Ein Satz über die Ring- und Strahlklassenzahlen in algebraischen Zahlkörpern.

Ein Satz über die Ring- und Strahlklassenzahlen in algebraischen Zahlkörpern

Von RUDOLF FUETER, Zürich

Nach *Hurwitz*[1]) ist die Klassenzahl eines algebraischen Zahlkörpers gleich der Anzahl nicht äquivalenter Zahlbrüche des Körpers, wobei die Gruppe aller ganzzahligen unimodularer Substitutionen des Körpers zugrunde gelegt wird. Für reguläre Ringe und Strahlen ist meines Wissens kein solcher Satz bekannt. Im folgenden gebe ich für diesen Fall das sehr einfach zu beweisende Resultat. Es scheint mir bemerkenswert, da es auf die Untergruppen der genannten Gruppe ein neues Licht wirft.

1. Es sei s ein Strahl in einem gegebenen algebraischen Zahlkörper k. Derselbe sei aus allen (mod $\mathfrak{f}$) kongruenten Zahlen einer Untergruppe bezüglich der Multiplikation von Restklasssen (mod $\mathfrak{f}$) gebildet[2]). $\mathfrak{f}$ ist sein Führer. Die gebrochenen Zahlen, deren Zähler und Nenner zu $\mathfrak{f}$ teilerfremd sein müssen, und die in den betreffenden Kongruenzklassen liegen, werden ebenfalls zu s hinzugenommen. *In diese Definition fallen auch die regulären Ringe mit dem Führer* $\mathfrak{f}$[3]).

Es sei $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ irgend eine der Substitutionen in k, die folgenden Bedingungen genügen:

a) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind ganze Zahlen von k, die die Gleichung:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

befriedigen.

b) α, δ sind im Strahl s, und γ ist eine Zahl von $\mathfrak{f}$.

Alle S bilden eine Gruppe in Bezug auf Multiplikation, die mit $\mathfrak{G}(s, \mathfrak{f})$ bezeichnet werde. Denn nach dem Multiplikationsgesetz ist:

$$S' S'' = S, \quad S^{(r)} = \begin{pmatrix} \alpha^{(r)} & \beta^{(r)} \\ \gamma^{(r)} & \delta^{(r)} \end{pmatrix}, \; r = 1, 2; \quad S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

---

1) *A. Hurwitz:* Die unimodularen Substitutionen in einem algebraischen Zahlkörper. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. phys. Klasse 1895, S. 332.

2) Siehe etwa die Ausführungen von *H. Hasse:* Bericht über neue Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresber. der D. M. V. Bd. 35 (1926), S. 5 u. ff., wo s als $H(\mathfrak{f})$ bezeichnet wird.

3) Siehe *Rud. Fueter:* Die Klassenkörper der komplexen Multiplikation und ihr Einfluß auf die Entwicklung der Zahlentheorie, Jahresber. D. M. V. Bd. 20 (1911), S. 9—10.

wo S wieder ganze Koeffizienten hat. Anderseits ist:

$$\gamma = \gamma' \alpha'' + \delta' \gamma'',$$

also wieder durch $\mathfrak{f}$ teilbar, da es γ', γ'' sind. Außerdem ist:

$$\alpha = \alpha' \alpha'' + \beta' \gamma'' \equiv \alpha' \alpha'' \quad (\text{mod } \mathfrak{f}),$$
$$\delta = \gamma' \beta'' + \delta' \delta'' \equiv \delta' \delta'' \quad (\text{mod } \mathfrak{f}),$$

sind also beide wieder in s. Ferner ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und die Inverse $\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$ wieder in $\mathfrak{G}(s, \mathfrak{f})$.

2. Jedes zu $\mathfrak{f}$ teilerfremde Ideal $\mathfrak{i} = (\sigma, \tau)$ kann als größter gemeinsamer Teiler einer Zahl σ von s und einer zu $\mathfrak{f}$ teilerfremden Zahl τ aufgefaßt werden. Ist $\mathfrak{i}' = (\sigma', \tau')$ ein zweites Ideal, wo σ', τ' dieselben Bedingungen erfüllen, und sollen $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{i}'$ in der gleichen Strahlklasse liegen, so muß es eine Zahl μ von s geben, für die:

$$(\mu)\, \mathfrak{i}' = \mathfrak{i}$$

ist. $\mu \tau'$ ist dann sicherlich eine ganze Zahl in k. Wir nehmen jetzt eine Zahl φ von $\mathfrak{f}$ mit der Eigenschaft, daß sie zu σ und σ' teilerfremd ist. Dann ist auch:

$$\mathfrak{i} = (\sigma, \varphi\tau), \quad \mathfrak{i}' = (\sigma', \varphi\tau'),$$

und es muß eine Substitution $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ mit ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in k geben[4]), für die:

$$\begin{aligned} \mu \varphi \tau' &= \alpha \varphi \tau + \beta \sigma, \\ \mu \sigma' &= \gamma \varphi \tau + \delta \sigma, \end{aligned} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \tag{1}$$

ist. Aus der ersten Gleichung folgt, daß β durch φ teilbar ist, da σ zu φ teilerfremd ist und $\mu\tau'$ ganz ist: $\beta = \beta' \varphi$. Somit erhält man, wenn man $\gamma' = \varphi \gamma$ setzt, die neuen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mu \tau' &= \alpha \tau + \beta' \sigma, \\ \mu \sigma' &= \gamma' \tau + \delta \sigma, \end{aligned} \qquad \alpha\delta - \beta'\gamma' = 1. \tag{2}$$

---

[4]) *D. Hilbert:* Zahlbericht, Satz 53, oder *Hurwitz*, a.a.O.

