

Sur les systèmes cycliques des triples de Steiner différents pour N premier (ou puissance de nombre premier) de la forme $6n + 1$.

Autor(en): **Bays, S.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **2 (1930)**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-3625>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Sur les systèmes cycliques de triples de Steiner différents pour N premier (ou puissance de nombre premier) de la forme $6n + 1$

Par S. BAYS, Fribourg

Avant-Propos

1. *Introduction.* J'ai publié jusqu'ici trois mémoires sur le problème des systèmes cycliques de triples de Steiner¹⁾; le dernier a paru en 1925. Comme il arrive souvent dans l'étude d'un problème mathématique, si d'une part, au cours des recherches, les difficultés grandissent jusqu'à devenir parfois insurmontables, d'autre part souvent aussi les procédés se simplifient et les résultats obtenus se déduisent avec le temps beaucoup plus aisément qu'au début. C'est ce qui m'est arrivé dans l'étude de ce problème des systèmes cycliques de triples de Steiner.

Les mémoires dont j'ai parlé, écrits actuellement, prendraient une autre disposition et un nombre de pages plus réduit en ce qui concerne le but immédiat²⁾, qui est d'obtenir les systèmes cycliques *différents* de triples de Steiner, pour N premier (ou puissance de nombre premier) de la forme $6n + 1$. Pratiquement je dois me limiter aux premières valeurs de ces N ; cependant mes procédés donnent immédiatement pour tout N premier de la forme $6n + 1$, aussi grand que l'on veut, des classes importantes de systèmes cycliques différents.

Mon intention, en écrivant ce quatrième mémoire qui paraîtra en plusieurs articles dans ce périodique, est donc la suivante: donner certains résultats nouveaux obtenus depuis mon dernier mémoire; faire un exposé aussi concis que possible (généralement nouveau aussi) de ma méthode pour obtenir les systèmes cycliques différents pour un N donné, mais tel que l'étude de ce mémoire suffise au lecteur pour connaître mes procédés; faire un tableau cependant complet des résultats obtenus jusqu'ici par ces procédés, également pour les nombres de la forme

¹⁾ Le premier est dans les Annales de l'Ecole normale supérieure, Paris (1923), t. 40, p. 55—96; le second est dans le Journal de mathématiques pures et appliquées, Paris, (1923), t. 2, 9^{me} série, p. 73—98; le troisième est dans les Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, (1925), t. XVII, p. 3—41. Nous les désignerons au cours de ce travail simplement par les lettres A , J et T .

²⁾ Ceci est dit en particulier, pour mon troisième mémoire qui contient des recherches spéciales et dont l'exposé ne changerait pas aujourd'hui.

$6n + 3$; mettre enfin à la base de la différenciation des systèmes cycliques de triples qui est le point essentiel de cette recherche, la démonstration du théorème suivant, que j'avais admis dans mon second mémoire et sans lequel je ne pouvais continuer mon étude: *les systèmes cycliques équivalents se déduisent l'un de l'autre par une substitution métacyclique*. La démonstration de ce théorème a été faite depuis par P. Lambossy dans sa thèse d'habilitation; elle n'a pas été publiée non plus jusqu'à ce jour.

2. *Définition*. Le problème des systèmes de triples de Steiner est le suivant³⁾:

*Pour quel nombre d'éléments N peut-on trouver un système de triples (combinaisons trois à trois) contenant dans ces triples **une fois et une seule fois** chaque couple des N éléments? Pour un N donné, combien y a-t-il de systèmes de triples qui sont **différents**, c'est-à-dire qui ne se déduisent pas l'un de l'autre par une permutation quelconque des N éléments?*

Ainsi pour les 7 éléments 1, 2,, 7, le système des 7 triples suivants:

$$123, 145, 167, 246, 257, 347, 356, \quad (1)$$

contenant une fois et une seule fois chacun des 21 couples des 7 éléments, est un système de triples de Steiner.

