Sur la réductibilité des surfaces analytiques au voisinage d'un point donné.

Autor(en): **Dumas, G.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **4 (1932)**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-5622

Sur la réductibilité des surfaces analytiques au voisinage d'un point donné

par GUSTAVE DUMAS, Lausanne

Introduction

Malgré l'importance et le nombre des recherches faites jusqu'ici à propos des singularités des surfaces algébriques, on ne peut dire que la résolution de ces singularités soit un problème complètement achevé [1]).

En un point d'une surface algébrique quelconque on ne peut, à l'heure actuelle, décrire l'exact comportement de celle-ci, avec la même précision que pour les courbes planes. On devrait tout au moins savoir en distinguer les nappes indépendantes.

S'il s'agit d'obtenir la dissociation *effective* d'une singularité que présente en O, c'est-à-dire en $x = y = z = 0$, une surface algébrique S:

$$f(x, y, z) = 0,$$

on ne doit pas se placer au point de vue théorique [2]), en s'appuyant sur l'hypothèse de f irréductible en O. La seule hypothèse légitime est celle d'un premier membre f, débarrassé de ses facteurs multiples en O, par le moyen de l'algorithme d'Euclide.

Les facteurs simples irréductibles, la dissociation doit les faire surgir. Autant donc, avant tout, tâcher d'atteindre directement ceux-ci.

Le théorème préliminaire de Weierstrass, c'est naturel, joue un grand rôle dans ce travail. Le premier paragraphe lui est consacré.

Puis, ce sont des cas de réductibilité relatifs à des surfaces admettant l'axe des x pour ligne singulière. De ceux-ci, l'on passe sans difficulté

---

[1]) Deux grands traités sont en rapport étroit avec le travail dans son ensemble. Ce sont les traités de M. *Osgood*, „Lehrbuch der Funktionenthorie" en ce qui concerne les questions de divisibilité et celui de M. *Enriques:* «Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche» pour ce qui a trait plus spécialement aux singularités. Le tome II, 2ème Edition, du premier de ces ouvrages sera désigné, pour les références, par la lettre *O*, le tome II du second, par les lettres *E-C.* Il faut citer également: *Gustave Dumas* «Sur les fonctions à caractère algébrique dans le voisinage d'un point donné». Thèse de l'Université, Paris 1904. Ce travail sera représenté par la lettre *Th.*

[2]) Voir *O*, p. 153, l'énoncé du théorème relatif à la représentation paramétrique d'une surface en un point donné.

à des lignes singulières générales, ainsi qu'aux cycles de nappes qui leur sont attachés.

L'étude se termine par un exemple relatif au cas spécial du théorème préliminaire.

Au cours de l'exposé, et, sans que cela ressorte toujours ou soit continuellement répété, le polyèdre des fonctions intervient partout.

Par le polyèdre en un point donné d'une surface et par les substitutions correspondantes, on obtient facilement les lignes multiples. Bien que l'établissement de ce fait ait été passé sous silence, c'est par lui que les cas de réductibilité étudiés ont immédiatement surgi.

Dans le titre du travail, enfin, et le plus souvent dans le texte, c'est de surfaces analytiques et non de surfaces algébriques qu'il s'agit. Cela pour tenir compte du fait que les surfaces ou portions de surfaces algébriques, qui apparaissent au cours d'une résolution de singularité, se rencontrent le plus souvent sous forme analytique et créent ainsi l'obligation de se maintenir dans une généralité aussi étendue que possible.

Le théorème préliminaire de Weierstrass

1. En introduisant une notion de congruence dont le sens est immédiat, on peut énoncer comme suit cette importante proposition:

Soit

$$f = f(z, x_1, x_2, \dots x_n) = f(z, (x))$$

une série entière en z *et en* $x_1, x_2, \dots x_n$, *pour laquelle on a*

$$f \equiv z^{\rho}\,\varphi(z) \pmod{(x)} \tag{1}$$

avec

$$\rho > 0$$

et $\varphi(z)$ *série entière en* z *satisfaisant à la congruence*

$$\varphi(z) \equiv 1 \pmod{z}.$$

On a, dans ce cas, et d'une seule façon,

$$f(z, (x)) = E(z, (x)) \,.\, P(z, (x)) \tag{2}$$

où E représente une série unité en O relativement aux z et (x), satisfaisant à la congruence

$$E(z, (x)) \equiv 1 \pmod{(z, (x))}$$

et P un pseudo-polynôme de degré ϱ en z satisfaisant à la congruence

$$P(z, (x)) \equiv z^{\varrho} \pmod{(x)}.$$

Lorsque f, au lieu de satisfaire à une congruence telle que (1), satisfait à la suivante:

$$f \equiv 0 \pmod{(x)} \tag{3}$$

une décomposition de f en un produit semblable à (2) où interviendrait une série unité en O et un pseudo-polynôme en z, nécessairement congru à zéro suivant les x, est en général impossible[3]).

