Ueber die Kreise, die von einer Riemannschen Fläche schlicht überdeckt werden.

Autor(en): **Ahlfors, Lars**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **5 (1933)**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-6653

Ueber die Kreise die von einer Riemannschen Fläche schlicht überdeckt werden

Von LARS AHLFORS, Åbo (Finnland)

1. Einleitung

In den *Comptes Rendus*[1]) habe ich neulich als Verallgemeinerung des bekannten *Bloch*schen Satzes bewiesen, daß von *fünf* punktfremden Kreisen wenigstens einer die Eigenschaft besitzt von einem Blatt der von den Werten einer in der ganzen Ebene meromorphen Funktion gebildeten Riemannschen Fläche schlicht überdeckt zu werden. Wendet man diesen Satz auf eine ganze Funktion an, so sieht man daß dieselbe Behauptung schon mit *vier* im endlichen gelegenen Kreisen richtig ist.

In dieser Arbeit werde ich zeigen, daß die Anzahl der fraglichen Kreise für ganze Funktionen in der Tat auf *drei* reduziert werden kann, wie schon *Bloch* selbst vermutet hat[2]). Allgemeiner werde ich eine im Einheitskreise E reguläre Funktion $f(z)$ mit $f(0) = 0$, $|f'(0)| = 1$ betrachten und eine von $f(z)$ unabhängige Ungleichung herleiten, welche eine hinreichende Bedingung darstellt, damit von drei gegebenen Kreisen wenigstens einer innerhalb E schlicht angenommen werde. Aus dieser Ungleichung folgt besonders der *Bloch*sche Satz mit einem numerischen (übrigens sehr ungenauen) Wert der *Bloch*schen Konstante. Es geht ferner hervor, daß der *Bloch*sche Kreis innerhalb eines um den Nullpunkt geschlagenen Kreises von festem Radius gewählt werden kann.

Auf die möglichen Erweiterungen meiner Resultate gehe ich in dieser Arbeit nicht ein, um so mehr da ich die Absicht habe, in einer umfassenderen Abhandlung auf diese und ähnliche Fragen zurückzukommen.

2. Vorbereitende Betrachtungen

Wir betrachten in der w-Ebene die drei außerhalb einander gelegenen Kreise C_1, C_2, C_3 und ziehen ihren gemeinsamen Orthogonalkreis $\overline{C}$ mit dem Mittelpunkt w_0 und dem Radius R. Von diesem Orthogonalkreis schneidet der Kreis C_i $(i = 1, 2, 3)$ einen Bogen ab, dessen Zentriwinkel mit α_i bezeichnet werde. Zwischen C_1 und C_2 fällt ein Bogen $\delta_{1,2}$ von

[1]) t. 194, p. 1145.

[2]) La conception actuelle de la théorie des fonctions entières et méromorphes. L'Enseignement Mathématique, 1926, p. 87.

$\overline{C}$, zwischen C_2 und C_3 liegt $\delta_{2,3}$ und zwischen C_3 und C_1 der Bogen $\delta_{3,1}$. Mit $\delta_{i,j}$ soll gleichzeitig der Zentriwinkel des entsprechenden Bogens bezeichnet werden. Schließlich wird noch die Bezeichnung

$$d = \text{Min}\left(\delta_{i,j},\ \alpha_i,\ \frac{\pi - \alpha_i}{3}\right)$$

eingeführt für die kleinste der neun eingeklammerten Größen. Es ist offenbar $0 < d \leqq \frac{\pi}{4}$.