Pour les 9 éléments 1, 2,, 9, le système des 12 triples suivants:

$$\begin{aligned} 123, 456, 789, 147, 258, 369, \\ 159, 168, 249, 267, 348, 357, \end{aligned} \quad (2)$$

remplit la condition analogue et est un système de triples de Steiner.

3. *Historique*. La première partie du problème est résolue. On trouve immédiatement que les formes *nécessaires* pour N sont $6n + 1$ et $6n + 3$. Avec beaucoup plus de difficulté on a établi que ces deux formes sont

³⁾ Le problème a été posé en 1852 par *J. Steiner*, comme premier échelon d'un problème compliqué d'analyse combinatoire. Voir le *Journal für Mathematik*, t. XLV, 1853, p. 181. *Netto* a consacré à ce problème des triples de Steiner et au problème plus particulier de Kirkman qui en dérive, concernant le cas de $6n + 3$ éléments, les chapitres 10 et 11 de sa *Combinatorik*. On y trouvera un exposé complet du problème de Steiner et des premières recherches auxquelles il a donné lieu. Voir *Netto*, *Lehrbuch der Combinatorik*, p. 202—228, 1^{ère} édition (1910) ou 2^{ème} édition (1927), avec les notes 16, 17 et 18 de *Th. Skolem*, à la fin de la 2^{ème} édition.

également *suffisantes*; M. Reiss⁴⁾ (1859), E. H. Moore⁵⁾ (1893), Fitting⁶⁾ (1911) ont montré qu'il existe des systèmes de triples de Steiner pour chaque N de la forme $6n + 1$ et $6n + 3$, en donnant des procédés différents pour construire de tels systèmes.

En revanche, la seconde partie du problème paraît encore à l'heure actuelle loin d'être résolue. Pour $N = 7$ et $N = 9$ on remarqua immédiatement qu'il n'y a qu'un seul système de Steiner. Le système (1) que j'ai donné plus haut, prend par les $7!$ permutations⁷⁾ du groupe *symétrique* des 7 éléments, 30 formes différentes, différant l'une de l'autre au moins par un triple; ce qui revient à dire que le groupe de substitutions, sous-groupe du groupe symétrique, qui laisse invariant ce système ou le transforme en lui-même (nous dirons désormais qui *appartient* à ce système) est d'ordre $\frac{7!}{30} = 168$. Mais il n'existe pas d'autre système de triples de Steiner pour 7 éléments, c'est-à-dire de système de triples qui ne se déduise pas de (1) par une permutation des 7 éléments.

Il en est de même pour 9 éléments et le système (2); ce système prend 840 formes différant entre elles au moins par un triple; le groupe de substitutions qui lui appartient est d'ordre $\frac{9!}{840} = 432$.

On est resté longtemps sur le cas de $N = 13$. Zulauf⁸⁾ montra, au moyen de la différence des groupes de substitutions leur appartenant, que le système *cyclique* donné par Netto, était différent de systèmes donnés par Kirkman, Reiss, de Vries, qui eux, par contre, se ramenaient l'un à l'autre par des permutations d'éléments. Ensuite successivement V. de Pasquale (1899), G. Brunel (1901), J. Barrau (1908), F. N. Cole (1913)⁹⁾ établirent que, pour 13 éléments, le système cyclique

⁴⁾ M. Reiss, Journal für Mathematik, t. LVI, 1859, p. 326.

⁵⁾ E. H. Moore. Mathematische Annalen, t. XLIII, 1893, p. 271.

⁶⁾ Fitting. Nieuw Archief, 2^{me} série, t. IX, 1911, p. 359.

Les démonstrations de Reiss et de Moore sont également exposées tout au long par Netto, p. 206—218. D'après un article de L. D. Cummons (Bulletin of the American Mathematical Society, 2^{me} série, XXIV, 1918, p. 336—339) intitulé: An undervalued Kirkman paper, la démonstration de Reiss, qui a été sauvée de l'oubli par Netto et retrouvée par lui après la publication de celle de Moore, existait dans les papiers de Kirkman et reviendrait entièrement à ce dernier.

