

# Ueber die Kreise, die von einer Riemannschen Fläche schlicht überdeckt werden.

Autor(en): **Ahlfors, Lars**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **5 (1933)**

PDF erstellt am: **18.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-6653>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Ueber die Kreise die von einer Riemannschen Fläche schlicht überdeckt werden

Von LARS AHLFORS, Åbo (Finnland)

## 1. Einleitung

In den *Comptes Rendus*<sup>1)</sup> habe ich neulich als Verallgemeinerung des bekannten *Blochschen* Satzes bewiesen, daß von *fünf* punktfremden Kreisen wenigstens einer die Eigenschaft besitzt von einem Blatt der von den Werten einer in der ganzen Ebene meromorphen Funktion gebildeten Riemannschen Fläche schlicht überdeckt zu werden. Wendet man diesen Satz auf eine ganze Funktion an, so sieht man daß dieselbe Behauptung schon mit *vier* im endlichen gelegenen Kreisen richtig ist.

In dieser Arbeit werde ich zeigen, daß die Anzahl der fraglichen Kreise für ganze Funktionen in der Tat auf *drei* reduziert werden kann, wie schon *Bloch* selbst vermutet hat<sup>2)</sup>. Allgemeiner werde ich eine im Einheitskreise  $E$  reguläre Funktion  $f(z)$  mit  $f(0) = 0$ ,  $|f'(0)| = 1$  betrachten und eine von  $f(z)$  unabhängige Ungleichung herleiten, welche eine hinreichende Bedingung darstellt, damit von drei gegebenen Kreisen wenigstens einer innerhalb  $E$  schlicht angenommen werde. Aus dieser Ungleichung folgt besonders der *Blochsche* Satz mit einem numerischen (übrigens sehr ungenauen) Wert der *Blochschen* Konstante. Es geht ferner hervor, daß der *Blochsche* Kreis innerhalb eines um den Nullpunkt geschlagenen Kreises von festem Radius gewählt werden kann.

Auf die möglichen Erweiterungen meiner Resultate gehe ich in dieser Arbeit nicht ein, um so mehr da ich die Absicht habe, in einer umfassenderen Abhandlung auf diese und ähnliche Fragen zurückzukommen.

## 2. Vorbereitende Betrachtungen

Wir betrachten in der  $w$ -Ebene die drei außerhalb einander gelegenen Kreise  $C_1, C_2, C_3$  und ziehen ihren gemeinsamen Orthogonalkreis  $\bar{C}$  mit dem Mittelpunkt  $w_0$  und dem Radius  $R$ . Von diesem Orthogonalkreis schneidet der Kreis  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) einen Bogen ab, dessen Zentriwinkel mit  $\alpha_i$  bezeichnet werde. Zwischen  $C_1$  und  $C_2$  fällt ein Bogen  $\delta_{1,2}$  von

<sup>1)</sup> t. 194, p. 1145.

<sup>2)</sup> La conception actuelle de la théorie des fonctions entières et méromorphes. L'Enseignement Mathématique, 1926, p. 87.

$\bar{C}$ , zwischen  $C_2$  und  $C_3$  liegt  $\delta_{2,3}$  und zwischen  $C_3$  und  $C_1$  der Bogen  $\delta_{3,1}$ . Mit  $\delta_{i,j}$  soll gleichzeitig der Zentriwinkel des entsprechenden Bogens bezeichnet werden. Schließlich wird noch die Bezeichnung

$$d = \text{Min} \left( \delta_{i,j}, \alpha_i, \frac{\pi - \alpha_i}{3} \right)$$

eingeführt für die kleinste der neun eingeklammerten Größen. Es ist offenbar  $0 < d \leq \frac{\pi}{4}$ .

