Ueber beschränkte automorphe Funktionen.

Ueber beschränkte automorphe Funktionen

Von A. SPEISER, Zürich

Die Riemannschen Flächen, die ich in zwei vorhergehenden Abhandlungen (in Band 1 und 2 dieser Commentarii) untersucht habe, lassen sich dadurch charakterisieren, daß sie zu einer gewissen Untergruppe der Modulgruppe gehören. Gerade wie bei einer allgemeinen algebraischen Funktion ihre Symmetrien erst dann sichtbar werden, wenn man die zugehörige Galoissche Resolvente zu Grunde legt, so ergeben sich auch hier die Symmetrien der Funktionen erst, wenn man die zur Modulfunktion inverse Funktion hinzunimmt. In § 1 dieser Arbeit werden diese Verhältnisse dargestellt mit einem Hinweis auf die störende Contragredienz von funktionaler und kinematischer Betrachtungsweise, auf die ich schon in meiner Gruppentheorie 2. Auflage, pg. 7 eingegangen bin.

Aus der Gruppe, die zu der Riemannschen Fläche gehört, ergibt sich ein einfaches Kriterium zur Unterscheidung des parabolischen und hyperbolischen Falles. Gleichzeitig werden beschränkte automorphe Funktionen durch direkten Ansatz gewonnen in der Art, wie Herr Koebe in seiner Abhandlung Acta math., Bd. 50, automorphe Funktionen definiert.

Die Methoden und Resultate dieser Arbeit lassen sich ohne Aenderung auf sehr viel allgemeinere Arten Riemannscher Flächen ausdehnen. Es wäre interessant, zu untersuchen, ob sich von hier aus ein Weg nach den grundlegenden Nevanlinnaschen Sätzen über den Defekt gewinnen läßt.

1. Ueber die Gruppe gewisser Riemannscher Flächen

Die genannten Riemannschen Flächen lassen sich aus drei Sorten von Blättern zusammensetzen. Die erste Sorte besteht aus der vollen Ebene, die von $+1$ bis $+\infty$ und von -1 bis $-\infty$ längs der reellen Axe aufgeschnitten ist. Die zweite Sorte besitzt nur den Einschnitt von $+1$ bis $+\infty$, die dritte nur denjenigen von -1 bis $-\infty$. Aus diesen Blättern wird die Riemannsche Fläche relationsfrei aufgebaut, indem man mit einem Blatt beginnt, an dessen Ufer neue Blätter anheftet und in dieser Weise fortfährt. Falls man nur Blätter von der Sorte 1 verwendet, erhält man eine bestimmte Riemannsche Fläche, welche ich als die *modulare Fläche* bezeichne. Alle ihre Blätter sind bei $+1$, -1 und ∞ logarithmisch verzweigt. Sie ist Ueberlagerungsfläche aller anderen Flächen.

Da die modulare Fläche alle ihre Blätter gleich umgibt, läßt sie eine unendliche Gruppe von kongruenten Abbildungen auf sich zu. Um sie zu charakterisieren, zeichnet man ein bestimmtes Blatt O aus und gibt an, in welches Blatt A es abgebildet wird. Ist dies einmal festgelegt, so ist für jedes weitere Blatt sein Bild bestimmt gemäß der Vorschrift: das Blatt B geht in dasjenige Blatt C über, das zu A liegt wie B zu O. Bekanntlich läßt sich die modulare Fläche durch eine Modulfunktion auf die obere Halbebene schlicht abbilden. Ein Blatt geht hierbei in ein Kreisbogenviereck über. Insbesondere sei das Bild von O folgendes Viereck (vgl. Klein-Fricke, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Bd. 1, S. 279): Man errichte in den Punkten $z = +1$ und $z = -1$ die senkrechten Geraden nach oben bis ins Unendliche. Ferner lege man durch die Punkte 0 und $+1$ den Kreis, der die reelle Axe senkrecht schneidet und daher den Radius $1/2$ hat, und einen kongruenten Kreis lege man durch -1 und 0. Geht man nun im Blatt O von $+1$ nach $+\infty$ auf dem oberen Ufer, so möge diesem Weg als Bild die Gerade, welche in $z = -1$ errichtet ist, von oben nach unten durchlaufen, entsprechen. Nun kommt man in O von $-\infty$ nach -1 auf dem oberen Ufer zurück, dem entspricht die Durchlaufung des linken Halbkreises von -1 nach 0. Jetzt geht man in O von -1 nach $-\infty$ auf dem unteren Ufer weiter, dem entspricht die Durchlaufung des rechten Halbkreises von 0 nach $+1$, schließlich kommt man von $+\infty$ nach $+1$ auf dem unteren Ufer zurück, dem entspricht die Durchlaufung der Geraden über $z = +1$ nach ∞.