⁷⁾ J'emploierai indifféremment le terme permutation ou substitution.

⁸⁾ Zulauf, Dissertation, Giessen, 1897.

⁹⁾ V. de Pasquale. Sui sistemi ternari di 13 elementi. (Lomb. Ist. Rend.), 2^{me} série, t. XXXII, 1899, p. 213. — G. Brunel. Sur les deux systèmes de triades de 13 éléments. (Journ. de Math., 5^{me} série, t. VII, 1901, p. 305, et Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 6^{me} série, t. 2, cahier 1, 1903). — J. Barrau. Over drie tals tel sels in hel bijzonder die van dertien elementen. (Amst. Ak. Verslag. t. XVII, 1908, p. 274). — F. N. Cole: The triad systems of 13 letters (Transactions of the Amer. Mathem. Society, vol. XIV, no. 1, 1913, p. 1).

de Netto et le système de Kirkman (comme étant le plus ancien) étaient les *deux seuls* systèmes différents possibles. J'ai donné une cinquième preuve du même théorème¹⁰⁾, ne faisant appel à aucune notion particulière, par la construction directe des systèmes de triples de 13 éléments qui ne contiennent pas un triple fixé *abc*.

Le cas de $N = 15$ est aussi complètement résolu. Kirkman, Cayley, Reiss, etc., avaient donné plusieurs systèmes de triples pour 15 éléments déjà différents (11 ou 12), comme solutions du problème particulier de Kirkman dont j'ai parlé (note du § 2), posé à peu près à la même date que celui de Steiner. L. D. Cummings¹¹⁾ (1914), avec sa méthode des *sequences* pour différencier les systèmes de triples et découvrir le groupe de substitutions qui leur appartient, construisit facilement de nouveaux systèmes de triples différents pour 15 éléments et porta leur nombre à 24. Elle obtint en particulier, la première, des systèmes de triples différents ayant le même groupe de substitutions¹²⁾. H. S. White¹³⁾ (1913) a donné aussi une méthode directe pour différencier les systèmes de triples, sa méthode des *trains*, que j'ai employée dans mon premier mémoire. Mais l'une et l'autre de ces deux méthodes ne sont applicables qu'aux premières valeurs de N ; il fallait nécessairement trouver un autre moyen. Enfin dans un mémoire plus récent (1916), F. N. Cole, L. D. Cummings et H. S. White ont obtenu tous les systèmes de triples différents pour 15 éléments¹⁴⁾; leur nombre est 80. H. S. White¹⁵⁾ a prouvé (1915) que le nombre des systèmes de triples différents pour $N = 31$ est plus grand que $3 \cdot 10^{13}$.

4. *Systèmes cycliques.* E. Netto¹⁶⁾ (1893) a donné le premier, pour les nombres *premiers* N de la forme $6n + 1$, un système de triples d'une

¹⁰⁾ Actes de la Société helvétique des Sciences naturelles, Zürich, 1917, p. 131.

¹¹⁾ L. D. Cummings, Transactions of the Amer. Mathem. Society, vol. XV, no. 3, 1914, p. 311.

¹²⁾ Mais je n'avais pas encore connaissance du mémoire de L. Cummings, lorsque j'avais moi-même un peu plus tard (1917) de nombreux cas de systèmes de triples différents, ayant le même groupe de substitutions; par exemple les 12 systèmes cycliques différents pour $N = 25$, qui ont chacun uniquement le groupe cyclique $\{ | x, 1 + x | \}$. Voir ma Note aux Comptes-Rendus, t. 165, p. 543, séance du 22 octobre 1917.

¹³⁾ H.-S. White. Triple systems as transformations and their paths among triads. (Transactions of the Amer. Mathem. Society, vol. XIV. n° 1, 1913, p. 6).

¹⁴⁾ F.-N. Cole, L.-D. Cummings et H.-S. White. The complete enumeration of triad systems in 15 elements. (Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. III, 1916, p. 197).