Die Funktion $f(z) = z + \dots$[3]) sei regulär in E. Wir bezeichnen mit Δ_i die Gebiete, wo die Funktion $w = f(z)$ zum Kreise C_i gehörige Werte annimmt. Falls ein Gebiet Δ_i ganz im inneren von E gelegen ist, so liegt in diesem Δ_i für jeden zu C_i gehörigen Wert w dieselbe endliche Anzahl von Wurzeln der Gleichung $f(z) = w$. Ich nehme an, daß diese Anzahl für alle ganz innerhalb E gelegenen Gebiete Δ_1, Δ_2 und Δ_3 größer als Eins ist, und werde aus dieser Annahme eine Ungleichung zwischen $|w_0|$, R und d herleiten. Falls diese Ungleichung nicht erfüllt ist, so ist dies folglich ein Zeichen, daß es im inneren von $|z| < 1$ ein Gebiet Δ_i ($i = 1, 2$ oder 3) gibt, wo $f(z)$ jeden zum entsprechenden Kreise C_i gehörigen Wert genau einmal annimmt.

Die Punkte der w-Ebene projizieren wir stereographisch auf die Oberfläche einer die w-Ebene im Punkte w_0 berührenden Kugel vom Durchmesser R. Der Kreis $\overline{C}$ geht dabei in den Äquatorialkreis über, und den Kreisen C_i entsprechen auf der Kugelfläche drei in Bezug auf die Äquatorialebene symmetrische Kreise. Um den Punkt ∞ zeichnen wir noch einen vierten Kreis C_∞, dessen Durchmesser ein Bogen vom Zentriwinkel d ist. Aus der Definition von d geht hervor, daß der Abstand von C_∞ zu den Kreisen C_i wenigstens gleich d ist. Dem Kreise C_∞ entsprechen in der z-Ebene die Gebiete Δ_∞, wo die Werte von $f(z)$ innerhalb C_∞ fallen. Diese Gebiete strecken sich alle bis zum Rande von E.

Die verschiedenen Gebiete Δ_1, Δ_2 und Δ_3 sind durch Kurven $\gamma_{i,j}$ verbunden, auf welchen die Werte von $f(z)$ zu dem zwischen C_i und C_j liegenden Bogen $\delta_{i,j}$ von $\overline{C}$ gehören. Auf dem Rande eines vollständig innerhalb E gelegenen Gebietes Δ_i nimmt $f(z)$ jeden auf der Peripherie von C_i gelegenen Wert wenigstens zweimal an. Folglich gehen von dem Gebiet Δ_i wenigstens zwei Kurven $\gamma_{i,j}$ und zwei Kurven $\gamma_{k,i}$ ($i \neq j \neq k$) aus, welche zu einem Gebiet Δ_j bzw. Δ_k führen[4]). Von einem beliebigen

[3]) Die Annahme $f(0) = 0$ ist natürlich unwesentlich und bedeutet nur eine Verschiebung der w-Ebene.

[4]) Die Kurven $\gamma_{i,j}$ können beliebig oft verzweigt sein; es gibt aber immer einen Zweig, der zu einem Gebiet Δ_j führt.

inneren Gebiete Δ_i ausgehend läßt sich folglich eine Kette $\Gamma_{i,j}$ bilden, die aus abwechselnden Gebieten Δ_i und Δ_j verbunden durch Kurven $\gamma_{i,j}$ besteht. Diese Kette ist entweder endlos, oder endet mit einem Gebiet, das sich bis zum Rande von E streckt. Ebenso geht durch Δ_i eine Kette $\Gamma_{i,k}$.

Die Ketten $\Gamma_{i,j}$ können nicht geschlossen sein, d. h. man kommt nie zu einem Gebiet Δ_i oder Δ_j, das mit einem vorigen identisch ist. Man zeigt nämlich mit Hilfe des Argumentprinzips, daß die Funktion $f(z)$ in dem von einer geschlossenen Kette $\Gamma_{i,j}$ begrenzten Gebiet nur solche Werte annehmen könnte, die entweder sämtlich zu C_i oder sämtlich zu C_j gehören. In derselben Weise wird gezeigt, daß zwei Ketten $\Gamma_{i,j}$ und $\Gamma_{i,k}$ höchstens *ein* gemeinsames Gebiet Δ_i haben.

