Sur quelques solutions des équations cosmologiques de la gravitation (suite).

Autor(en): **Juvet, G.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **4 (1932)**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-5612

Sur quelques solutions des équations cosmologiques de la gravitation (suite)

par G. JUVET, Lausanne

1. Dans un mémoire récent des Commentarii Mathematici Helvetici (Vol. 3, p. 151—172), j'ai fait remarquer, entre autres choses, que rien ne s'oppose à la formation de solutions discontinues des équations cosmologiques de la gravitation. J'ai donné de brèves indications sur une solution discontinue statique du type d'Einstein S_E et de vagues suggestions sur une solution discontinue non-statique du type de Lemaître S_L. Je vais les reprendre ici, en conservant à très peu près les notations et les numéros des équations du mémoire cité; je rappelle que dans ces solutions, l'espace se sépare du temps; les discontinuités sont spatiales, c'est-à-dire que c'est en passant d'une région à l'autre de l'espace, que se fait le saut des grandeurs discontinues; en particulier la «constante» λ a une valeur fixe dans chaque région où la solution est continue; cette valeur change d'une région à l'autre.

2. La solution discontinue statique définit un espace applicable sur deux calottes d'hypersphères, séparées par une sphère qui est un «parallèle» de «colatitudes» $u_1 = U_a$, $u_1 = U_b$ pour chacune d'elles, (les colatitudes se comptent à partir des deux pôles de chaque calotte). Il est indiqué de ne pas particulariser l'unité de temps, et dès lors, de considérer deux constantes C_a et C_b pour la vitesse de la lumière dans chaque espace E_a et E_b. En écrivant le ds^2 sous les formes:

$$(S_E)\begin{cases} ds^2 = -R_a^2\, d\sigma^2 + C_a^2\, dt^2 & \text{(pour l'univers } U_a\text{)} \\ ds^2 = -R_b^2\, d\sigma^2 + C_b^2\, dt^2 & \text{(pour l'univers } U_b\text{),} \end{cases}$$

($d\sigma =$ élément linéaire d'une hypersphère de rayon un), les équations (4) et (5) (où $p = 0$) s'écrivent:

$$\varrho_a = \lambda_a + \frac{3}{R_a^2} \qquad \text{et} \qquad \varrho_b = \lambda_b + \frac{3}{R_b^2}$$

$$0 = -\lambda_a - \frac{1}{R_a^2} \qquad\qquad 0 = -\lambda_b - \frac{1}{R_b^2},$$

l'équation (3) est identiquement satisfaite, mais il faut remarquer que l'on n'a aucune condition pour déterminer le rapport $\frac{C_a}{C_b}$. La solution S_E n'est donc déterminée qu'à ce rapport près. La «constante» λ a les deux valeurs

$$\lambda_a = -\frac{1}{R_a^2} = -\frac{\varrho_a}{2}, \qquad \lambda_b = -\frac{1}{R_b^2} = -\frac{\varrho_b}{2}.$$

3. La solution discontinue non-statique définit un espace variable qui se dilate homothétiquement, ce qu'un examen rapide ne m'avait pas fait reconnaître (*cf. loc. cit.* § 14); cet espace est applicable sur deux calottes d'hypersphères de rayons variables R_a et R_b séparées par une sphère, qui est un parallèle variable de colatitude *fixe* $u_1 = U_a$, $u_1 = U_b$ pour chacune d'elles. Notre solution a la forme:

$$(S_L)\begin{cases} ds^2 = -R_a^2\, d\sigma^2 + C_a^2\, dt^2 & \text{(pour l'univers } U_a\text{)} \\ ds^2 = -R_b^2\, d\sigma^2 + C_b^2\, dt^2 & \text{(pour l'univers } U_b\text{)} \end{cases}$$

où R_a et R_b sont des fonctions du temps et C_a et C_b des constantes. On fera encore $p = 0$ et on trouve (éq. (10) et (11) où l'on a écrit R_a et R_b à la place du rapport d'homothétie variable A):