Suivant que f satisfait à (1) ou à (3) nous dirons, dans la suite, que nous nous trouvons dans le cas général ou dans le cas spécial du théorème de Weierstrass.

Les démonstrations du théorème, dans le cas général, sont nombreuses. Elles établissent toutes, la convergence des séries E et P au voisinage de O dans (2). On peut parvenir à celles-ci de diverses façons. Quant à l'étendue de la convergence de E relativement à la variable z, elle est, pour E, la même que pour f.

2. Supposons que l'on ait

$$f \equiv \psi(z) \pmod{(x)} \tag{4}$$

avec $\psi(z)$ polynôme entier en z, et $f = f(z, (x))$ convergente pour toute valeur finie de z.

Mettons les différentes racines de $\psi(z)$ en évidence, en écrivant

$$\psi(z) = \prod_{i=1}^{k} (z - a_i)^{r_i}, \tag{5}$$

l'une de ces racines pouvant d'ailleurs être nulle.

[3]) Au sujet de la seconde partie de l'énoncé, voir O p. 89.

L'application successive du théorème de Weierstrass aux diverses racines de ψ, permet d'écrire:

$$f = E \prod_{i=1}^{k} \Psi_i \tag{6}$$

où E est une série entière qui dépend de z et des (x_i), convergente pour toute valeur finie de z, et pour laquelle on a

$$E \equiv 1 \quad (\text{mod } (z, (x)),$$

tandis que Ψ_i est un pseudo-polynôme en $z - a_i$, de degré r_i.

Pour Ψ_i, l'on a:

$$\Psi_i \equiv (z - a_i)^{r_i} \quad (\text{mod } (x))$$

avec $i = 1, 2, \ldots k$.

Une conclusion se dégage de l'égalité (6). Le produit des k facteurs Ψ_i est, en définitive, un pseudo-polynôme Ψ en z, de degré

$$r = z_1 + z_2 + \ldots + z_k ,$$

c'est-à-dire de degré égal à celui du polynôme entier $\psi(z)$.

Si donc f, supposée convergente pour toute valeur finie de z, satisfait à la congruence (4), on pourra de f dégager un facteur E de façon à avoir

$$f = E\,\Psi$$

où Ψ sera pseudo-polynôme en z.

Cette remarque ne devant pas intervenir plus loin, on peut passer sur un procédé de détermination effective de E. Il n'en est pas de même de celle des facteurs Ψ_i, étant donné Ψ.

Il convient de s'y arrêter.

Comme f, Ψ satisfait à (4), on a

$$\Psi \equiv \psi(z) \quad (\text{mod } (x)).$$

Le degré de Ψ est ainsi égal au degré r de ψ, et si l'on ordonne Ψ suivant des polynômes homogènes relativement aux variables (x), les coefficients dans ces polynômes homogènes se trouvent être des polynômes entiers en z de degrés égaux au plus à $(r - 1)$.

La décomposition de Ψ en facteurs Ψ_i suppose, d'autre part et pour le moins, au second membre de (5), *deux diviseurs distincts*, à résultant par conséquent différent de zéro.

Supposons qu'il en soit ainsi et que ces deux diviseurs soient les polynomes entiers g et h, de degrés respectivement égaux à λ et μ. On aura

$$\psi = g\,h \quad \text{avec} \quad r = \lambda + \mu.$$

Les deux diviseurs G et H de Ψ correspondant à g et h s'obtiennent alors successivement par résolution d'égalités en nombre infini de la forme

$$g\,h_1 + h\,g_1 = f_1$$

où f_1 est un polynôme donné, entier en z, de degré au plus égal à $r - 1$ et où g_1 et h_1 doivent être des polynômes entiers en z de degrés respectivement aux plus égaux à $\lambda - 1$ et $\mu - 1$.

Ces polynômes g_1 et h_1 sont déterminés d'une manière unique, du fait que le résultant de g et h se trouve être une constante numérique différente de zéro.

De proche en proche, on peut construire ainsi les diviseurs G et H demandés, et, de proche en proche, par conséquent, toujours par le même procédé, en arriver finalement aux diviseurs Ψ_i de Ψ, dans le cas où de pareils diviseurs de Ψ existent effectivement, celui où toutes les racines de $\psi(z)$ ne sont pas égales entre elles.

3. Un autre cas, légèrement différent de celui qui précède, doit retenir encore l'attention.

Soit $\Phi\,(z)$ un pseudo-polynôme en z, de degré $r + \rho + l$, satisfaisant à une congruence de la forme

$$\Phi \equiv z^\rho\,\psi \quad (\text{mod } (x)),$$

pour laquelle on a $\rho \geqq 0$ et où ψ est un polynôme entier en z de degré r, différent de zéro, pour $z = 0$.