Die Funktion  $f(z) = z + \dots$ <sup>3)</sup> sei regulär in  $E$ . Wir bezeichnen mit  $\Delta_i$  die Gebiete, wo die Funktion  $w = f(z)$  zum Kreise  $C_i$  gehörige Werte annimmt. Falls ein Gebiet  $\Delta_i$  ganz im inneren von  $E$  gelegen ist, so liegt in diesem  $\Delta_i$  für jeden zu  $C_i$  gehörigen Wert  $w$  dieselbe endliche Anzahl von Wurzeln der Gleichung  $f(z) = w$ . Ich nehme an, daß diese Anzahl für alle ganz innerhalb  $E$  gelegenen Gebiete  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  und  $\Delta_3$  größer als Eins ist, und werde aus dieser Annahme eine Ungleichung zwischen  $|w_0|$ ,  $R$  und  $d$  herleiten. Falls diese Ungleichung nicht erfüllt ist, so ist dies folglich ein Zeichen, daß es im inneren von  $|z| < 1$  ein Gebiet  $\Delta_i$  ( $i = 1, 2$  oder  $3$ ) gibt, wo  $f(z)$  jeden zum entsprechenden Kreise  $C_i$  gehörigen Wert genau einmal annimmt.

Die Punkte der  $w$ -Ebene projizieren wir stereographisch auf die Oberfläche einer die  $w$ -Ebene im Punkte  $w_0$  berührenden Kugel vom Durchmesser  $R$ . Der Kreis  $\bar{C}$  geht dabei in den Äquatorialkreis über, und den Kreisen  $C_i$  entsprechen auf der Kugelfläche drei in Bezug auf die Äquatorialebene symmetrische Kreise. Um den Punkt  $\infty$  zeichnen wir noch einen vierten Kreis  $C_\infty$ , dessen Durchmesser ein Bogen vom Zentriwinkel  $d$  ist. Aus der Definition von  $d$  geht hervor, daß der Abstand von  $C_\infty$  zu den Kreisen  $C_i$  wenigstens gleich  $d$  ist. Dem Kreise  $C_\infty$  entsprechen in der  $z$ -Ebene die Gebiete  $\Delta_\infty$ , wo die Werte von  $f(z)$  innerhalb  $C_\infty$  fallen. Diese Gebiete strecken sich alle bis zum Rande von  $E$ .

Die verschiedenen Gebiete  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  und  $\Delta_3$  sind durch Kurven  $\gamma_{i,j}$  verbunden, auf welchen die Werte von  $f(z)$  zu dem zwischen  $C_i$  und  $C_j$  liegenden Bogen  $\delta_{i,j}$  von  $\bar{C}$  gehören. Auf dem Rande eines vollständig innerhalb  $E$  gelegenen Gebietes  $\Delta_i$  nimmt  $f(z)$  jeden auf der Peripherie von  $C_i$  gelegenen Wert wenigstens zweimal an. Folglich gehen von dem Gebiet  $\Delta_i$  wenigstens zwei Kurven  $\gamma_{i,j}$  und zwei Kurven  $\gamma_{k,i}$  ( $i \neq j \neq k$ ) aus, welche zu einem Gebiet  $\Delta_j$  bzw.  $\Delta_k$  führen<sup>4)</sup>. Von einem beliebigen

<sup>3)</sup> Die Annahme  $f(0) = 0$  ist natürlich unwesentlich und bedeutet nur eine Verschiebung der  $w$ -Ebene.

<sup>4)</sup> Die Kurven  $\gamma_{i,j}$  können beliebig oft verzweigt sein; es gibt aber immer einen Zweig, der zu einem Gebiet  $\Delta_j$  führt.

inneren Gebiete  $\Delta_i$  ausgehend läßt sich folglich eine Kette  $\Gamma_{i,j}$  bilden, die aus abwechselnden Gebieten  $\Delta_i$  und  $\Delta_j$  verbunden durch Kurven  $\gamma_{i,j}$  besteht. Diese Kette ist entweder endlos, oder endet mit einem Gebiet, das sich bis zum Rande von  $E$  streckt. Ebenso geht durch  $\Delta_i$  eine Kette  $\Gamma_{i,k}$ .

Die Ketten  $\Gamma_{i,j}$  können nicht geschlossen sein, d. h. man kommt nie zu einem Gebiet  $\Delta_i$  oder  $\Delta_j$ , das mit einem vorigen identisch ist. Man zeigt nämlich mit Hilfe des Argumentprinzips, daß die Funktion  $f(z)$  in dem von einer geschlossenen Kette  $\Gamma_{i,j}$  begrenzten Gebiet nur solche Werte annehmen könnte, die entweder sämtlich zu  $C_i$  oder sämtlich zu  $C_j$  gehören. In derselben Weise wird gezeigt, daß zwei Ketten  $\Gamma_{i,j}$  und  $\Gamma_{i,k}$  höchstens *ein* gemeinsames Gebiet  $\Delta_i$  haben.