$$\varrho_a = \lambda_a + \frac{3}{R_a^2} + \frac{3\,\dot{R}^2}{R_a^2\, C_a^2}, \qquad \varrho_b = \lambda_b + \ldots,$$

$$0 = -\lambda_a - \frac{1}{R_a^2} - \frac{2\,R_a\,\ddot{R}_a + \dot{R}^2}{R_a^2\, C_a^2}, \qquad 0 = -\lambda_b + \ldots,$$

et l'équation de conservation (7) s'écrit

$$\frac{d\varrho_a}{dt} + \frac{3\,\dot{R}_a}{R_a}\,\varrho_a = 0, \qquad \frac{d\varrho_b}{dt} + \frac{3\,\dot{R}_b}{R_b}\,\varrho_b = 0.$$

La condition à laquelle doivent satisfaire les rayons R_a, R_b et les colatitudes extrêmes U_a et U_b, pour que les deux portions de solutions puissent être accolées, s'écrit:

$$R_a \sin U_a = R_b \sin U_b$$

d'où:

$$\frac{R_a}{R_b} = \text{constante} = \mu$$

On trouve ensuite sans difficultés (*loc. cit.* p. 169, 14[e] ligne):

$$dt = \frac{1}{C_a}\sqrt{\frac{-R_a}{\frac{\lambda_a R_a^3}{3} + R_a + \alpha}}\, d R_a =$$

$$= \frac{1}{C_b}\sqrt{\frac{-R_b}{\frac{\lambda_b R_b^3}{3} + R_b + \beta}}\, d R_b. \qquad (\alpha \text{ et } \beta, \text{ const.})$$

On tire de là, puisque $\frac{d R_a}{d R_b} = \mu$:

$$\frac{\mu^2 C_b^2}{C_a^2} = \frac{\frac{\mu^3 \lambda_a R_b^3}{3} + \mu R_b + \alpha}{\mu\left(\frac{\lambda_b R_b^3}{3} + R_b + \beta\right)}.$$

Cette équation qui doit être vérifiée pour toutes les valeurs que R_b prend au cours du temps, doit être une identité; par suite:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\mu^3 C_b^2}{C_a^2}, \quad 1 = \frac{\mu^2 C_b^2}{C_a^2}, \quad \frac{\lambda_a}{\lambda_b} = \frac{C_b^2}{C_a^2}.$$

Si on connaît la portion U_b de l'univers, la portion U_a s'en déduit bien aisément après qu'on a fixé le rapport μ des rayons:

$$C_a = \mu C_b$$
$$\lambda_a = \frac{\lambda_b}{\mu^2}$$
$$\alpha = \mu \beta$$

mais:

$$\varrho_a = -\frac{3\alpha}{R_a^3} \quad \text{et} \quad \varrho_b = -\frac{3\beta}{R_b^3};$$

donc α et β peuvent se calculer en fonction des masses de chaque espace E_a et E_b, μ est donc un nombre qui dépend du rapport de ces masses.

4. Dans notre solution S_L, le rapport des vitesses C_a et C_b est déterminé; si l'on considère la solution S_E comme un cas limite de S_L on peut prendre la relation $C_a = \mu C_b$ ou $C_a = \frac{R_a C_b}{R_b}$, pour définir le rapport $\frac{C_a}{C_b}$ qui est resté indéterminé.

5. Il est évident que nous n'avons pas à borner à deux le nombre des «morceaux» de solution; on peut en prendre autant qu'on veut, car les équations de la gravitation ne dépendent pas des limites, ni surtout du choix des pôles à partir desquels on compte les colatitudes.

Nous reprendrons cette question dans un mémoire plus détaillé où nous étudierons les applications à l'astronomie; il semble qu'il soit possible d'en tirer une explication de la petitesse des nébuleuses spirales relativement à notre galaxie (*cf.* Shapley, Stars Clusters, New-York, 1930, *passim*).

(Reçu le 25 janvier 1932)