Il existe alors, d'une manière unique, deux pseudo-polynomes en z, l'un H de degré $\varrho + l$, l'autre Ψ de degré r et satisfaisant à la congruence $\Psi \equiv \psi \pmod{(x)}$, tels que la décomposition

$$\Phi = H \Psi$$

ait lieu, Ψ ne contenant d'autre part qu'un seul terme en z^r, celui qui provient de $\psi(z)$.

La chose est immédiate et repose sur le fait qu'une égalité de la forme

$$z^\varrho \psi_1 + \psi(z) h_1 = f_1$$

dans laquelle f_1 est un polynôme entier en z de degré au plus égal à $z + \varrho + l$, peut toujours être résolue d'unique façon par un polynôme entier ψ_1 de degré au plus égal à $r - 1$ et le second, h_1, par conséquent, de degré égal à $\varrho + l$.

Dans le cas de $\varrho > 0$, c'est évident, puisque le résultant de z^ϱ et de $\psi(z)$ est une quantité numérique différente de zéro; dans le cas de $\varrho = 0$, également, puisque ψ_1 et h_1 ne sont alors que le reste et le quotient de la division de f_1 par ψ[4]).

Irréductibilité en un point; polyèdres

4. Passons maintenant à trois variables et soit O le point de coordonnées $x = y = z = 0$, soit, en outre, $f(x, y, z)$ une fonction analytique en O, et nulle en O.

La fonction $f(x, y, z)$ est alors par définition *réductible* en O, si elle peut se mettre sous la forme d'un produit $f = PQ$ de deux autres fonctions analytiques en O, $P(x, y, z)$ et $Q(x, y, z)$ *nulles toutes deux* également en O.

$f(x, y, z)$ est *irréductible* en O, si pareille décomposition ne peut se présenter pour elle en O[5]). Il s'agit donc d'une notion de *réductibilité toute locale*.

Si, pour la surface ou portion de surface

$$f = 0, \tag{7}$$

[4]) A propos de ce qui précède, voir: « Le théorème préliminaire de Weierstrass » Bull. Soc. Vaud. Sc. nat. 57, 223, février 1929 et *Th., passim.*

[5]) Cf. *O*, page 93.

le point O est *point singulier isolé,* f est nécessairement irréductible en O[6]).

f ne peut être réductible en O, que si la surface (7) admet des *lignes singulières* passant par O.

La présence de lignes singulières n'entraîne pas nécessairement avec elle la réductibilité. La surface

$$x^2 z^2 - y^3 = 0$$

qui admet l'axe Oz pour ligne singulière est, par exemple, irréductible en O[7]).

Somme toute, en faisant abstraction de tous les cas de réductibilité en O qui peuvent s'imaginer et de ceux qui déjà ont été ou pourraient être encore signalés, on peut affirmer qu'en général et à l'opposé de ce qui se passe pour les courbes analytiques planes $f(x, y) = 0$, toute surface telle que (7) est irréductible en O. Le continuum défini par une équation telle que (7) au voisinage d'un de ses points O, est donc en général d'un seul tenant. Les exemples les plus simples permettent de l'affirmer.

5. Si l'on considère le polyèdre attaché à une fonction analytique en O, on aboutit au même résultat.

On sait comment ce polyèdre se construit. Pour les fonctions de trois variables analytiques en O, il s'obtient de la même façon que le polygone de Newton dans le cas de deux variables seulement[8]).

Or, l'examen du mode de connexion des éléments de surface, relatifs à deux faces contigües du polyèdre, montre que ces éléments de surface ne peuvent être indépendants en général. Un facteur irréductible ne correspond donc pas, en général, à une face isolée.

Les choses ne se passent donc pas pour les surfaces de la même façon que pour les courbes, bien qu'on ait à propos du polyèdre du

---

[6]) Voir *E-C*, p. 638.

[7]) Elle admet même deux lignes singulières en O, l'axe Oz et l'axe Ox. Son polyèdre de structure spéciale, permet d'obtenir facilement pour elle une représentation paramétrique au voisinage de O. Voir: Actes Soc. helv. Sc. nat. Lausanne 1928, p. 129 ou aussi Enseignement mathématique, XXVII^e année, p. 324.

[8]) Au sujet du mode d'emploi et de l'utilité du polyèdre pour la résolution des singularités, voir Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologne, septembre 1928, tome IV, p. 419.

produit de deux fonctions f et g de trois variables, une proposition analogue à celle que l'on a pour les fonctions de deux variables [9]).