Den kongruenten Abbildungen der Modularfläche auf sich selbst entsprechen bekanntlich in der z-Halbebene Modulsubstitutionen, und zwar sind es diejenigen, welche mod 2 der identischen Abbildung kongruent sind, d. h. die Funktionen

$$\frac{az + b}{cz + d}$$

für welche a und d ungerade, b und c gerade Zahlen sind, während die Determinante $ad - bc = 1$ ist. Die Gesamtheit dieser Abbildungen heiße im folgenden die *Modulgruppe*. Wir wollen die Ebene, auf welche die Riemannschen Flächen gelegt sind, als w-Ebene bezeichnen. Dann möge die Modulfunktion, welche die obere z-Halbebene auf die modulare Fläche abbildet, mit $w = m(z)$ bezeichnet sein, die inverse mit $z = \mu(w)$. Die Funktion $m(z)$ ist automorph unter der Modulgruppe, dagegen ist $\mu(w)$ polymorph und ihre verschiedenen Zweige hängen durch die Linearfunktionen der Modulgruppe zusammen.

Nun sei U die Linearfunktion, welche der Abbildung $O \rightarrow A$ der Modularfläche entspricht, ferner entspreche V der Abbildung $O \rightarrow B$. Uebt man zuerst U, dann V aus, so ist die zusammengesetzte Abbildung selbst linear und zwar wird sie gemäß der Zusammensetzung von Funktionen durch die Matrix VU wiedergegeben. Bei VU geht O über in C, das zu B liegt, wie A zu O. Man kann dies viel deutlicher überblicken, wenn man die kinematische Betrachtungsweise zu Grunde legt. Hier verstehe man unter V die Bewegung der Modularfläche, bei der das Blatt B an die Stelle des Blattes O zu liegen kommt. Auf diese neue Lage wende man die Bewegung U an, dann kommt C an die Stelle des ursprünglichen O zu liegen. Mit Hilfe dieser Bemerkung ist es leicht, jede Abbildung durch erzeugende Abbildungen aufzubauen. Umläuft man nämlich von O ausgehend den Punkt $+1$ in positivem Sinn, so kommt man in dasjenige Exemplar, das am unteren rechten Ufer von O abgeheftet ist. Diese Abbildung sei mit S bezeichnet. Entsprechend sei S^{-1} die Abbildung bei negativer Umlaufung von $+1$, ferner T und T^{-1} die Abbildung bei positiver oder negativer Umlaufung von -1. Nun mögen wir beispielshalber von O nach A durch folgende Umlaufungen kommen: erst geht man zweimal um $+1$, dann einmal negativ um -1, hierauf einmal negativ um $+1$. Die Abbildung wird geliefert durch

$$S\,S\,T^{-1}\,S^{-1}\,.$$

Funktional gedacht müßte man diese Abbildung zeitlich von rechts nach links durchlaufen.

