Zur Bestimmung des Typus einer Riemannschen Fläche.

Autor(en): **Ahlfors, Lars**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **3 (1931)**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-4685

Zur Bestimmung des Typus einer Riemannschen Fläche

Von Lars Ahlfors, Åbo (Finnland)

1. Nach dem Hauptsatz der Uniformisierungstheorie kann jede einfach zusammenhängende, offene Riemannsche Fläche F entweder auf die ganze komplexe Ebene unter Ausschluß des unendlich fernen Punktes oder auf einen endlichen Kreis konform abgebildet werden. Je nachdem der erste oder der zweite Fall eintritt, wird die Fläche vom *parabolischen* oder *hyperbolischen* Typus genannt.

Um diese beiden Fälle zu unterscheiden verfügt man über gewiße Kriterien, von welchen die bekanntesten folgende zwei sind:

Das Kriterium von Picard. — *Wenn es auf der Riemannschen Kugel drei Punkte gibt, über welchen kein Punkt der Fläche F liegt, so ist F vom hyperbolischen Typus.*

Das Kriterium von Bloch. — *Wenn die Verzweigungspunkte der Fläche F so dicht liegen, daß die Fläche nicht beliebig große, unverzweigte Kreisscheiben enthält, so ist sie vom hyperbolischen Typus.*

Neuerdings hat *R. Nevanlinna* noch ein Kriterium in der entgegengesetzten Richtung bewiesen[1]):

Wenn die Fläche F keine Windungspunkte endlicher Ordnung und nur endlich viele Windungspunkte unendlicher Ordnung besitzt, so ist sie vom parabolischen Typus.

Interessante Probleme im Anschluß an diese Frage sind noch von Herrn *A. Speiser* aufgeworfen worden. Da aber die von *Speiser* untersuchten Fälle von den hier zu behandelnden gänzlich verschieden sind, so kann ich nur auf seine zwei in dieser Zeitschrift erschienenen, bemerkenswerten Artikel hinweisen[2]).

2. Ich werde hier ein neues hinreichendes Kriterium für den parabolischen Fall herleiten. Es ergibt sich eine Aussage der folgenden Form: Wenn die Verzweigungspunkte einer Fläche von einfachem Zu-

---

[1]) *R. Nevanlinna:* Sur une classe de fonctions transcendantes (Comptes rendus, t. 191, p. 914, 1930).

[2]) *A. Speiser:* Probleme aus dem Gebiet der ganzen transzendenten Funktionen und Ueber Riemannsche Flächen (Comment. Math. Helv. Vol. I-II, 1929-30).

sammenhang genügend spärlich und von genügend niedriger Ordnung sind, so ist sie vom parabolischen Typus.

Der Beweis erfolgt unter Anwendung einer geometrischen Methode, die ich in meiner Dissertation[3]) entwickelt und auf verschiedene funktionentheoretische Fragen angewandt habe.

3. Es wird angenommen, daß die Fläche F über keinem endlichen Punkt andere Singularitäten als Verzweigungspunkte endlicher Ordnung besitzt. Die Funktion, durch welche F auf einen Kreis $|x| < R \leqq \infty$ konform abgebildet wird, heiße $x = x(z)$.

Wir können jetzt in folgender Weise zu jeder positiven Zahl ϱ einen Teilbereich G_ρ von der Fläche F definieren:

Man nehme dasjenige Funktionenelement von $x(z)$, das dem Punkt $x = 0$ entspricht und setze es — oder jeden seiner Zweige, falls es ein mehrdeutiges Element ist — längs den vom Mittelpunkt z_0 des Elements ausgehenden Radien fort, bis man auf einen Verzweigungspunkt oder auf die Peripherie des Kreises $|z - z_0| = \varrho$ stößt. Jedesmal, wenn ein Verzweigungspunkt erreicht wird, sollen alle neuen Zweige des entsprechenden algebraischen Elements weiter längs den von dem Verzweigungspunkt ausgehenden Strahlen fortgesetzt werden, bis der ganze Weg, längs dem man fortgesetzt hat, die Länge ϱ erreicht, oder bis man auf einen neuen Verzweigungspunkt trifft, wo dasselbe Verfahren einzuschlagen ist. Es ist klar, daß man in dieser Weise nur auf endlich viele Verzweigungspunkte stossen kann, denn sonst hätten die Windungspunkte einen im endlichen gelegenen Häufungspunkt.

G_ρ soll nun die Gesamtheit der durch das obige Verfahren erreichten regulären und algebraischen Funktionenelemente sein. Aus der Konstruktion von G_ρ geht hervor, daß G_ρ auch die Gesamtheit derjenigen Punkte der Fläche F darstellt, die von dem über z_0 gelegenen Anfangselement aus durch einen Weg von der Höchstlänge ϱ erreicht werden können. Der Rand Γ_ρ von G_ρ besteht aus vollen Kreisperipherien, die um z_0 und um die zu G_ρ gehörigen Verzweigungspunkte geschlagen sind.

Es sei ϱ_ν die Länge des Weges, durch welchen ein Verzweigungspunkt in der oben beschriebenen Weise erreicht wird, und k_ν der entsprechende Verzweigungsgrad, d. h. die Ordnung des Windungspunktes vermindert um eins[4]). Dann wird die Länge von Γ_ρ gleich

---

[3]) *L. Ahlfors:* Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen (Acta Soc. Scient. Fenn. Nova Series A, t. I, 1930).