Exception faite de quelques cas spéciaux comme ceux qui vont être indiqués, le polyèdre ne fait donc pas ressortir, sans autre, la réductibilité. Un même polyèdre peut d'ailleurs, **10.**, fort bien correspondre à deux fonctions, l'une réductible et l'autre irréductible. Cela dépend de la valeur des coefficients numériques des termes qui définissent le polyèdre.

Réductibilité

6. *Premier cas.*

La surface

$$(8) \qquad \mathcal{P}(x, y, z) = 0$$

que nous allons considérer correspond, par hypothèse, au polyèdre donné, fig. 1.

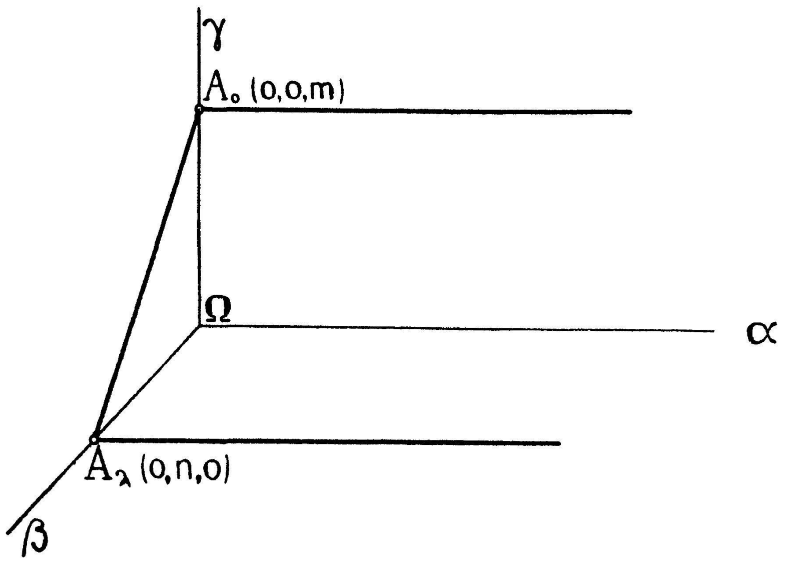

Fig. 1.

Le polyèdre, on le voit, n'a qu'une seule face, face parallèle à l'axe $\Omega\alpha$. En supposant, ce que l'on fait ici, qu'un point α, β, γ est représentatif du terme $M x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}$ de $\mathcal{P}$, on voit que la surface (8) passe par l'axe Ox.

---

[9]) Voir *Th.* page 13 et pour la proposition dans le cas d'un nombre quelconque de variables: *Matsusaburô Fujiwara,* «Ueber den Mittelkörper zweier konvexen Körper» Science Reports of the Tôhoku Imperial University, Vol. V, No. 4.

On voit aussi, par le polyèdre, qu'avec $\mathcal{P}$, l'on se trouve dans le cas général du théorème de Weierstrass, lorsqu'on met à part la variable z.

$\mathcal{P}$ admet donc comme diviseur un pseudo-polynôme $P(z\,;\,x,y)$ ayant, lui aussi, comme polyèdre, celui de fig. 1, tandis que la surface (8) se trouve au voisinage de O, entièrement représentée par l'équation

$$P(z\,;\,x,y)=0.$$

Soit, maintenant, en se rapportant à fig. 1 : $m=\lambda p$, $n=\lambda q$, λ étant le plus grand commun diviseur de m et n ; p et q sont ainsi des entiers positifs sans diviseur commun.

Quant à l'équation de l'unique face du polyèdre, elle est:

$$p\beta+q\gamma=\lambda pq.$$

Cela étant, on peut écrire, en correspondance avec le polyèdre,

$$P(z\,;\,x,y)=f(y,z)+\sum Mx^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma} \tag{9}$$

où

$$f(y,z)=z^{\lambda p}+\ldots+A_{\lambda-i}\,z^{ip}\,y^{(\lambda-i)q}+\ldots+A_{\lambda}\,y^{\lambda q}.$$

Le point A_0 a comme correspondant dans f, le terme $z^{\lambda p}$, le point A_λ, le terme indépendant de z. Le coefficient A_λ dans f est supposé différent de zéro; sous Σ, les exposants α, β, γ satisfont à des inégalités qui découlent immédiatement du polyèdre.