Den Abbildungen S und T kann man folgende Linearfunktionen entsprechen lassen:

$$S\colon \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T\colon \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten jetzt eine beliebige Riemannsche Fläche von der am Anfang des Paragraphen angegebenen Art. Man kann aus ihr die modulare Fläche auf folgende Weise zusammensetzen. In den Blättern mit nur einem Schnitt bringe man den andern noch an. Hierdurch wird die Ausgangsfläche F mit Einschnitten versehen und wir bezeichnen sie jetzt mit F_0. Nun denke man sich unendlich viele kongruente Exemplare dieser Fläche; sie seien mit F_n bezeichnet. An jedes Ufer von F_0 wird ein neues Exemplar mit dem entsprechenden gebenüberliegenden Ufer angeheftet und in dieser Weise fährt man relationenfrei ins Unendliche fort. Die so entstehende Fläche ist mit der modularen Fläche identisch. Weil die verschiedenen Exemplare F_n von den übrigen gleich umgeben sind, kann man die modulare Fläche kongruent auf sich abbilden so, daß diese Exemplare nur unter sich vertauscht werden. Jede dieser Abbildungen ist dadurch festgelegt, daß man angibt, in welches Exemplar F_0 übergeht. Sie bilden eine Untergruppe der Modulgruppe. Um ihre Erzeugenden zu bestimmen, hat man offenbar die Abbildungen zu suchen, welche F_0 in eines der anliegenden Exemplare überführt und es gibt gerade soviele, als die Anzahl der Schnitte beträgt, die in F_0 angebracht sind, also für jedes der Blätter der Sorte 2 oder 3 je eine. Ich behaupte jetzt:

Satz 1: *Die Gruppe der Abbildungen der modularen Fläche, welche die Flächen F_n nur unter sich vertauschen — sie heiße kurz die* ***Gruppe von F,*** *— läßt sich durch parabolische Abbildungen erzeugen.*

Beweis: Um von F_0 in eines der benachbarten Blätter überzugehen, hat man zunächst den Nullpunkt eines bestimmten Blattes von F auszuzeichnen und ihn in allen Exemplaren F_n zu markieren. Hierauf hat man durch Umlaufung von $+1$ oder -1 von diesem Nullpunkt innerhalb von F_0 bis zu demjenigen Blatt zu gehen, an dem das neue Exemplar angehängt ist, in das man zu gelangen wünscht. Dies liefert eine gewisse lineare Funktion A. Jetzt hat man den neu eingeführten singulären Punkt $+1$ oder -1 positiv oder negativ zu umlaufen, was eine der vier Funktionen S, T, S^{-1}, T^{-1} erfordert. Alsdann hat man im neuen Exemplar zum ausgezeichneten Nullpunkt zurückzukehren, was der Funktion A^{-1} entspricht. Dieser ganze Uebergang wird durch ASA^{-1} geleistet, wobei statt S eine der drei übrigen Funktionen stehen kann. Diese Funktion geht aus S durch Transformation mit A hervor. Da nun S eine parabolische Funktion mit dem einzigen Fixpunkt ∞ ist, so ist nach bekannten gruppentheoretischen Sätzen auch die transformierte Funktion parabolisch. Da man alle Abbildungen durch Zusammensetzung mit solchen erhalten kann, ist der Satz bewiesen.

Man sieht daraus, daß die Gruppe $\mathfrak{G}$ der Fläche F endlich oder unendlich viele Erzeugende besitzen kann, je nach der Zahl der Uebergangsblätter der Sorte 2 und 3, die verwendet wurde. Stets ist die Gruppe eine freie Gruppe, die erzeugenden Funktionen sind relationenfrei.

2. Die Unterscheidung zwischen dem hyperbolischen und dem parabolischen Fall

Die Riemannsche Fläche F ist einfach zusammenhängend und sie läßt sich nach dem Fundamentalsatz der konformen Abbildung entweder auf die Euklidische Ebene (die punktierte Kugel) oder auf das Innere des Einheitskreises abbilden. Im ersteren Fall nennen wir F parabolisch, im zweiten hyperbolisch.