### 3. Zurückführung des Beweises auf den Beweis eines Hilfssatzes

Wenn  $f(z)$  im Kreise  $|z| < r_0 < 1$  keinen zu  $C_\infty$  gehörigen Wert annimmt, d. h. wenn in diesem Kreise  $|f(z) - w_0| \leq \frac{R}{\operatorname{tg} \frac{d}{4}}$  gilt, so folgt

in bekannter Weise  $r_0 \leq \frac{R}{\operatorname{tg} \frac{d}{4}} < \frac{4R}{d}$ . Ist  $f(z)$  in demselben Kreis von

allen zu  $C_i$  gehörigen Werten verschieden, so gilt, wenn der Mittelpunkt und Radius von  $C_i$  mit  $a_i$  und  $\rho_i$  bezeichnet werden,  $\left| \frac{1}{f(z) - a_i} \right| \leq \frac{1}{\rho_i}$

für  $|z| < r_0$ . Die Ableitung der Funktion  $\frac{1}{f(z) - a_i}$  im Nullpunkt ist gleich  $-\frac{1}{a_i^2}$ . Daraus folgt

$$r_0 \leq \frac{|a_i|^2}{\rho_i} \leq \frac{\left( |w_0| + \frac{R}{\cos \frac{\alpha_i}{2}} \right)^2}{R \operatorname{tg} \frac{\alpha_i}{2}} = \frac{2 \left( |w_0| \cos \frac{\alpha_i}{2} + R \right)^2}{R \sin \alpha_i} \\ \leq \frac{2(|w_0| + R)^2}{R \sin d} < \frac{4(|w_0| + R)^2}{R d}.$$

Im folgenden wählen wir  $r_0 = \frac{4(|w_0| + R)^2}{R d}$ , und nehmen an, daß

durch diese Wahl  $r_0 < 1$  ausfällt. Da die Ungleichung  $r_0 \geq \frac{4R}{d}$  *a fortiori* erfüllt ist, so sind wir sicher, daß es Gebiete aller vier Arten  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  und  $\Delta_\infty$  gibt, welche ganz oder zum Teil im Kreise  $|z| < r_0$  liegen.

Ich fixiere nun ein Gebiet  $\Delta_\infty^{(0)}$  der vierten Art, das vom Kreise  $|z| = r_0$  getroffen wird, gehe von einem auf diesem Kreis gelegenen Punkt des betrachteten Gebietes aus und beschreibe die Kreisperipherie im positiven Sinn bis ich zum erstenmal auf eine Kette  $\Gamma_{1,2}, \Gamma_{2,3}$  oder  $\Gamma_{3,1}$  treffe. Es sei dies die Kette  $\Gamma_{i,j}^{(0)}$ . Zwischen  $\Delta_\infty^{(0)}$  und  $\Gamma_{i,j}^{(0)}$  liegt ein eindeutig bestimmtes Teilgebiet  $D_0$  des Kreisringes  $r_0 < |z| < 1$ , das auf seinem Rande einen Teil des soeben im positiven Sinne durchlaufenen Kreisbogens enthält. Falls in  $D_0$  kein Gebiet  $\Delta_k$  ( $i \neq j \neq k$ ) liegt, so setzen wir  $\Omega_0 = D_0$  und das Verfahren bricht hiermit ab. Im entgegengesetzten Falle sei  $\Delta_k^{(1)}$  dasjenige Gebiet  $\Delta_k$ , dessen Abstand  $r_1$  ( $> r_0$ ) vom Nullpunkt am kleinsten ist. Wir ziehen den  $\Delta_k^{(1)}$  berührenden Bogen des Kreises  $|z| = r_1$  und bezeichnen mit  $\Omega_0$  das zwischen diesem Bogen und dem Kreise  $|z| = r_0$  fallende Teilgebiet von  $D_0$ .

Durch das Gebiet  $\Delta_k^{(1)}$  geht eine Kette  $\Gamma_{k,i}^{(1)}$ , welche in der einen Richtung von  $\Delta_k^{(1)}$  gerechnet ganz innerhalb  $D_0$  verläuft und zur Peripherie des Einheitskreises führt. Das außerhalb  $\Omega_0$  gelegene Teilgebiet von  $D_0$ , welches zwischen  $\Gamma_{k,i}^{(1)}$  und  $\Delta_\infty^{(0)}$  liegt, ist von derselben Art wie  $D_0$ . Wir können also von diesem Gebiet ausgehend das auf  $D_0$  angewandte Verfahren wiederholen.