3. Zurückführung des Beweises auf den Beweis eines Hilfssatzes

Wenn $f(z)$ im Kreise $|z| < r_0 < 1$ keinen zu C_∞ gehörigen Wert annimmt, d. h. wenn in diesem Kreise $|f(z) - w_0| \leqq \dfrac{R}{\operatorname{tg}\frac{d}{4}}$ gilt, so folgt in bekannter Weise $r_0 \leqq \dfrac{R}{\operatorname{tg}\frac{d}{4}} < \dfrac{4R}{d}$. Ist $f(z)$ in demselben Kreis von allen zu C_i gehörigen Werten verschieden, so gilt, wenn der Mittelpunkt und Radius von C_i mit a_i und ϱ_i bezeichnet werden, $\left|\dfrac{1}{f(z)-a_i}\right| \leqq \dfrac{1}{\varrho_i}$ für $|z| < r_0$. Die Ableitung der Funktion $\dfrac{1}{f(z)-a_i}$ im Nullpunkt ist gleich $-\dfrac{1}{a_i^2}$. Daraus folgt

$$r_0 \leqq \frac{|a_i|^2}{\varrho_i} \leqq \frac{\left(|w_0| + \dfrac{R}{\cos\frac{\alpha_i}{2}}\right)^2}{R\operatorname{tg}\frac{\alpha_i}{2}} = \frac{2\left(|w_0|\cos\frac{\alpha_i}{2} + R\right)^2}{R\sin\alpha_i}$$

$$\leqq \frac{2(|w_0|+R)^2}{R\sin d} < \frac{4(|w_0|+R)^2}{R\,d}.$$

Im folgenden wählen wir $r_0 = \dfrac{4(|w_0|+R)^2}{R\,d}$, und nehmen an, daß durch diese Wahl $r_0 < 1$ ausfällt. Da die Ungleichung $r_0 \geqq \frac{4R}{d}$ *a fortiori* erfüllt ist, so sind wir sicher, daß es Gebiete aller vier Arten Δ_1, Δ_2, Δ_3 und Δ_∞ gibt, welche ganz oder zum Teil im Kreise $|z| < r_0$ liegen.

Ich fixiere nun ein Gebiet $\Delta_\infty^{(0)}$ der vierten Art, das vom Kreise $|z| = r_0$ getroffen wird, gehe von einem auf diesem Kreis gelegenen Punkt des betrachteten Gebietes aus und beschreibe die Kreisperipherie im positiven Sinn bis ich zum erstenmal auf eine Kette $\Gamma_{1,2}$, $\Gamma_{2,3}$ oder $\Gamma_{3,1}$ treffe. Es sei dies die Kette $\Gamma_{i,j}^{(0)}$. Zwischen $\Delta_\infty^{(0)}$ und $\Gamma_{i,j}^{(0)}$ liegt ein eindeutig bestimmtes Teilgebiet D_0 des Kreisringes $r_0 < |z| < 1$, das auf seinem Rande einen Teil des soeben im positiven Sinne durchlaufenen Kreisbogens enthält. Falls in D_0 kein Gebiet Δ_k $(i \neq j \neq k)$ liegt, so setzen wir $\Omega_0 = D_0$ und das Verfahren bricht hiermit ab. Im entgegengesetzten Falle sei $\Delta_k^{(1)}$ dasjenige Gebiet Δ_k, dessen Abstand r_1 $(> r_0)$ vom Nullpunkt am kleinsten ist. Wir ziehen den $\Delta_k^{(1)}$ berührenden Bogen des Kreises $|z| = r_1$ und bezeichnen mit Ω_0 das zwischen diesem Bogen und dem Kreise $|z| = r_0$ fallende Teilgebiet von D_0.