¹⁵⁾ H.-S. White. The multitude of triad systems on 31 letters. (Transactions of the Amer. Mathem. Society, vol. XVI, n° 1, 1915, p. 13).

¹⁶⁾ Mathematische Annalen, t. XLII, 1893, p. 143 ou Combinatorik, p. 220.

construction spéciale, dit *cyclique*, parce que le groupe qui lui appartient contient en tout cas le groupe cyclique $\{ |x, 1 + x| \}^{17)}$.

Soit les N éléments $0, 1, 2, \dots, 6n$; g une racine primitive de N . L'ensemble des N triples suivants pour un α fixé:

$$x, g^\alpha + x, g^{n+\alpha} + x, \quad (x = 0, 1, 2, \dots, 6n)$$

où chaque entier est à remplacer par son plus petit reste positif ou nul (mod. N), est une *colonne cyclique* de triples, et le système cyclique de Netto est constitué des n colonnes cycliques suivantes:

$$x, g^\alpha + x, g^{n+\alpha} + x, \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots, n - 1).$$

Le système cyclique suivant¹⁸⁾:

$$x, g^\alpha + x, g^{5n+\alpha} + x, \quad (x = 0, 1, 2, \dots, 6n) \\ (\alpha = 0, 1, 2, \dots, n - 1)$$

est un second système du type de Netto, *n'ayant aucun triple commun avec le premier*. Il est le *conjugué* du premier (§ 14).

E. Netto¹⁹⁾ a donné également un système cyclique de triples pour $N = 6n + 3$, dans le cas où $2n + 1$ est nombre premier de la forme $6m + 5$. L. Heffter²⁰⁾ (1897) a levé cette dernière restriction et construit un système de triples cyclique pour $N = 6n + 3$, où $2n + 1$ est nombre premier.

D'autre part L. Heffter²⁰⁾ dans le même mémoire a établi que la construction d'un système cyclique de triples pour $N = 6n + 1$ revient à trouver une solution de son *problème des différences I*:

Répartir les nombres $1, 2, \dots, 3n$ en n groupes de trois, de manière que dans chaque groupe les trois nombres aient pour somme $6n + 1$, ou que l'un des trois nombres soit égal à la somme des deux autres.

Et la construction d'un système cyclique de triples pour $N = 6n + 3$, à trouver une solution de son *problème des différences II*:

17) J'emploierai généralement la notation analytique pour les substitutions. Les accolades $\{ . . . \}$ signifient le groupe engendré par la ou les substitutions qu'elles renferment.

18) Voir A. p. 57—58 et note de la p. 63.

19) L. c. p. 143 et 221.

20) *Mathematische Annalen*, t. XLIX, 1897, p. 101 ou *Combinatorik* p. 221 à 227.

Répartir les nombres $1, 2, \dots, 2n, 2n + 2, \dots, 3n + 1$, en n groupes de trois, tels que les trois nombres d'un groupe aient pour somme $6n + 3$, ou que l'un des trois nombres soit égal à la somme des deux autres.

5. Comme il a été dit, il ne s'agit dans cette étude que des systèmes cycliques de triples et essentiellement pour $N = 6n + 1$ premier. Cependant l'exposé du chapitre I est fait pour $N = 6n + 1$ composé quelconque, et plus loin, à part l'emploi du théorème en question ci-dessous, grâce à l'existence d'une racine primitive (mod. N) dans le cas $N = p^m$ comme dans le cas $N = p$, l'exposé est constamment valable aussi pour $N = 6n + 1$ puissance de nombre premier.

Pour $N = 6n + 3$ où $2n + 1$ est premier ou puissance d'un nombre premier, le procédé, évidemment avec les modifications nécessaires, est applicable aussi, parce que dans ces deux cas, l'existence d'une racine demi-primitive (mod. N) permet encore l'emploi aisé des groupes de substitutions notés $\{|x, \alpha x|\}$ et $\{|\underline{x}, \underline{\alpha x}|\}$. Cela a été fait par le P. B. Kaufmann O. S. B. dans sa thèse de doctorat²¹⁾; il a obtenu tous les systèmes cycliques de triples différents pour les premières valeurs de $N = 6n + 3$: 9, 15, 21, 27 et 33.