Wir nehmen an, F sei hyperbolisch und führen eine Z-Ebene ein. Die Funktion $Z = \varphi(w)$ möge F auf den Einheitskreis dieser Ebene abbilden, $w = f(Z)$ sei die inverse Funktion. Bringen wir auf F die Einschnitte an, welche F_0 ergeben, so werden diese durch $\varphi(w)$ auf den Einheitskreis übertragen und Schnitte liefern, welche von inneren Punkten nach der Peripherie verlaufen, wobei nicht feststeht, ob ein Grenzpunkt auf der Peripherie vorhanden ist, oder ob sich der Einschnitt einem ganzen Stück der Peripherie nähert. Wir setzen jetzt durch die unendlich vielen Exemplare F_n die modulare Fläche zusammen; in entsprechender Weise werden unendlichviele Exemplare der mit Einschnitten versehenen Kreisscheibe gebildet und an einander angeheftet.

Die Funktion $\varphi(m(z))$ bildet die obere z-Halbebene auf die eben konstruierte unendlich vielblättrige Kreisfläche in der Z-Ebene eineindeutig ab. Sie ist automorph unter der Gruppe $\mathfrak{G}$, denn dabei werden die Flächen F_n und infolgedessen auch die Kreisscheiben nur vertauscht, sonst aber kongruent auf einander abgebildet. Wir können die Abbildung so normieren, daß der Punkt $z = i$ und alle damit unter $\mathfrak{G}$ æquivalenten auf den Punkt $Z = 0$ abgebildet werden. Für alle andern Stellen der z-Ebene ist unsere Funktion von Null verschieden.

Nun hat Herr W. Blaschke folgenden Satz[1]) aufgestellt:

Wenn die Funktion $f(z)$ im Kreise $|z| \leqq 1$ regulär und beschränkt ist und daselbst an den Stellen $z_1, z_2, \ldots$ verschwindet, dann ist entweder die Summe

$$(1 - |z_1|) + (1 - |z_2|) + \cdots$$

(die Summe der Abstände der Nullstellen vom Einheitskreis) endlich oder es ist $f(z)$ identisch $= 0$.

[1]) Leipz. Ber. Bd. 67, S. 194, 1915. Vgl. ferner *G. Pólya* und *G. Szegö*, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Band 1, S. 142, Aufgabe 297.

Um diesen Satz anzuwenden, muß die z-Halbebene auf den Einheitskreis abgebildet werden durch die Substitution

$$\frac{z-i}{z+i}$$

und es müssen die Bilder der aus i durch die Gruppe hervorgehenden Stellen bestimmt werden. Es sei

$$\frac{az+b}{cz+d}$$

die allgemeine Substitution der Gruppe $\mathfrak{G}$. Setzen wir $z=i$ und bilden wir diesen Wert auf den Einheitskreis ab, so erhalten wir

$$\frac{ai+b-i(ci+d)}{ai+b+i(ci+d)}=\frac{b+c+i(a-d)}{b-c+i(a+d)}.$$

Der absolute Betrag dieses Bruches ist

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2-2}{a^2+b^2+c^2+d^2+2}}=\delta.$$

Dieser Ausdruck ist kleiner als 1. Wenn man daher den Term $1-\delta$ der Blaschkeschen Reihe mit $1+\delta$ multipliziert, so wird er nicht verdoppelt und das Kriterium kann daher durch die Konvergenz von $1-\delta^2$ oder von

$$\frac{4}{a^2+b^2+c^2+d^2+2}$$

ersetzt werden. Hier darf man 4 im Zähler weglassen, ferner im Nenner den Summanden 2, denn allgemein ist das Minimum einer Summe von 4 Quadraten reeller Zahlen, deren Determinante $=1$ ist, gleich 2. So erhalten wir den

Satz 2: *Eine notwendige Bedingung dafür, daß die Riemannsche Fläche F zum hyperbolischen Typus gehört, besteht darin, daß die Reihe*

$$\sum_{\mathfrak{G}}\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

erstreckt über die Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{G}$, zu welcher F gehört, konvergiert.