Andererseits betrachten wir die von dem Gebiet  $\Delta_k^{(1)}$  ausgehenden Kurven  $\lambda_k$ , welche der kürzesten Strecke zwischen  $C_k$  und  $C_\infty$  entsprechen. Es gibt eine dieser Kurven, welche innerhalb  $D_0$  durch die Kette  $\Gamma_{k,i}^{(1)}$  vom Kreise  $|z| = r_0$  getrennt wird. Sie führt entweder zum Rande von  $E$ , oder zu einem neuen Gebiet  $\Delta_\infty$ . Wir bezeichnen mit  $D_1$  das außerhalb  $\Omega_0$  gelegene Teilgebiet von  $D_0$ , das auf der einen Seite von  $\Gamma_{i,j}^{(0)}$ , auf der anderen Seite von  $\Delta_k^{(1)}$  und den damit zusammenhängenden  $\lambda_k$  und  $\Delta_\infty$  begrenzt wird. Wenn nun weder im inneren noch auf dem Rande von  $D_1$  ein zu einem  $\Delta_\infty$  gelegener Punkt liegt<sup>5)</sup>, so setzt man  $\Omega_1 = D_1$  und das Verfahren bricht ab. Anderenfalls sei  $\Delta_\infty^{(1)}$  das in  $D_1$  gelegene oder an  $D_1$  grenzende Gebiet  $\Delta_\infty$ , dessen Abstand  $r_2$  vom Nullpunkt am kleinsten ist. Durch einen Bogen des Kreises  $|z| = r_2$ , der das Gebiet  $\Delta_\infty^{(1)}$  berührt, schneiden wir dann das Teilgebiet  $\Omega_1$  von  $D_1$  ab<sup>6)</sup>.

<sup>5)</sup> Dieser Fall kann nur eintreten, wenn  $\lambda_k$  zum Rande von  $E$  führt.

<sup>6)</sup> Falls schon das auf  $|z| = r_1$  gelegene Randstück von  $D_1$  von einem  $\Delta_\infty$  getroffen wird, so fällt der ganze Schritt aus.

Schließlich betrachten wir noch das außerhalb  $\Omega_1$  fallende Teilgebiet von  $D_1$ , welches zwischen  $\Delta_\infty^{(1)}$  und  $\Gamma_{i,j}^{(0)}$  liegt, und wiederholen von diesem Gebiet ausgehend nochmals das auf  $D_0$  angewandte Verfahren. Wir haben hierdurch einen endlichen oder unendlichen Algorithmus definiert, der zur Konstruktion eines Systems aneinandergelegter Gebiete  $\Omega$  führt. Jedes Gebiet  $\Omega$  wird von zwei Kreisbogen  $|z| = r'$  und  $|z| = r''$  und zwei die Endpunkte dieser Bogen verbindenden Kurven  $L_1$  und  $L_2$  begrenzt. Wiederholt man den ganzen Algorithmus, indem man von  $\Delta_\infty^{(0)}$  ausgehend die Peripherie  $|z| = r_0$  jetzt in *negativer* Richtung durchläuft, so erhält man ein neues, ähnliches System von Gebieten  $\Omega$ .

Die Funktion  $f(z)$  besitzt in jedem Gebiet  $\Omega$  eine der folgenden zwei Eigenschaften:

1. Die auf  $L_1$  angenommenen Randwerte gehören zu  $C_\infty$ , und die Randwerte auf  $L_2$  liegen auf  $C_i, C_j$  oder auf dem zwischenliegenden Bogen  $\delta_{i,j}$ , während  $f(z)$  im inneren von  $\Omega$  keinen zu  $C_k$  ( $i \neq j \neq k$ ) gehörigen Wert annimmt.

2. Die Randwerte auf  $L_1$  gehören zu  $C_i, C_j$  oder  $\delta_{i,j}$ , und die Werte auf  $L_2$  gehören zu  $C_k$  oder zu der kürzesten Strecke zwischen  $C_k$  und  $C_\infty$ . Im inneren nimmt  $f(z)$  keinen zu  $C_\infty$  gehörigen Wert an.