[4]) Für die Funktion $\sqrt[n]{z}$ ist der Nullpunkt also ein Verzweigungspunkt vom Grade $n-1$.

$$L(\varrho) = 2\pi\left((k_0 + 1)\ \varrho + \sum_{0<\rho_\nu<\rho} k_\nu\,(\varrho - \varrho_\nu)\right)$$

oder, wenn man die Anzahl der zu G_t gehörigen Windungspunkte, jeder so oft gezählt wie sein Verzweigungsgrad angibt, mit $n(t)$ bezeichnet,

$$(1) \qquad L(\varrho) = 2\pi\left(\varrho + \int_0^\rho (\varrho - t)\,dn(t)\right) = 2\pi\left(\varrho + \int_0^\rho n(t)\,dt\right).$$

Durch die Funktion $x = x(z)$ wird G_ρ auf ein schlichtes Teilgebiet des Kreises $|x| < R$ abgebildet. Dem Rand Γ_ρ entspricht eine Kurve, die den Punkt $x = 0$ umschlingt. Geht man zur log x-Ebene über, so verbindet die Bildkurve die beiden Ufer eines Parallelstreifens von der Breite 2π. Ihre Länge ist also wenigstens gleich 2π, d. h. man hat

$$\int_{\Gamma_\rho} \left|\frac{x'(z)}{x(z)}\right| \cdot |dz| \geqq 2\pi.$$

Durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung folgt dann

$$4\pi^2 \leqq \int_{\Gamma_\rho} |dz| \int_{\Gamma_\rho} \left|\frac{x'(z)}{x(z)}\right|^2 \cdot |dz| = L(\varrho) \int_{\Gamma_\rho} \left|\frac{x'(z)}{x(z)}\right|^2 \cdot |dz|.$$

Diese Ungleichung wird nun durch $L(\varrho)$ dividiert und in bezug auf ϱ zwischen den Grenzen $\varrho_0 > 0$ und ∞ integriert. Es wird

$$(2) \qquad 4\pi^2 \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{d\varrho}{L(\varrho)} \leqq \int_{\rho_0}^{\infty} d\varrho \int_{\Gamma_\rho} \left|\frac{x'(z)}{x(z)}\right|^2 \cdot |dz|.$$

Das rechtsstehende Doppelintegral stellt die Fläche des in der log x-Ebene gelegenen Bildgebiets des außerhalb G_ρ fallenden Teils von F dar. Bezeichnet r_0 den kleinsten Wert von $|x(z)|$ auf Γ_{ρ_0}, so ist diese Fläche höchstens gleich $2\pi \log \dfrac{R}{r_0}$, und aus (2) folgt die Ungleichung

$$\log \frac{R}{r_0} \geqq 2\pi \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{d\varrho}{L(\varrho)}.$$

Falls nun das rechtsstehende Integral unendlich ist, so folgt aus dieser Ungleichung, daß $R = \infty$ sein muß, d. h. wir haben ein hinreichendes Kriterium für den parabolischen Fall gefunden.

Um dieses Kriterium in einer einfacheren Form zu erhalten, zeigen wir noch, daß das Integral

$$\int^{\infty} \frac{d\varrho}{L(\varrho)} \tag{3}$$

gleichzeitig mit dem Integral

$$\int^{\infty} \frac{d\varrho}{\varrho\, n(\varrho)} \tag{4}$$

konvergiert oder divergiert.

In der Tat gilt nach (1), so bald $n(\varrho) \geqq 1$, und dies trifft für genügend große ϱ ein (abgesehen von dem trivialen Fall, wo F mit der unverzweigten Ebene identisch ist), $L(\varrho) \leqq 2\pi\varrho\,(n(\varrho)+1) \leqq 4\pi\varrho\, n(\varrho)$. Also divergiert das Integral (3) immer, wenn das Integral (4) divergent ist.

In der umgekehrten Richtung folgt aus (1), daß

$$L(\varrho) > 2\pi \int_{\frac{\varrho}{2}}^{\varrho} n(t)\,dt \geqq \pi\varrho\, n\left(\frac{\varrho}{2}\right).$$

Also konvergiert (3), wenn das Integral

$$\int^{\infty} \frac{d\varrho}{n\left(\frac{\varrho}{2}\right)}$$

konvergent ist, d. h. gleichzeitig mit dem Integral (4).

Hiermit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Es sei F eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche, die im endlichen keine anderen Singularitäten als algebraische Verzweigungspunkte besitzt. $n(\varrho)$ sei die Anzahl der mit der Multiplizität ihrer Verzweigungsgrade gezählten Windungspunkte von F, die von einem gewissen

Punkt der Fläche aus durch einen auf der Fläche gelegenen Weg von der Höchstlänge ϱ *erreicht werden können. Wenn dann das Integral*

$$\int^{\infty} \frac{d\varrho}{n(\varrho)}$$

divergiert, so ist die Fläche vom parabolischen Typus.

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn z. B. $\frac{n(\varrho)}{\log \varrho}$ beschränkt bleibt. Andererseits muß, wenn das *Bloch*sche Kriterium in Kraft treten soll, wenigstens $n(\varrho) > K\varrho$ mit konstantem K sein, so daß die Lücke zwischen dem *Bloch*schen Satz und dem soeben bewiesenen noch sehr groß ist.

(Eingegangen den 18. Mai 1931)