Man kann das Kriterium noch etwas umformen. Falls man a und b festhält und c und d alle ganzen Zahlen durchlaufen läßt, welche der Bedingung $ad - bc = 1$ genügen, so liefert die obige Summe, wie man leicht abschätzt, einen Wert von der ungefähren Größe

$$\frac{\pi}{a^2 + b^2}.$$

Für das Eintreten des hyperbolischen Falles ist daher notwendig, daß die Summe

$$\sum \frac{1}{a^2 + b^2}$$

erstreckt über die *verschiedenen* Zahlenpaare a, b in $\mathfrak{G}$ konvergiert. Für die Modulgruppe selber divergiert diese Summe, denn bekanntlich läßt sich jede Primzahl der Form $4n + 1$ als Summe zweier Quadrate, eines ungeraden und eines geraden, darstellen und deren reziproke Werte liefern eine divergente Reihe.

Wir beweisen nun folgenden

Satz 3: *Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Fläche F hyperbolisch ist, besteht darin, daß es eine nichtkonstante Funktion $A(z)$ gibt, die unter der Gruppe $\mathfrak{G}$ automorph und in der oberen z-Halbebene regulär und beschränkt ist.*

Beweis: Daß die Bedingung notwendig ist, folgt aus der am Anfang des Paragraphen gebildeten Funktion $\varphi(m(z))$, welche offenbar den Bedingungen des Satzes genügt.

Um zu zeigen, daß sie auch hinreichend ist, setzen wir voraus, daß $A(z)$ existiert. Dann bilden wir $A(\mu(w))$. Diese Funktion ist auf der modularen Fläche regulär, denn $\mu(w)$ ist es und A ist in der oberen z-Halbebene nach Voraussetzung regulär. Nun behaupte ich, daß diese Funktion schon in der Fläche F regulär ist. In der Tat ist $A(\mu(w))$ auf F eindeutig, denn gehen wir von einem Exemplar F_0 zu einem andern F_n über, so erfährt die polymorphe Funktion $\mu(w)$ eine Substitution von $\mathfrak{G}$. Diese wird durch A wieder aufgehoben. Die Funktion könnte auf F noch Singularitäten besitzen und zwar an den Stellen ± 1, an denen die neuen Exemplare angeheftet sind, die also zu den Einschnitten gehören. Aber weil unsere Funktion in der Umgebung dieser

Stellen eindeutig und beschränkt ist, müssen sie Regularitätsstellen sein. Die Funktion $A(z)$ hebt also diese Singularitäten der Funktion $\mu(w)$ wieder auf. Wäre nun F parabolisch, so ließe sich diese Fläche eineindeutig auf die punktierte Kugel abbilden und wir erhielten eine Funktion, welche darin regulär und beschränkt ist. Sie müsste eine Konstante sein, was nach Voraussetzung nicht der Fall ist. Daher muß F hyperbolisch sein.

3. Die Konstruktion beschränkter automorpher Funktionen

Wir wollen zeigen, daß das Kriterium von Satz 3 auch hinreichend dafür ist, daß F zum hyperbolischen Typus gehört und beweisen den

Satz 4: *Falls die Summe*

$$\sum_{\mathfrak{G}} \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

erstreckt über alle Substitutionen von $\mathfrak{G}$ konvergiert, so gibt es eine nicht konstante Funktion $A(z)$, welche in der oberen Halbebene regulär und beschränkt und unter $\mathfrak{G}$ automorph ist.

Wir werden diesen Satz dadurch beweisen, daß wir die Funktion durch ein unendliches Produkt explizit darstellen.

Zunächst bilden wir wieder die obere z-Halbebene durch die Funktion

$$\frac{z - i}{z + i}$$

auf den Einheitskreis ab und üben nun auf z alle Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{G}$ aus. Die zur Substitution U gehörige Linearfunktion sei:

$$L_U(z) = \frac{az + b - i(cz + d)}{az + b + i(cz + d)} .$$

Wir bilden das Produkt aller dieser Funktionen und betrachten zuerst die absoluten Beträge, also $\Pi \, |L_U(z)|$ erstreckt über alle Substitutionen U von $\mathfrak{G}$.