Durch das Gebiet $\Delta_k^{(1)}$ geht eine Kette $\Gamma_{k,i}^{(1)}$, welche in der einen Richtung von $\Delta_k^{(1)}$ gerechnet ganz innerhalb D_0 verläuft und zur Peripherie des Einheitskreises führt. Das außerhalb Ω_0 gelegene Teilgebiet von D_0, welches zwischen $\Gamma_{k,i}^{(1)}$ und $\Delta_\infty^{(0)}$ liegt, ist von derselben Art wie D_0. Wir können also von diesem Gebiet ausgehend das auf D_0 angewandte Verfahren wiederholen.

Andererseits betrachten wir die von dem Gebiet $\Delta_k^{(1)}$ ausgehenden Kurven λ_k, welche der kürzesten Strecke zwischen C_k und C_∞ entsprechen. Es gibt eine dieser Kurven, welche innerhalb D_0 durch die Kette $\Gamma_{k,i}^{(1)}$ vom Kreise $|z| = r_0$ getrennt wird. Sie führt entweder zum Rande von E, oder zu einem neuen Gebiet Δ_∞. Wir bezeichnen mit D_1 das außerhalb Ω_0 gelegene Teilgebiet von D_0, das auf der einen Seite von $\Gamma_{i,j}^{(0)}$, auf der anderen Seite von $\Delta_k^{(1)}$ und den damit zusammenhängenden λ_k und Δ_∞ begrenzt wird. Wenn nun weder im inneren noch auf dem Rande von D_1 ein zu einem Δ_∞ gelegener Punkt liegt[5]), so setzt man $\Omega_1 = D_1$ und das Verfahren bricht ab. Anderenfalls sei $\Delta_\infty^{(1)}$ das in D_1 gelegene oder an D_1 grenzende Gebiet Δ_∞, dessen Abstand r_2 vom Nullpunkt am kleinsten ist. Durch einen Bogen des Kreises $|z| = r_2$, der das Gebiet $\Delta_\infty^{(1)}$ berührt, schneiden wir dann das Teilgebiet Ω_1 von D_1 ab[6]).

[5]) Dieser Fall kann nur eintreten, wenn λ_k zum Rande von E führt.

[6]) Falls schon das auf $|z| = r_1$ gelegene Randstück von D_1 von einem Δ_∞ getroffen wird, so fällt der ganze Schritt aus.

Schließlich betrachten wir noch das außerhalb Ω_1 fallende Teilgebiet von D_1, welches zwischen $\Delta_\infty^{(1)}$ und $\Gamma_{i,j}^{(0)}$ liegt, und wiederholen von diesem Gebiet ausgehend nochmals das auf D_0 angewandte Verfahren. Wir haben hierdurch einen endlichen oder unendlichen Algorithmus definiert, der zur Konstruktion eines Systems aneinandergelegter Gebiete Ω führt. Jedes Gebiet Ω wird von zwei Kreisbogen $|z| = r'$ und $|z| = r''$ und zwei die Endpunkte dieser Bogen verbindenden Kurven L_1 und L_2 begrenzt. Wiederholt man den ganzen Algorithmus, indem man von $\Delta_\infty^{(0)}$ ausgehend die Peripherie $|z| = r_0$ jetzt in *negativer* Richtung durchläuft, so erhält man ein neues, ähnliches System von Gebieten Ω.

Die Funktion $f(z)$ besitzt in jedem Gebiet Ω eine der folgenden zwei Eigenschaften:

1. Die auf L_1 angenommenen Randwerte gehören zu C_∞, und die Randwerte auf L_2 liegen auf C_i, C_j oder auf dem zwischenliegenden Bogen $\delta_{i,j}$, während $f(z)$ im inneren von Ω keinen zu C_k $(i \neq j \neq k)$ gehörigen Wert annimmt.

2. Die Randwerte auf L_1 gehören zu C_i, C_j oder $\delta_{i,j}$, und die Werte auf L_2 gehören zu C_k oder zu der kürzesten Strecke zwischen C_k und C_∞. Im inneren nimmt $f(z)$ keinen zu C_∞ gehörigen Wert an.