Faisons, dans (9), la substitution

$$\begin{cases} y=\eta^{p} \\ z=\eta^{q}\,\zeta, \end{cases} \tag{10}$$

on obtiendra

$$P(z\,;\,x,\eta^{p})=P(\eta^{q}\,\zeta;\,x,\eta^{p})=\eta^{\lambda pq}\,\overline{P}(\zeta;\,x,\eta) \tag{11}$$

avec

$$\overline{P}(\zeta;\,x,\eta)=F(\zeta^{p})+\sum M\,x^{\alpha}\,\eta^{\varepsilon}\,\zeta^{\gamma}$$

où

$$F(\zeta^{p})=\zeta^{\lambda p}+\ldots+A_{\lambda-i}\,\zeta^{ip}+\ldots+A_{\lambda}.$$

Or, $\overline{P}$, à cause des valeurs qu'ont α et maintenant ε, satisfait à la congruence

$$\overline{P}\equiv F(\zeta^{p})\pmod{x,\eta};$$

alors que, sous Σ, l'on a encore $\gamma\leq m-1$.

On se trouve par conséquent avec $\overline{P}$, dans un cas analogue à celui de **2.**; $\overline{P}$ est décomposable en facteurs au voisinage de $x = \eta = 0$.

En posant

$$F(\zeta_p) = \prod_{i=1}^{k} (\zeta^p - a_i^p)^{r_i}, \tag{12}$$

les a_i^p étant des quantités distinctes entre elles et de zéro, et les r_i satisfaisant à l'égalité

$$r_1 + r_2 + \dots + r_k = \lambda,$$

on aura donc:

$$\overline{P} = \prod_{i-1}^{k} \overline{P}_i \tag{13}$$

avec

$$\overline{P}_i = (\zeta^p - a_i^p)^{r_i} + \sum_{\gamma < pr_i} M_i \, x^\alpha \eta^{\varepsilon'} \zeta^\gamma,$$

$(i = 1, 2, \dots k)$.

Multiplions dans (13), le pseudo-polynôme $\overline{P}_i$ par le facteur $\eta^{r_i pq}$, on tombera sur un autre pseudo-polynôme $\eta^{r_i pq}\,\overline{P}_i$, dans lequel on pourra, sans introduction de puissances négatives de η, remplacer de nouveau $\eta^q \zeta$ par la variable z.

La multiplication indiquée conduit par suite à un pseudo-polynôme

$$\overline{Q}_i(z;\, x,\, \eta) = (z^p - a^p_i \eta^{pq})^{r_i} + \sum_{\gamma < pri} M_i \, x^\alpha \eta^{\varepsilon'} z^\gamma .$$

Si, donc, on multiplie les deux membres de (13), par $\eta^{\lambda pq}$, on arrivera, à cause de (11), à la nouvelle égalité

$$P(z;\, x,\, \eta^p) = \prod_{i=1}^{k} \overline{Q}_i(z;\, x,\, \eta).$$

Remplaçons dans celle-ci, ω désignant une racine primitive $p^{\text{ième}}$ de l'unité, η par $\omega\eta$. Le premier membre ne change pas; dans le second, les facteurs $\overline{Q}_i$, nullement irréductibles peut-être, ne peuvent se permuter entre eux.

Or, on sait[10]) qu'un pseudo-polynôme tel que P, n'est décomposable essentiellement que d'une seule façon en un produit de pseudo-polynômes de même nature que lui. Chaque facteur $\overline{Q}_i$ reste ainsi identique à lui-même après le remplacement de η par $\omega\eta$.

Comme, d'après (10), $\eta^p = y$, on en conclut aussitôt que le pseudo-polynôme $P(z; x, y)$ est réductible en un produit de facteurs $Q_i(z; x, y)$.

On a de la sorte

$$P = \prod_{i=1}^{k} Q_i \,,$$

où les Q_i représentent des pseudo-polynômes dont les $\overline{Q}_i$ donnent de suite la structure.

Cette réductibilité de P aurait pu s'établir autrement, d'une manière constructive pour ainsi dire, en montrant que dans chaque terme ou groupe de termes des Q_i, obtenu pas à pas par le procédé de **2.**, l'inversion de la transformation (10) est possible.

7. *Second cas.*

Le polyèdre, dans celui-ci, comporte, fig. 2, un certain nombre de faces parallèles à $\Omega\alpha$.

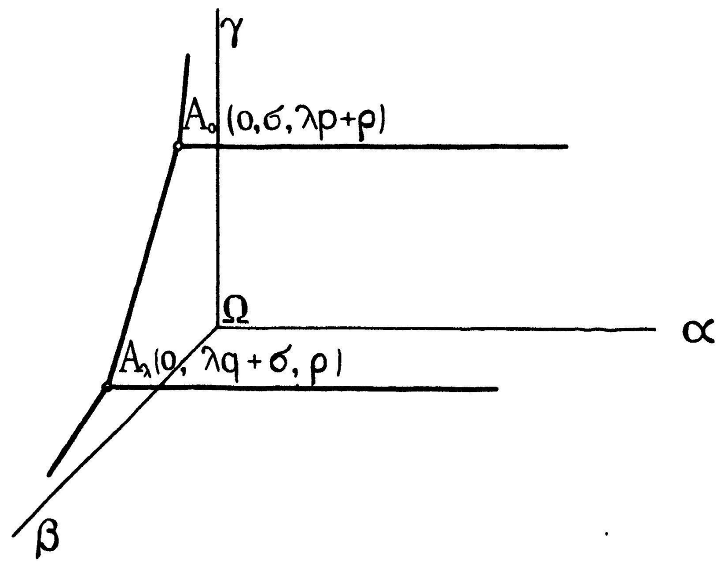

Fig. 2.

