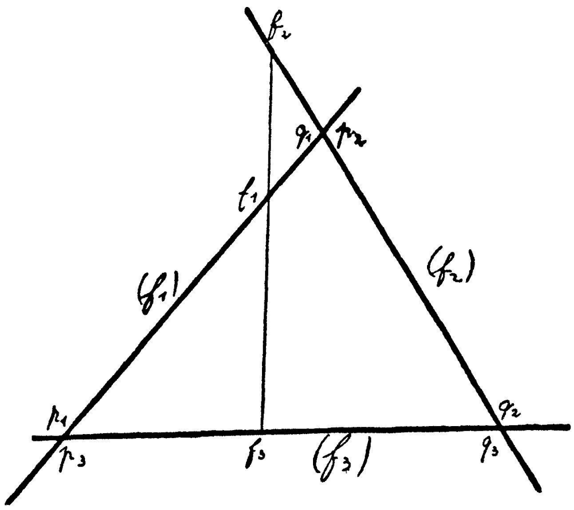
Im Falle konjugierter kritischer Werte wird man aus (4.4) die Quotenpaare dreier Kegelschnittpunkte ermitteln. In dieser Beziehung sind, wie man leicht feststellt, $f_1$ und $f_2$ gleichzeitig reell, wenn nur das willkürliche Paar $m_1$, $m_2$ es ist. Von der dritten Leiter sucht man drei notwendig in einer Geraden liegende Punkte, indem man zu drei festen Werten von $f_3$ je zwei (1.3) befriedigende Wertepaare $(f_1, f_2)$ bestimmt und die zugehörigen Fluchtgeraden schneidet.

Im bisher ausgeschlossenen Ausnahmefall $p_3 = q_3$ ist die dritte Leiter eine Tangente des Kegelschnittes, in deren Berührungspunkt alle kritischen Werte vereinigt sind.

Aus dem symmetrischen Bau von (1.3) geht hervor, daß jede der drei Variablen $f_1$, $f_2$, $f_3$ der geradlinigen Leiter zugeordnet werden kann.



Figur 4.



Figur 5.

Eine Beziehung dritter Ordnung (1.3) gestattet aber auch Fluchtlinientafeln mit drei geradlinigen Leitern erster Ordnung auf verschiedenen Trägern. Um dies einzusehen braucht man nur zwei projektive Leitern erster Ordnung $(f_1)$ und $(f_2)$ anzunehmen, deren Schnittpunkt auf der ersten mit $p_1$ und auf der zweiten mit $q_2$ kotiert ist. Da dieses Paar allen bilinearen Beziehungen des Büschels angehört, definiert (1.3) in diesem Falle für jedes $f_3$ perspektive Punktreihen. Weil auch das Paar $(q_1, p_2)$ fest ist, muß die zugehörige Fluchtgerade Trägerin der dritten Leiter sein, die in $f_3$ projektiv ist. Auf jeder Leiter sind in den Ecken des Dreiecks kritische Werte die Quoten, in der Anordnung von Figur 4. Man erhält andere Tafeln (Figur 5), wenn man sich die beiden ersten Leitern in ihren Punkten $q_1$, $p_2$ schneiden läßt. Fallen die kritischen Werte zusammen, so gehen die drei Leitern durch einen Punkt.

## 5. Zusammenfassung

Jede nicht degenerierte Beziehung vierter Ordnung (1.2) [insbesondere die Relationen (2.1) und (2.2)] ist durch Fluchtlinientafeln darstellbar. Ist $D_0 D_3 - D_1 D_2 \neq 0$ (§ 3), so sind sie gebildet aus zwei projektiven Leitern zweiter Ordnung auf demselben Träger und einer dritten Leiter. Diese Tafeln sind durch eine der projektiven Leitern bestimmt. — Ist $D_0 D_3 - D_1 D_2 = 0$, so bestehen die Tafeln aus zwei projektiven Leitern erster Ordnung und einer dritten Leiter. Sie sind bestimmt durch die Wahl der beiden ersten Leitern, deren Schnittpunkt vorgeschriebene Quoten hat. In beiden Fällen können alle besprochenen Tafeln einer Beziehung durch Kollineation ineinander übergeführt werden.

Jede nichtdegenerierte Beziehung dritter Ordnung (1.3) gestattet Tafeln mit zwei projektiven Leitern zweiter Ordnung auf demselben Träger und einer projektiven Leiter erster Ordnung. Zwei Leitern sind im übrigen willkürlich wählbar, mit der Bedingung, daß in den Schnittpunkten kritische Werte als Quoten stehen in der Anordnung von Figur 3. Auch im Falle imaginärer kritischer Werte sind diese Tafeln reell. — Jede solche Beziehung gestattet auch Tafeln mit drei projektiven Leitern erster Ordnung, von denen zwei beliebig wählbar sind; jedoch muß ihr Schnittpunkt mit einem der kritischen Wertepaare kotiert sein. Diese Tafeln sind im Falle imaginärer kritischer Werte imaginär. Die Tafeln von Beziehungen dritter Ordnung können nicht sämtlich durch Kollineation ineinander übergeführt werden.

(Eingegangen den 13. Mai 1933)