Der erste Fall tritt für Ω_0, der zweite für Ω_1 ein.

Im nächsten Abschnitt werden wir einen Hilfssatz beweisen, aus dem sofort folgt, daß die Gebiete Ω in beiden Fällen einer Ungleichung

$$\int_{r'}^{r''} \frac{dr}{r\,\theta(r)} < K \tag{1}$$

genügen müssen, wobei K eine Konstante und $r\,\theta(r)$ die Gesamtlänge der in Ω liegenden Bogen des Kreises $|z| = r$ bezeichnen. Für jedes r ist offenbar $\Sigma\,\theta(r) \leqq 2\pi$, wenn die Summe über alle vom Kreise $|z| = r$ getroffenen Gebiete Ω erstreckt wird.

Aus (1) läßt sich die gesuchte Ungleichung leicht herleiten. Es sei in der Tat $n(r)$ die Anzahl der vom Kreise $|z| = r$ getroffenen Gebiete Ω. Dann ist, wie aus dem Aufbau des Algorithmus sofort hervorgeht, die Anzahl der ganz oder zum Teil in $|z| < r$ gelegenen Gebiete Ω höchstens gleich $3n(r) - 4$. Wir erhalten folglich, wenn wir die zu diesen Gebieten gehörigen Ungleichungen (1) addieren

$$\int_{r_0}^{r} \left(\Sigma \frac{1}{\theta(t)}\right) \frac{dt}{t} < (3n(r) - 4)\,K, \tag{2}$$

wo die Summe wieder über alle vom Kreise $|z| = t$ getroffenen Gebiete Ω zu erstrecken ist. Da die Anzahl dieser Gebiete gleich $n(t)$ ist, so erhält man nach dem Satz vom arithmetischen und harmonischen Mittel

$$\sum \frac{1}{\theta(t)} \geqq \frac{n(t)^2}{\Sigma\,\theta(t)} \geqq \frac{n(t)^2}{2\pi}.$$

Wird dies in (2) eingeführt, so findet man

$$\int_{r_0}^{r} n(t)^2 \frac{dt}{t} < (3n(r) - 4)\, 2\pi K$$

oder, wenn das linksstehende Integral mit $\alpha(r)$ bezeichnet wird,

$$(\alpha(r) + 8\pi K)^2 < 36\pi^2 K^2 \frac{d\alpha(r)}{d \log r},$$

welche Ungleichung für $r_0 < r < 1$ gültig ist. Durch Integration ergibt sich dann

$$\log \frac{1}{r_0} = \int_{r_0}^{1} d \log r < 36\pi^2 K^2 \int_{r_0}^{1} \frac{d\alpha(r)}{(\alpha(r) + 8\pi K)^2}$$

$$\leqq 36\pi^2 K^2 \int_{\alpha=0}^{\infty} \frac{d\alpha}{(\alpha + 8\pi K)^2} = \frac{9\pi K}{2},$$

oder

$$r_0 > e^{-\frac{9}{2}\pi K}.$$

Führt man noch den Wert von r_0 ein (S. 356), so erhält man die endgültige Ungleichung

$$\frac{4(|w_0| + R)^2}{Rd} > e^{-\frac{9}{2}\pi K}, \tag{3}$$

wo noch der Wert von K zu ermitteln ist.

Bei der Herleitung von (3) wurde vorausgesetzt, daß der auf der linken Seite stehende Ausdruck kleiner als 1 ist. Im entgegengesetzten Falle ist die Ungleichung trivial.