Le contour brisé qu'il détermine sur le plan $\Omega\beta\gamma$, contient au moins une arête, non parallèle à $\Omega\gamma$, l'arête $A_\lambda A_0$.

10) O, p. 104, 1ère proposition.

Le contour ne se termine pas nécessairement par $\Omega\gamma$; sa dernière arête peut n'être que parallèle à cet axe. Ceci arrive quand l'axe Oz fait partie de la surface considérée en O. Et, comme il faut tenir compte de cette possibilité, nous supposerons la surface donnée par l'équation

$$P(z\,;\,x,y)=0,$$

P étant un pseudo-polynôme en z.

En se rapportant aux indications de fig. 2, on a, tout d'abord, en posant

$$\lambda p\,q+p\,\sigma+q\,\varrho=\delta,$$

pour le plan parallèle à $\Omega\alpha$ qui passe par $A_\lambda A_0$, l'équation

$$p\beta+q\gamma=\delta.$$

Tous les points représentatifs des termes de P sont situés sur ce plan ou en avant ; on a donc

$$P(z\,;\,x,y)=f(y,z)+\sum M\,x^\alpha y^\beta z^\gamma$$

avec

$$f(y,z)=z^\rho\,(z^{\lambda p}+\ \dots\ +A_{\lambda-i}\,z^{ip}\,y^{(\lambda-i)q}+\ \dots\ +A_\lambda y^{\lambda q})\,y^\sigma$$

où ϱ et σ sont des entiers positifs ou nuls. Comme on le voit, les points représentatifs de f tombent, fig. 2, sur le segment A_0A_λ. Sous Σ, les exposants α, β, γ sont soumis à des conditions en rapport avec le polyèdre.

Faisons dans P, la même substitution que dans le premier cas, la substitution

$$(10)\qquad \begin{cases} y=\eta^p \\ z=\eta^q\,\zeta. \end{cases}$$

On obtient alors, d'une part :

$$f(y,z)=\eta^\delta\,\zeta^\rho\,F(\zeta^p)$$

avec

$$F(\zeta^p)=\zeta^{\lambda p}+\ \dots\ +A_{\lambda-i}\,\zeta^{ip}+\ \dots\ +A_\lambda$$

et de l'autre, pour le terme général de P:

$$M x^\alpha y^\beta z^\gamma = \eta^\delta M x^\alpha \eta^\varepsilon \zeta^\gamma$$

avec $\alpha + \varepsilon > 0$.

En posant:

$$\overline{P}(\zeta;\ x, \eta) = \zeta^\rho F(\zeta^p) + \sum M x^\alpha \eta^\varepsilon \zeta^\gamma,$$

on aura de la sorte

$$P(z;\ x, y) = \eta^\delta \overline{P}(\zeta;\ x, \eta). \tag{14}$$

Mais, avec $\overline{P}$, l'on se trouve dans le cas étudié, **3.**

$\overline{P}$ peut donc être décomposé en un produit

$$\overline{P} = \overline{H} \cdot \overline{Q} \tag{15}$$

où $\overline{Q}$ est un pseudo-polynôme en ζ satisfaisant à la congruence

$$\overline{Q} \equiv F(\zeta^p) \mod (x, y),$$

et dont le terme de degré le plus élevé en ζ est $\zeta^{\lambda p}$.

Par (14) et (15), on aboutit ainsi à une égalité

$$P(z;\ x, y) = \eta^\delta \overline{H}\, \overline{Q}.$$

Ce point acquis, un raisonnement, tout à fait semblable à celui du premier cas, montrerait que, par (10), cette dernière égalité devient

$$P(z;\ x, y) = H(z;\ x, y)\ Q(z;\ x, y)$$

où H et Q sont chacun, des pseudo-polynômes en z, mais où Q a précisément la structure du pseudo-polynôme dont le polyèdre était celui de la fig. 1.

Nous avons ainsi établi, dans ce deuxième cas, qu'on peut, du pseudo-polynôme auquel correspond le polyèdre, fig. 2, toujours détacher, en correspondance respective avec chacune des faces, parallèle à $\Omega\alpha$ seulement, un facteur dont le polyèdre a l'allure de celui que donne fig. 1.