Der erste Fall tritt für  $\Omega_0$ , der zweite für  $\Omega_1$  ein.

Im nächsten Abschnitt werden wir einen Hilfssatz beweisen, aus dem sofort folgt, daß die Gebiete  $\Omega$  in beiden Fällen einer Ungleichung

$$(1) \quad \int_{r'}^{r''} \frac{dr}{r \theta(r)} < K$$

genügen müssen, wobei  $K$  eine Konstante und  $r \theta(r)$  die Gesamtlänge der in  $\Omega$  liegenden Bogen des Kreises  $|z| = r$  bezeichnen. Für jedes  $r$  ist offenbar  $\Sigma \theta(r) \leq 2\pi$ , wenn die Summe über alle vom Kreise  $|z| = r$  getroffenen Gebiete  $\Omega$  erstreckt wird.

Aus (1) läßt sich die gesuchte Ungleichung leicht herleiten. Es sei in der Tat  $n(r)$  die Anzahl der vom Kreise  $|z| = r$  getroffenen Gebiete  $\Omega$ . Dann ist, wie aus dem Aufbau des Algorithmus sofort hervorgeht, die Anzahl der ganz oder zum Teil in  $|z| < r$  gelegenen Gebiete  $\Omega$  höchstens gleich  $3n(r) - 4$ . Wir erhalten folglich, wenn wir die zu diesen Gebieten gehörigen Ungleichungen (1) addieren

$$(2) \quad \int_{r_0}^r \left( \Sigma \frac{1}{\theta(t)} \right) \frac{dt}{t} < (3n(r) - 4) K,$$

wo die Summe wieder über alle vom Kreise  $|z| = t$  getroffenen Gebiete  $\Omega$  zu erstrecken ist. Da die Anzahl dieser Gebiete gleich  $n(t)$  ist, so erhält man nach dem Satz vom arithmetischen und harmonischen Mittel

$$\sum \frac{1}{\theta(t)} \geq \frac{n(t)^2}{\sum \theta(t)} \geq \frac{n(t)^2}{2\pi}.$$

Wird dies in (2) eingeführt, so findet man

$$\int_{r_0}^r n(t)^2 \frac{dt}{t} < (3n(r) - 4) 2\pi K$$

oder, wenn das linksstehende Integral mit  $\alpha(r)$  bezeichnet wird,

$$(\alpha(r) + 8\pi K)^2 < 36\pi^2 K^2 \frac{d\alpha(r)}{d\log r},$$

welche Ungleichung für  $r_0 < r < 1$  gültig ist. Durch Integration ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \log \frac{1}{r_0} &= \int_{r_0}^1 d\log r < 36\pi^2 K^2 \int_{r_0}^1 \frac{d\alpha(r)}{(\alpha(r) + 8\pi K)^2} \\ &\leq 36\pi^2 K^2 \int_{\alpha=0}^{\infty} \frac{d\alpha}{(\alpha + 8\pi K)^2} = \frac{9\pi K}{2}, \end{aligned}$$

oder

$$r_0 > e^{-\frac{9}{2}\pi K}.$$

Führt man noch den Wert von  $r_0$  ein (S. 356), so erhält man die endgültige Ungleichung

$$(3) \quad \frac{4(|w_0| + R)^2}{Rd} > e^{-\frac{9}{2}\pi K},$$

wo noch der Wert von  $K$  zu ermitteln ist.

Bei der Herleitung von (3) wurde vorausgesetzt, daß der auf der linken Seite stehende Ausdruck kleiner als 1 ist. Im entgegengesetzten Falle ist die Ungleichung trivial.

#### 4. Der Hilfssatz

Auf der Riemannschen Kugel seien  $E_1$  und  $E_2$  zwei punktfremde Kontinuen und  $E_3$  ein drittes Kontinuum, das sowohl mit  $E_1$  als mit  $E_2$  wenigstens einen gemeinsamen Punkt besitzt. In einem Gebiet  $\Omega$  der vorhin betrachteten Art sei eine meromorphe Funktion  $f(z)$  gegeben, welche keinen zu  $E_3$  gehörigen Wert annimmt und deren Randwerte auf  $L_1$  zu  $E_1$  und auf  $L_2$  zu  $E_2$  gehören. Dann gilt

$$(4) \quad \int_{r'}^{r''} \frac{dr}{r \theta(r)} \leq \frac{8\pi}{\delta^2},$$

wo  $\delta$  den Zentriwinkel des kleinsten, auf der Riemannschen Kugel gemessenen Abstandes zwischen  $E_1$  und  $E_2$  bezeichnet:

*Vorbemerkung:* Auch wenn  $E_3$  keinen zu  $E_1$  und  $E_2$  gehörigen Punkt enthält, bekommt man durch diesen Satz eine Schranke für das Integral (4), vorausgesetzt daß  $E_1$  und  $E_3$  ohne Ueberschreitung von  $E_2$  und ebenso  $E_2$  und  $E_3$  ohne Ueberschreitung von  $E_1$  verbunden werden können. Nur bedeutet  $\delta$  dann nicht mehr den Abstand zwischen  $E_1$  und  $E_2$ , sondern den Abstand der Kontinuen, die durch Hinzufügung der Verbindungskurven entstehen. Jedenfalls ist  $\delta$  höchstens gleich dem Durchmesser von  $E_3$ .

*Beweis:* Es sei  $G$  das von  $E_1$ ,  $E_2$  und  $E_3$  bestimmte Restgebiet der Riemannschen Kugel, das zu allen drei Kontinuen gehörige Randpunkte besitzt. Wir wählen einen beliebigen zu  $E_3$  gehörigen Randpunkt von  $G$  und bezeichnen ihn mit  $W$ .

Der in  $\Omega$  fallende Teil des Kreises  $|z| = r$  ( $r' < r < r''$ ) wird durch die Funktion  $f(z)$  auf eine Kurve abgebildet, welche das Gebiet  $G$  in zwei oder mehrere Teilgebiete zerlegt. Es sei  $g_r$  dasjenige Teilgebiet, das den Randpunkt  $W$  besitzt, und  $\gamma_r$  der Teil des Randes von  $g_r$ , der die Kontinuen  $E_1$  und  $E_2$  verbindet. Schließlich bezeichnen wir noch mit  $\vartheta_r$  den Teil des Kreises  $|z| = r$ , der auf  $\gamma_r$  abgebildet wird.

Bezeichnet  $R$  den Durchmesser der Riemannschen Kugel, so ist die Länge von  $\gamma_r$  wenigstens gleich  $\frac{\delta R}{2}$ . Man hat folglich



$$\int_{\mathfrak{D}_r} \frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2} |dz| \geq \frac{\delta R}{2},$$

woraus durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung folgt

$$\frac{\delta^2 R^2}{4} \leq \int_{\mathfrak{D}_r} |dz| \int_{\mathfrak{D}_r} \frac{|f'|^2}{(1 + |f|^2)^2} |dz| \leq r \theta(r) \int_{\mathfrak{D}_r} \frac{|f'|^2}{(1 + |f|^2)^2} |dz|.$$

Dividiert man durch  $r \theta(r)$  und integriert zwischen den Grenzen  $r'$  und  $r''$ , so wird

$$(5) \quad \frac{\delta^2 R^2}{4} \int_{r'}^{r''} \frac{dr}{r \theta(r)} \leq \int_{r'}^{r''} dr \int_{\mathfrak{D}_r} \frac{|f'|^2}{(1 + |f|^2)^2} |dz|.$$

Das rechtsstehende Doppelintegral stellt die Größe der von den Kurven  $\gamma_r$  erzeugten Fläche dar. Wir werden zeigen, daß durch jeden Punkt höchstens zwei Kurven  $\gamma_r$  hindurchgehen können, und daß die betrachtete Fläche folglich höchstens gleich  $2\pi R^2$  ist<sup>7)</sup>.