4. Der Hilfssatz

Auf der Riemannschen Kugel seien E_1 und E_2 zwei punktfremde Kontinuen und E_3 ein drittes Kontinuum, das sowohl mit E_1 als mit E_2 wenigstens einen gemeinsamen Punkt besitzt. In einem Gebiet Ω der vorhin betrachteten Art sei eine meromorphe Funktion $f(z)$ gegeben, welche keinen zu E_3 gehörigen Wert annimmt und deren Randwerte auf L_1 zu E_1 und auf L_2 zu E_2 gehören. Dann gilt

$$\int_{r'}^{r''} \frac{dr}{r\,\theta(r)} \leq \frac{8\pi}{\delta^2}, \tag{4}$$

wo δ den Zentriwinkel des kleinsten, auf der Riemannschen Kugel gemessenen Abstandes zwischen E_1 und E_2 bezeichnet:

Vorbemerkung: Auch wenn E_3 keinen zu E_1 und E_2 gehörigen Punkt enthält, bekommt man durch diesen Satz eine Schranke für das Integral (4), vorausgesetzt daß E_1 und E_3 ohne Ueberschreitung von E_2 und ebenso E_2 und E_3 ohne Ueberschreitung von E_1 verbunden werden können. Nur bedeutet δ dann nicht mehr den Abstand zwischen E_1 und E_2, sondern den Abstand der Kontinuen, die durch Hinzufügung der Verbindungskurven entstehen. Jedenfalls ist δ höchstens gleich dem Durchmesser von E_3.

Beweis: Es sei G das von E_1, E_2 und E_3 bestimmte Restgebiet der Riemannschen Kugel, das zu allen drei Kontinuen gehörige Randpunkte besitzt. Wir wählen einen beliebigen zu E_3 gehörigen Randpunkt von G und bezeichnen ihn mit W.

Der in Ω fallende Teil des Kreises $|z| = r$ $(r' < r < r'')$ wird durch die Funktion $f(z)$ auf eine Kurve abgebildet, welche das Gebiet G in zwei oder mehrere Teilgebiete zerlegt. Es sei g_r dasjenige Teilgebiet, das den Randpunkt W besitzt, und γ_r der Teil des Randes von g_r, der die Kontinuen E_1 und E_2 verbindet. Schließlich bezeichnen wir noch mit ϑ_r den Teil des Kreises $|z| = r$, der auf γ_r abgebildet wird.

Bezeichnet R den Durchmesser der Riemannschen Kugel, so ist die Länge von γ_r wenigstens gleich $\frac{\delta R}{2}$. Man hat folglich

$$\int_{\vartheta_r} \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} |dz| \geqq \frac{\delta R}{2},$$

woraus durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung folgt

$$\frac{\delta^2 R^2}{4} \leqq \int_{\vartheta_r} |dz| \int_{\vartheta_r} \frac{|f'|^2}{(1+|f'|^2)^2} |dz| \leqq r\,\theta(r) \int_{\vartheta_r} \frac{|f'|^2}{(1+|f|^2)^2} |dz|.$$

Dividiert man durch $r\,\theta(r)$ und integriert zwischen den Grenzen r' und r'', so wird

$$\frac{\delta^2 R^2}{4} \int_{r'}^{r''} \frac{dr}{r\,\theta(r)} \leqq \int_{r'}^{r''} dr \int_{\vartheta_r} \frac{|f'|^2}{(1+|f|^2)} |dz|. \tag{5}$$

Das rechtsstehende Doppelintegral stellt die Größe der von den Kurven γ_r erzeugten Fläche dar. Wir werden zeigen, daß durch jeden Punkt höchstens zwei Kurven γ_r hindurchgehen können, und daß die betrachtete Fläche folglich höchstens gleich $2\pi R^2$ ist[7]).