8. Les théorèmes de décomposition en facteurs auxquels on vient de parvenir correspondent entièrement à ceux que l'on a pour les fonctions algébriques d'une variable indépendante, théorèmes que l'on peut utiliser pour la résolution des singularités des courbes algébriques planes [11]).

Vrais ainsi dans l'espace à deux et trois dimensions, ils le sont aussi dans l'espace à n dimension; leurs démonstrations, en effet, sont indépendantes du nombre de celles-ci.

Cycles de nappes

9. Supposons dans l'égalité (12), **6.**, $r_1 = 1$, on aura pour le facteur Q_1 correspondant:

$$Q_1 = (z^p - a_1{}^p y^q) + \sum M x^\alpha y^\beta z^\gamma, \tag{16}$$

ce qui, en posant

$$Q_1 = 0, \tag{17}$$

donne une nappe de la surface (8), $\mathscr{P} = 0$.

Mais, cette équation (17), on le verrait en raisonnant comme dans **6.**, conduit à p développements

$$z = a_1 y^{\frac{q}{p}} + P(x, y^{\frac{1}{p}})$$

suivant les puissances entières et croissantes de x et de $y^{\frac{1}{p}}$, nuls pour $x = y = 0$.

Et, ces développements se tirent de l'un d'eux, si, ω étant racine primitive $p^{\text{ième}}$ de l'unité, l'on y remplace successivement $y^{\frac{1}{p}}$ par $\omega^\lambda y^{\frac{1}{p}}$, lorsque λ passe par l'ensemble des valeurs entières $0, 1, 2, \ldots (p-1)$.

Q_1 se trouve de la sorte irréductible en $x = y = z = 0$. L'équation (17) représente une portion de surface contenant l'axe Ox, et composée de p nappes qui se permutent entre elles en O, autour de Ox. Tout se passe donc ici de la même façon que pour les courbes planes.

---

11) Voir *Th.* p. 13 et suivantes, ainsi que la Note de M. *Ostrowski,* à la page 552 de l'article de M. *Hensel:* «Arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen». Encyklopädie der Math. Wiss., t. II 3, fascicule 5.

Nous avons ainsi détaché de la surface (8), $\mathcal{P} = 0$, en O et autour de Ox, ce qu'*Halphen* nomme un *cycle de nappes*[12]. Ce cycle, nous l'avons d'une manière explicite, par l'équation (17), équation en x, y, z.

On voit par là que la surface (8), $\mathcal{P} = 0$ se répartit en O, en λ cycles de nappes autour de Ox, quand chacun des exposants r_i, dans (12), se trouve égal à l'unité.

Mais, quand les r_i ne sont plus tous égaux à l'unité, on a avec chacun des r_i qui ne le sont pas, encore en O, une portion indépendante de surface, qui, suivant le cas, se décomposera ou non en plusieurs cycles de nappes. L'examen de ce dernier point dépasse les limites de cette étude.

10. Si l'on considère la surface

$$(z - y)^2 = (x - 1)\, y^4$$

on voit immédiatement, qu'au point O, $x = y = z = 0$, comme au point A, $x = 1$, $y = z = 0$, elle rentre dans le cas de **6.** Le polyèdre est le même en O et en A. Et, cependant, cette surface est réductible en O, sans l'être en A.

Cas général

11. Des cas de réductibilité considérés plus haut, on passe facilement à un autre assez étendu[13].

Soit

$$\mathcal{P}(x, y, z) = 0, \tag{8}$$

l'équation de la surface considérée, analytique en O et passant par O; soit α, β, γ le point qui, dans le trièdre de référence $\Omega\alpha\beta\gamma$ du polyèdre de $\mathcal{P}$, correspond au terme général $Mx^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}$ de $\mathcal{P}$. Supposons que ce polyèdre ait parmi ses faces une portion du plan $\Omega\beta\gamma$. Cette portion sera limitée par un contour d'arêtes, contour Π correspondant au polynôme entier $f(y, z)$, tiré de $\mathcal{P}$ et déterminé par la congruence:

$$\mathcal{P} \equiv f(y, z) \pmod{x}. \tag{18}$$

[12] Voir E.-C. p. 648 et *Halphen*, Oeuvres, t. II, p. 159.

[13] Ce paragraphe est à rapprocher de résultats antérieurs. Voir, en particulier, le grand Mémoire de M. *Hensel* du tome 23 des Acta Mathematica et les Notes de M. *Beppo Levi*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 134.

Pour qu'il y ait réductibilité en O de la surface $\mathcal{P} = 0$, le long d'une ligne singulière L issue de O, il suffit alors que cette ligne singulière L soit représentable par deux équations

$$(19) \qquad \begin{cases} y = R(x) \\ z = S(x) \end{cases},$$

avec R et S séries entières en x, nulles pour $x = 0$.