Wir nehmen an, daß durch einen Punkt  $w$  die zwei Kurven  $\gamma_{r_1}$  und  $\gamma_{r_2}$  ( $r' < r_1 < r_2 < r''$ ) hindurchgehen. Wir verbinden  $w$  mit  $W$  durch eine Kurve  $\Gamma$ , die innerhalb des gemeinsamen Gebietes von  $g_{r_1}$  und  $g_{r_2}$  verläuft, und betrachten den vom Punkte  $f(z)$  beschriebenen Weg, wenn  $z$  die Randkurve des zwischen  $|z| = r_1$  und  $|z| = r_2$  gelegenen Teilgebietes von  $\Omega$  umläuft, wobei die Stellen wo  $f(z) = w$  durch kleine, nach außen gerichtete Halbkreise zu umgehen sind. Es ist nun klar, daß der Punkt  $f(z)$  die Kurve  $\Gamma$  nur dann überschreiten kann, wenn  $z$  einen dieser Halbkreise beschreibt. Also ist die Variation von  $\arg \frac{f(z) - w}{f(z) - W}$  höchstens gleich  $2\pi$  mal die Gesamtanzahl der auf  $|z| = r_1$  und  $|z| = r_2$  gelegenen Wurzeln der Gleichung  $f(z) = w$ . Hieraus folgt, daß zwischen diesen Kreisen keine Wurzel der genannten Gleichung liegen kann, womit die Richtigkeit unserer Behauptung erwiesen ist.

Aus (5) folgt nunmehr

$$\frac{\delta^2 R^2}{4} \int_{r'}^{r''} \frac{dr}{r \theta(r)} \leq 2\pi R^2,$$

d. h. die Ungleichung (4).

<sup>7)</sup> Sie wird tatsächlich kleiner als  $2\pi R^2$ , wenn  $E_3$  vom positiven Flächenmaß ist.

## 5. Zuendeführung des Beweises

Wir wenden jetzt den Hilfssatz auf die zwei auf S. 358 betrachteten Fälle an.

Im ersten Falle ist  $E_3$  gleich  $C_k$ . Für  $E_1$  kann man  $C_\infty$  und für  $E_2$  das aus  $C_i$ ,  $C_j$  und  $\delta_{i,j}$  bestehende Kontinuum wählen. Um aber zu erreichen, daß  $E_3$  einen Punkt von  $E_1$  und  $E_2$  enthält, rechnen wir zu  $E_1$  noch den kürzesten Bogen zwischen  $C_k$  und  $C_\infty$ , und zu  $E_2$  den zu demselben größten Kreis gehörigen Bogen zwischen  $C_\infty$  und dem Äquatorialkreis  $\bar{C}$ , nötigenfalls unter Hinzunahme eines Bogens von  $\bar{C}$ , der den auf diesem Kreis gelegenen Endpunkt mit  $C_i$  oder  $C_j$  verbindet. Für den kleinsten Abstand  $\delta$  zwischen  $E_1$  und  $E_2$  kommen folgende Bogen in Betracht: 1. Der Durchmesser  $\alpha_k$  von  $C_k$ ; 2. Die Abstände  $\frac{\pi - d - \alpha_i}{2}$  und  $\frac{\pi - d - \alpha_j}{2}$  zwischen  $C_\infty$  und  $C_i$  bzw.  $C_j$ ; 3. Der kleinste Abstand von  $C_i$  oder  $C_j$  zu dem Bogen zwischen  $C_k$  und  $C_\infty$ ; dieser kleinste Abstand wird an einem der Endpunkte erreicht und ist mithin größer als  $\delta_{k,i}$  bzw.  $\delta_{j,k}$  oder  $\frac{\pi - d - \alpha_i}{2}$  bzw.  $\frac{\pi - d - \alpha_j}{2}$ . Es wird also jedenfalls  $\delta \geq d$ .

Im zweiten Falle hat man  $E_3$  gleich  $C_\infty$ .  $E_2$  ist das von  $C_k$  und dem kürzesten Bogen zwischen  $C_k$  und  $C_\infty$  gebildete Kontinuum, und für  $E_1$  wählt man die Kreise  $C_i$  und  $C_j$  mit dem zwischenliegenden Bogen  $\delta_{i,j}$ , verbunden mit  $C_\infty$  durch einen Bogen des durch die Mittelpunkte von  $C_k$  und  $C_\infty$  gehenden größten Kreises und nötigenfalls einen Bogen des Äquatorialkreises  $\bar{C}$ . Dann sieht man ganz wie im ersten Falle ein, daß  $\delta \geq d$  ist.

Wir sind also berechtigt, in die Formel (3) den Wert  $K = \frac{8\pi}{d^2}$  einzutragen, und haben damit unseren Hauptsatz bewiesen.