Wir nehmen an, daß durch einen Punkt w die zwei Kurven γ_{r_1} und γ_{r_2} $(r' < r_1 < r_2 < r'')$ hindurchgehen. Wir verbinden w mit W durch eine Kurve Γ, die innerhalb des gemeinsamen Gebietes von g_{r_1} und g_{r_2} verläuft, und betrachten den vom Punkte $f(z)$ beschriebenen Weg, wenn z die Randkurve des zwischen $|z| = r_1$ und $|z| = r_2$ gelegenen Teilgebietes von Ω umläuft, wobei die Stellen wo $f(z) = w$ durch kleine, nach außen gerichtete Halbkreise zu umgehen sind. Es ist nun klar, daß der Punkt $f(z)$ die Kurve Γ nur dann überschreiten kann, wenn z einen dieser Halbkreise beschreibt. Also ist die Variation von $\arg \dfrac{f(z)-w}{f(z)-W}$ höchstens gleich 2π mal die Gesamtanzahl der auf $|z| = r_1$ und $|z| = r_2$ gelegenen Wurzeln der Gleichung $f(z) = w$. Hieraus folgt, daß zwischen diesen Kreisen keine Wurzel der genannten Gleichung liegen kann, womit die Richtigkeit unserer Behauptung erwiesen ist.

Aus (5) folgt nunmehr

$$\frac{\delta^2 R^2}{4} \int_{r'}^{r''} \frac{dr}{r\,\theta(r)} \leqq 2\pi R^2,$$

d. h. die Ungleichung (4).

[7]) Sie wird tatsächlich kleiner als $2\pi R^2$, wenn E_3 vom positiven Flächenmaß ist.

5. Zuendeführung des Beweises

Wir wenden jetzt den Hilfssatz auf die zwei auf S. 358 betrachteten Fälle an.

Im ersten Falle ist E_3 gleich C_k. Für E_1 kann man C_∞ und für E_2 das aus C_i, C_j und $\delta_{i,j}$ bestehende Kontinuum wählen. Um aber zu erreichen, daß E_3 einen Punkt von E_1 und E_2 enthält, rechnen wir zu E_1 noch den kürzesten Bogen zwischen C_k und C_∞, und zu E_2 den zu demselben größten Kreis gehörigen Bogen zwischen C_∞ und dem Äquatorialkreis $\overline{C}$, nötigenfalls unter Hinzunahme eines Bogens von $\overline{C}$, der den auf diesem Kreis gelegenen Endpunkt mit C_i oder C_j verbindet. Für den kleinsten Abstand δ zwischen E_1 und E_2 kommen folgende Bogen in Betracht: 1. Der Durchmesser α_k von C_k; 2. Die Abstände $\frac{\pi - d - \alpha_i}{2}$ und $\frac{\pi - d - \alpha_j}{2}$ zwischen C_∞ und C_i bzw. C_j; 3. Der kleinste Abstand von C_i oder C_j zu dem Bogen zwischen C_k und C_∞; dieser kleinste Abstand wird an einem der Endpunkte erreicht und ist mithin größer als $\delta_{k,i}$ bzw. $\delta_{j,k}$ oder $\frac{\pi - d - \alpha_i}{2}$ bzw. $\frac{\pi - d - \alpha_j}{2}$. Es wird also jedenfalls $\delta \geqq d$.

Im zweiten Falle hat man E_3 gleich C_∞. E_2 ist das von C_k und dem kürzesten Bogen zwischen C_k und C_∞ gebildete Kontinuum, und für E_1 wählt man die Kreise C_i und C_j mit dem zwischenliegenden Bogen $\delta_{i,j}$, verbunden mit C_∞ durch einen Bogen des durch die Mittelpunkte von C_k und C_∞ gehenden größten Kreises und nötigenfalls einen Bogen des Äquatorialkreises $\overline{C}$. Dann sieht man ganz wie im ersten Falle ein, daß $\delta \geqq d$ ist.

Wir sind also berechtigt, in die Formel (3) den Wert $K = \frac{8\pi}{d^2}$ einzutragen, und haben damit unseren Hauptsatz bewiesen.

Satz. *Wenn die drei Kreise C_1, C_2 und C_3 der Bedingung*

$$\frac{(|w_0| + R)^2}{R} \leqq \frac{d}{4} e^{-\frac{36\pi^2}{d^2}} \tag{6}$$

genügen, wobei die Bedeutung von w_0, R und d dem vorhergehenden Texte zu entnehmen ist, so wird der Einheitskreis $|z| < 1$ durch jede in ihm reguläre Funktion $f(z) = z + \ldots$ auf eine Riemannsche Fläche abgebildet, welche wenigstens einen der Kreise C_i schlicht überdeckt.