La chose est immédiate. Faisons le changement de variables

$$\begin{cases} u = y - R(x) \\ v = z - S(x) \end{cases}$$

La surface (8) devient la surface

$$(20) \qquad Q(x, u, v) = 0$$

tandis que le polynôme entier $f(y, z)$ restant identique à lui-même devient simplement $f(u, v)$. On a, en même temps,

$$(21) \qquad Q(x, u, v) \equiv f(u, v) \pmod{x}.$$

A la ligne L donnée par (19) correspond sur la surface (20), l'axe des x.

Rapportons maintenant la surface (20) au trièdre Ox, Oy, Oz et écrivons en conséquence son équation sous la forme:

$$(20') \qquad Q(x, y, z) = 0.$$

Le polyèdre de cette dernière surface, rapporté au trièdre de référence de tout à l'heure $\Omega\alpha\beta\gamma$, a toutes ses faces, ou du moins une partie d'entre elles, parallèles à l'axe $\Omega\alpha$. Ces dernières s'étendent jusqu'à la face $\Omega\beta\gamma$ et là, à cause de (18) et (21), y déterminent le contour polygonal déjà rencontré Π. Q étant ainsi réductible le long de Ox en O, $\mathcal{P}$ l'est à son tour, le long de L en O.

On voit ainsi, qu'aux facteurs, qu'aux cycles de nappes en particulier, qui s'obtiennent le long de Ox, pour la surface Q, correspondent des facteurs, des cycles de nappes en particulier, le long de L, pour la surface $\mathcal{P}$.

12. Abordons, comme application, un cas traité spécialement par M. Enriques [14]), celui du point biplanaire non isolé.

Soit O ce point; par application du théorème de Weierstrass, l'équation de la surface en O peut s'écrire, les axes étant placés en position générique:

$$z^2 + 2p(x, y)z + q(x, y) = 0 \tag{22}$$

où $p(x, y)$ et $q(x. y)$ sont des séries entières en x et y, nulles pour $x = y = 0$.

Le cône des tangentes à la surface en O dégénérant en deux plans, le contour Π de ci-dessus dans le plan $\Omega\beta\gamma$, n'est autre chose que le segment qui relie entre eux les points $(0, 2, 0)$ et $(0, 0, 2)$ des axes $\Omega\beta$ et $\Omega\gamma$.

La tangente à la ligne singulière L passant par O, se projette, d'autre part, suivant une droite quelconque issue de O. La projection de L sur Oxy répond, par conséquent, à une équation telle que

$$0 = ax + by + \ldots$$

où l'on peut supposer $b \neq 0$.

La projection de L sur Oxy, aura donc une équation de la forme

$$y = R(x), \tag{23}$$

avec R série entière en x, nulle pour $x = 0$.

L, d'autre part, satisfait aussi à l'équation (22) et à la suivante:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z} = z + p(x, y) = 0,$$

de sorte que la projection de L sur le plan des x, z est, à cause de (23), donnée par

$$z = S(x),$$

S étant une série entière en x, nulle pour $x = 0$.

On se trouve ainsi dans les conditions données dans **11.**; la surface (22) est réductible en O le long de L.

[14]) E.-C. page 636.

Cette démonstration, on le voit, s'étend immédiatement au cas général, celui où le cône des tangentes en O, au lieu de dégénérer en deux, dégénère en n plans distincts, $n > 2$, le point O étant sur une nodale issue de O.

Remarque

13. M. Osgood, à propos du théorème préliminaire de Weierstrass a montré, par un exemple [15]), qu'on ne peut, dans la règle, avoir dans le cas spécial, une décomposition analogue à celle que l'on a dans le cas général. Voici un autre exemple propre à remplir le même but.

Considérons la fonction

$$g = x\, e^z - (x + y) \tag{24}$$

pour laquelle on suppose e^z remplacé par son développement suivant les puissances entières et croissantes de z. g, défini par (24), s'annule quel que soit z, pour $x = y = 0$.

La fonction g n'est pas décomposable de la manière indiquée. Si elle l'était, en effet, la fonction

$$z = \operatorname{Log}\left(1 + \frac{y}{x}\right)$$

que définit en $x = y = 0$, c'est à dire en O et au voisinage de O, l'équation $g = 0$, satisferait aussi en O à une équation de la forme $P(z;\, x, y) = 0$, dont le premier membre P serait un pseudo-polynôme en O nul identiquement pour $x = y = 0$.

Elle serait algébroïde en O et aurait, de ce fait, au voisinage de ce point, un nombre fini de déterminations, alors que le contraire a lieu.

(Reçu le 18 février 1932)

[15]) O. p. 90.