Um seine Konvergenz zu beweisen, legen wir ein abgeschlossenes Teilgebiet $\mathfrak{D}$ der oberen Halbebene zu Grunde, das den Punkt $z = i$ in seinem Inneren enthält. Diejenigen Faktoren, welche in $\mathfrak{D}$ verschwinden, lassen wir weg; da sich die Nullstellen nur gegen ∞ und gegen die reelle Axe häufen, so betrifft das nur eine endliche Anzahl von Faktoren. Jetzt betrachten wir die Summe reeller Funktionen:

$$\sum \log |L_U(z)|.$$

Jeder Summand ist eine harmonische Funktion, nämlich der Realteil von $\log L_U(z)$, ferner ist er bloß negativer Werte fähig, weil die Linearfunktionen nur Werte aus dem Einheitskreis annehmen. Überdies sind die Funktionen sämtlich regulär, weil wir die verschwindenden weggelassen haben.

Die Summe der Logarithmen konvergiert an der Stelle $z = i$; dies ist der Inhalt der Blaschkeschen Bedingung. Diese Konvergenz wirkt sich auf den ganzen Bereich $\mathfrak{D}$ aus, denn es gilt folgender Satz (vgl. S. Johansson, Math. Ann. Bd. 62, pg. 177 ff., ferner Pólya und Szegö l. c. Bd. 1, S. 134, Satz 257): Wenn eine Reihe von positiven harmonischen Funktionen, die im Innern von $\mathfrak{D}$ regulär sind, in einem einzigen innern Punkte von $\mathfrak{D}$ konvergiert, so konvergiert sie überall in $\mathfrak{D}$, und zwar gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilbereiche von $\mathfrak{D}$.

Hieraus folgt, daß $\Sigma \log |L_U(z)|$ gleichmäßig konvergiert. Wir können nun zum Produkt zurückkehren und die weggelassenen Faktoren wieder hinzunehmen. Es ergibt sich, daß das Produkt eine in der ganzen oberen Halbebene existierende Funktion darstellt, deren Logarithmus eine harmonische Funktion ist, abgesehen von den Nullstellen der Faktoren.

Nun sollen die absoluten Beträge weggelassen werden und das Produkt $\Pi L_U(z)$ untersucht werden. In dieser Form wird im allgemeinen keine Konvergenz stattfinden, denn die Amplituden der Faktoren verteilen sich nach allen Richtungen. Man muß daher normierende Faktoren einführen, indem man durch den Wert an einer bestimmten Stelle, etwa z_0, dividiert. Wir setzen $\alpha_U = L_U(z_0)$ und bilden das Produkt

$$A(z) = \prod \alpha_U^{-1} L_U(z)$$

erstreckt über alle Substitutionen von $\mathfrak{G}$. Wiederum beschränken wir uns auf das Innere von $\mathfrak{D}$ und lassen die endlich vielen Faktoren weg, die dort verschwinden. Zunächst ist leicht zu zeigen, daß das Produkt der absoluten Beträge konvergiert. Denn nimmt man den Logarithmus der Faktoren, so konvergieren die Nenner, da sie Spezialwerte der Zähler sind. Die Reihe der Logarithmen konvergiert daher absolut und man darf die Reihenfolge der Substitutionen in $\mathfrak{G}$ beliebig wählen, ferner darf man die normierenden Faktoren beliebig verteilen.