Es ist bemerkenswert, daß die rechte Seite von (6) nur die Größe d enthält und also ausschließlich von der *relativen* Größe und Lage der Kreise C_i abhängt. Demnach können wir immer durch eine auf drei beliebige Kreise ausgeübte Translation und Ähnlichkeitstransformation erreichen, daß die Bedingung (6) erfüllt wird.

6. Verschiedene Folgerungen

Will man aus unserem Satze die ursprüngliche *Bloch*sche Formulierung herleiten, so setzt man $w_0 = 0$ und betrachtet einen symmetrischen Fall, wo die Kreise alle gleich groß sind und durch eine Drehung um 120° um den Nullpunkt auseinander hervorgehen. Um ein möglichst großes d zu erhalten wählt man $\alpha_i = \frac{\pi - \alpha_i}{3}$, d.h. $\alpha_i = \frac{\pi}{4}$, woraus $\delta_{i,j} = \frac{5\pi}{12}$ und folglich $d = \frac{\pi}{4}$ berechnet wird. Die Ungleichung (6) ist erfüllt für

$$R = \frac{\pi}{16} e^{-576},$$

und die Radien der entsprechenden Kreise C_i sind

$$B = \frac{\pi}{16} tg \frac{\pi}{8} e^{-576}.$$

Hierin ist das folgende Resultat enthalten:

Es gibt eine Konstante B von der Eigenschaft, daß die von den Werten jeder im Einheitskreise regulären Funktion $f(z) = z + \ldots$ erzeugte Riemannsche Fläche einen Kreis vom Radius B schlicht überdeckt, dessen Mittelpunkt im Abstande $\frac{B}{\sin \frac{\pi}{8}}$ vom Nullpunkt liegt.

Es kann noch hinzugefügt werden, daß die Strahle, die man vom Nullpunkt aus durch die Mittelpunkte der Kreise mit der genannten Eigenschaft zieht, wenigstens ein Drittel aller aus dem Nullpunkt ausgehenden Strahle umfassen.

Schließlich betrachten wir noch eine in der ganzen endlichen Ebene reguläre Funktion $f(z)$. Die Funktion $\frac{f(Az) - f(0)}{A f'(0)}$ ist für jedes noch so große A regulär in E und genügt außerdem unseren Normierungsbedingungen. Uebt man auf drei beliebige, außerhalb einander gelegene Kreise C_1, C_2, C_3 die entsprechende Transformation $\frac{w - f(0)}{Af'(0)}$ aus, so sieht man, daß für ein genügend großes A die Bedingung (6) erfüllt wird. Also wird wenigstens einer der Kreise C_i von der Riemannschen Fläche der Umkehrfunktion von $f(z)$ schlicht überdeckt. Wir haben hiermit den folgenden Satz gefunden, der zur Bestimmung des Typus einer einfach zusammenhängenden Riemannschen Fläche angewandt werden kann.

Von drei außerhalb einander gelegenen Kreisen wird wenigstens einer von der Riemannschen Fläche der Umkehrfunktion einer ganzen Funktion schlicht überdeckt.

Geht man auf den Beweis zurück so erkennt man, daß die Kreise durch drei beliebige, einfach zusammenhängende Gebiete ersetzt werden können.

(Eingegangen den 10. März 1932)

Zusatz während der Korrektur

Nachdem diese Abhandlung zum Druck gelangt ist, habe ich gemerkt, daß die topologischen Betrachtungen auf S. *31—32* nicht ganz einwandfrei sind. Da ich in einer bald erscheinenden größeren Arbeit die Gelegenheit habe, den Fehler richtigzustellen, bitte ich die Leser, sich mit dieser Erklärung zu befriedigen.