$S' = \begin{pmatrix}\alpha & \beta' \\ \gamma' & \delta\end{pmatrix}$ *liegt aber in* $\mathfrak{G}$ $(s, \mathfrak{f})$. Denn γ' ist durch $\mathfrak{f}$ teilbar, und $\mu\sigma' \equiv \delta\sigma$ (mod $\mathfrak{f}$); woraus folgt, daß δ in s liegt, da μ, σ', σ in s liegen nach Annahme. Wegen $\alpha\delta \equiv 1$ (mod $\mathfrak{f}$) muß dann auch α in s liegen. Wenn also $\mathfrak{i} = (\sigma, \tau)$ und $\mathfrak{i}' = (\sigma', \tau')$ in derselben Strahlklasse liegen, und σ, σ' in s sind, so gibt es eine Substitution von $\mathfrak{G}(s, \mathfrak{f})$, so daß die Zahlbrüche τ/σ, τ'/σ' äquivalent sind.

3. Sind umgekehrt zwei Zahlbrüche, deren Zähler und Nenner zu $\mathfrak{f}$ teilerfremd sind, nach $\mathfrak{G}$ $(s, \mathfrak{f})$ äquivalent, so kann man die beiden Zahlbrüche stets in der Form τ/σ, τ'/σ' darstellen, wo σ, σ' in s liegen. Man ordnet den Zahlbrüchen die Ideale $(\sigma, \tau) = \mathfrak{i}$, $(\sigma', \tau') = \mathfrak{i}'$ zu. Verschiedenen Darstellungen eines Zahlbruches in dieser Form entsprechen zugeordnete Ideale (σ, τ) *derselben* Strahlklasse. Aus (2) folgt dann, da γ' durch $\mathfrak{f}$ teilbar ist, daß $\mu\sigma' \equiv \delta\sigma$ (mod $\mathfrak{f}$), d. h. μ muß in s liegen, da es σ', δ, σ nach Annahme tun. Somit sind die den Zahlbrüchen zugeordneten Ideale $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{i}'$ in derselben Strahlklasse.

Aus 2. und 3. folgt der

I. Satz: *Die Strahlklassenzahl von s ist gleich der Anzahl der in Bezug auf* $\mathfrak{G}$ $(s, \mathfrak{f})$ *inäquivalenten Zahlbrüche von k, deren Zähler und Nenner zu* $\mathfrak{f}$ *teilerfremd sind.*

Man kann dieses Resultat mit Hilfe eines entsprechenden Beweises auch anders aussprechen, was für die Formentheorie wichtig ist: Es sei $\bar{\mathfrak{G}}(s, \mathfrak{f})$ die gleiche Gruppe wie $\mathfrak{G}$ $(s, \mathfrak{f})$, nur daß statt der γ die β durch den Führer teilbar sind. Dann gilt der

II. Satz: *Die Strahlklassenzahl von s ist gleich der Anzahl der in bezug auf* $\bar{\mathfrak{G}}$ $(s, \mathfrak{f})$ *inäquivalenten Zahlbrüche von k, deren Zähler durch den Führer* $\mathfrak{f}$ *teilbar, deren Nenner zu* $\mathfrak{f}$ *teilerfremd sind.*

4. Nimmt man als Anwendung die gewöhnlichen primitiven binären quadratischen Formen im Bereiche der ganzen rationalen Zahlen mit der Diskriminante $f^2 m$, wo m negativ und quadratfrei sei:

$$F \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2, \; B^2 - AC = f^2 m,$$

so gibt es, wie man sofort sieht, in jeder Klasse eine Form, in der B durch f, und C durch f^2 teilbar ist. Man kann sich also auf die Frage der Aequivalenz der Formen:

$$F \equiv Ax^2 + 2Bxfy + C(fy)^2, \; B^2 - AC = m,$$

beschränken. Dieselben gehen aber durch:

$$\begin{aligned} y &= \alpha y' + \beta' x', \\ x &= \gamma' y' + \delta x' \end{aligned} \qquad \alpha\delta - \beta'\gamma' = 1,$$

dann und nur dann ineinander über, wenn $\gamma' \equiv 0 \pmod{f}$ ist, also durch die Substitutionen von $\mathfrak{G}(s, f)$. Setzt man $f\beta' = \beta$, $\gamma' = f\gamma$, so geht dann:

$$F' \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2, \; B^2 - AC = m,$$

durch $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $\beta \equiv 0 \pmod{f}$ in eine entsprechende Form der Diskriminante m über. Die Ringklassenzahl ist also gleich der Zahl inäquivalenter Formen der Diskriminante m in bezug auf die Untergruppe der Modulgruppe, für die $\beta \equiv 0 \pmod{f}$.

(Eingegangen den 1. März 1933)