Nun bilden wir die Summe

$$\sum \log \left\{ a_U^{-1} L_U(z) \right\}$$

unter Weglassung der in $\mathfrak{D}$ verschwindenden Funktionen. Die Summe der Realteile ist konvergent. Ferner konvergiert die Summe selber für $z = z_0$ und hat dort den Wert Null. Hieraus folgt nach Satz 258 bei Pólya und Szegö (l. c. Bd. 1, S. 135), daß die Summe in jedem inneren Teilbereich von $\mathfrak{D}$ gleichmäßig konvergiert. Das Produkt $A(z)$ konvergiert daher in der ganzen oberen Halbebene und stellt dort eine analytische Funktion dar. Wir zeigen nun, daß sie von der Reihenfolge der Substitutionen unabhängig ist. Hierzu bedenken wir, daß der Realteil ihres Logarithmusses nach dem oben bewiesenen eindeutig bestimmt ist; daher ist der Logarithmus selber bis auf eine rein imaginäre additive Konstante bestimmt. $A(z)$ kann daher bei Umordnung nur einen Faktor vom Betrage 1 erhalten. Nun ist aber für $z = z_0$ der Wert unseres Produktes in jeder Anordnung $= 1$, daher ist der Faktor selber $= 1$.

Nun muß nachgewiesen werden, daß die Funktion automorph unter $\mathfrak{G}$ ist. Üben wir auf z die Substitution V aus, so möge z in z^V übergehen. Wir erhalten

$$A(z^V) = \prod a_U^{-1} L_U(z^V) = \prod a_U^{-1} L_{UV}(z).$$

Das Produkt der absoluten Beträge wird durch die Substitution nicht verändert, denn die neue Funktion unterscheidet sich von der alten nur durch eine andere Verteilung der normierenden Faktoren. Ferner konvergiert das Produkt selber für $z = z_0^{V^{-1}}$. Daher gilt

$$A(z^V) = e^{i\gamma^V} A(z)$$

wobei γ^V eine reelle Zahl ist. Es muß gezeigt werden, daß der Faktor $= 1$ ist. Es genügt, parabolische Substitutionen V zu berücksichtigen, denn alle übrigen lassen sich aus diesen zusammensetzen nach Satz 1.

Die durch V erzeugte zyklische Gruppe sei mit $\mathfrak{V}$ bezeichnet. Wir zerlegen $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{V}$ und seinen rechtsseitigen Nebengruppen in folgender Weise:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{V} + U_2 \mathfrak{V} + U_3 \mathfrak{V} + \dots$$

$A(z)$ zerlegen wir entsprechend und bedenken ferner, daß

$$L_{UV}(z_0) = \alpha_{UV}.$$

Dann ergibt sich für $A(z_0^V)$ folgender Wert

$$\Pi \alpha_U^{-1} \alpha_{UV} = \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha_{V^{n+1}}}{\alpha_{V^n}} \cdot \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha_{U_2 V^{n+1}}}{\alpha_{U_2 V^n}} \cdots$$

Nun ist

$$\prod_{n=-N}^{+N} \frac{\alpha_{UV^{n+1}}}{\alpha_{UV^n}} = \frac{\alpha_{UV^{N+1}}}{\alpha_{UV^{-N}}}.$$

Ferner nähert sich allgemein

$$\alpha_{UV^n} \text{ und } \alpha_{UV^{-n}}$$

für wachsende Werte von n demselben Wert, nämlich dem Bild des parabolischen Fixpunktes auf der Peripherie des Einheitskreises. Daher wird jedes einzelne Produkt und infolgedessen auch $A(z_0^V) = 1$. Weil auch $A(z_0) = 1$ ist, so ergibt sich, daß der Faktor, den $A(z)$ unter V erfährt, $= 1$ ist, daher ist $A(z)$ unter V und infolgedessen unter $\mathfrak{G}$ invariant. Daß diese Funktion nicht konstant ist folgt daraus, daß sie die Werte 0 und 1 annimmt, nämlich bei $z = i$ und $z = z_0$ und den æquivalenten Stellen.

Die Sätze 2, 3 und 4 ergeben zusammen den

Satz 5: *Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Fläche F zum hyperbolischen Typus gehört, besteht in der Konvergenz der Reihe*

$$\sum_{\mathfrak{G}} \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

erstreckt über alle Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{G}$, zu welcher F gehört.

(Eingegangen den 8. Februar 1932)