**Satz.** Wenn die drei Kreise  $C_1$ ,  $C_2$  und  $C_3$  der Bedingung

$$(6) \quad \frac{(|w_0| + R)^2}{R} \leq \frac{d}{4} e^{-\frac{36\pi^2}{d^2}}$$

genügen, wobei die Bedeutung von  $w_0$ ,  $R$  und  $d$  dem vorhergehenden Texte zu entnehmen ist, so wird der Einheitskreis  $|z| < 1$  durch jede in ihm reguläre Funktion  $f(z) = z + \dots$  auf eine Riemannsche Fläche abgebildet, welche wenigstens einen der Kreise  $C_i$  schlicht überdeckt.

Es ist bemerkenswert, daß die rechte Seite von (6) nur die Größe  $d$  enthält und also ausschließlich von der *relativen* Größe und Lage der Kreise  $C_i$  abhängt. Demnach können wir immer durch eine auf drei beliebige Kreise ausgeübte Translation und Ähnlichkeitstransformation erreichen, daß die Bedingung (6) erfüllt wird.

## 6. Verschiedene Folgerungen

Will man aus unserem Satze die ursprüngliche *Blochsche* Formulierung herleiten, so setzt man  $w_0 = 0$  und betrachtet einen symmetrischen Fall, wo die Kreise alle gleich groß sind und durch eine Drehung um  $120^\circ$  um den Nullpunkt auseinander hervorgehen. Um ein möglichst großes  $d$  zu erhalten wählt man  $\alpha_i = \frac{\pi - \alpha_i}{3}$ , d. h.  $\alpha_i = \frac{\pi}{4}$ , woraus  $\delta_{i,j} = \frac{5\pi}{12}$  und folglich  $d = \frac{\pi}{4}$  berechnet wird. Die Ungleichung (6) ist erfüllt für

$$R = \frac{\pi}{16} e^{-576},$$

und die Radien der entsprechenden Kreise  $C_i$  sind

$$B = \frac{\pi}{16} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} e^{-576}.$$

Hierin ist das folgende Resultat enthalten:

*Es gibt eine Konstante  $B$  von der Eigenschaft, daß die von den Werten jeder im Einheitskreise regulären Funktion  $f(z) = z + \dots$  erzeugte Riemannsche Fläche einen Kreis vom Radius  $B$  schlicht überdeckt, dessen Mittelpunkt im Abstände  $\frac{B}{\sin \frac{\pi}{8}}$  vom Nullpunkt liegt.*

Es kann noch hinzugefügt werden, daß die Strahle, die man vom Nullpunkt aus durch die Mittelpunkte der Kreise mit der genannten Eigenschaft zieht, wenigstens ein Drittel aller aus dem Nullpunkt ausgehenden Strahle umfassen.

Schließlich betrachten wir noch eine in der ganzen endlichen Ebene reguläre Funktion  $f(z)$ . Die Funktion  $\frac{f(Az) - f(0)}{A f'(0)}$  ist für jedes noch

so große  $A$  regulär in  $E$  und genügt außerdem unseren Normierungsbedingungen. Uebt man auf drei beliebige, außerhalb einander gelegene Kreise  $C_1, C_2, C_3$  die entsprechende Transformation  $\frac{w - f(0)}{Af'(0)}$  aus, so sieht man, daß für ein genügend großes  $A$  die Bedingung (6) erfüllt wird. Also wird wenigstens einer der Kreise  $C_i$  von der Riemannschen Fläche der Umkehrfunktion von  $f(z)$  schlicht überdeckt. Wir haben hiermit den folgenden Satz gefunden, der zur Bestimmung des Typus einer einfach zusammenhängenden Riemannschen Fläche angewandt werden kann.

*Von drei außerhalb einander gelegenen Kreisen wird wenigstens einer von der Riemannschen Fläche der Umkehrfunktion einer ganzen Funktion schlicht überdeckt.*

Geht man auf den Beweis zurück so erkennt man, daß die Kreise durch drei beliebige, einfach zusammenhängende Gebiete ersetzt werden können.

(Eingegangen den 10. März 1932)

#### **Zusatz während der Korrektur**

Nachdem diese Abhandlung zum Druck gelangt ist, habe ich gemerkt, daß die topologischen Betrachtungen auf S. 31—32 nicht ganz einwandfrei sind. Da ich in einer bald erscheinenden größeren Arbeit die Gelegenheit habe, den Fehler richtigzustellen, bitte ich die Leser, sich mit dieser Erklärung zu befriedigen.