Pour obtenir les systèmes cycliques de triples de Steiner, le procédé est actuellement applicable à tout N des formes $6n + 1$ et $6n + 3$ ²²⁾; pour les répartir en classes de systèmes équivalents par une substitution métacyclique le procédé sera facilement applicable à tout N aussi, des deux formes indiquées, au moyen d'une racine appartenant à l'exposant $\frac{\varphi(N)}{d}$ (mod. N), d , diviseur de $\varphi(N)$, > 2 . La difficulté est la différenciation des systèmes appartenant à ces différentes classes. Le théorème que j'avais énoncé (fin du § 1), démontré par P. Lambossy, et qui revient à dire: deux systèmes de classes différentes sont différents, est établi jusqu'ici seulement pour un nombre d'éléments N premier. Pour le cas d'un nombre d'éléments $N = p^m$, puissance de nombre premier, P. Lambossy a donné un complexe de substitutions plus large, contenant le groupe métacyclique et apte à remplir le rôle de ce dernier, c'est-à-dire à fournir toutes les fonctions cycliques équivalentes à une fonction cyclique donnée φ ; mais l'emploi de ce complexe n'est légitime que sous certaines conditions que doit remplir le groupe de φ . Si ces conditions sont remplies par le groupe qui appartient à un système cyclique

²¹⁾ Studien über zyklische Dreiersysteme der Form $N = 6n + 3$. Inaugural-Dissertation der Math.-Natur. Fakultät der Universität Freiburg in der Schweiz. Sarnen 1926,

²²⁾ Pour $N = 6n + 3$, cela a été fait par le P. B. Kaufmann dans sa thèse.

de triples, il y aura là une excellente application des développements de P. Lambossy dans la différenciation des systèmes cycliques pour le cas $N = p^m$ ²³⁾. Personnellement je persiste à croire que le théorème avec son énoncé restreint de la fin du § 1 est vrai pour tout N ; mais la démonstration en reste encore à faire ²⁴⁾.

Pour simplifier, dans cette étude, à partir du chapitre III, nous nous limiterons au cas $N = 6n + 1$ *premier*; au chapitre II nous fixerons chaque fois les conditions pour $N = 6n + 1$; les éléments seront constamment $0, 1, 2, \dots, 6n$.

La théorie élémentaire des congruences, les éléments de la théorie des groupes en général et de la théorie des substitutions en particulier, suffisent pour me lire. Chaque fois d'ailleurs où cela ne prendra qu'une place minime, je rappellerai en note la signification des termes essentiels.

Chapitre I.

Les colonnes cycliques de triples

6. Une *colonne cyclique de triples* des éléments $0, 1, 2, \dots, 6n$ est l'ensemble des N triples suivants:

$$a + x, b + x, c + x, \quad (3)$$

où a, b, c , sont trois entiers différents parmi $0, 1, 2, \dots, 6n$; $x = 0, 1, 2, \dots, 6n$; chaque entier $> 6n$ est remplacé par son plus petit reste positif ou nul (mod. N).

Cette colonne est *fixée* par l'un quelconque de ses triples que l'on peut appeler sa *tête* de colonne.

7. Les N triples (3) sont tous différents ²⁵⁾.

²³⁾ Cette partie du mémoire de P. Lambossy, qui est la partie principale de sa thèse, sera publiée prochainement, probablement dans ce périodique.

²⁴⁾ Le P. B. Kaufmann a fait cette différenciation des systèmes des différentes classes au moyen des trains de White, comme moi-même dans mon premier mémoire (§ 3); il a constaté d'ailleurs également pour ces premières valeurs de $N = 6n + 3$ l'exactitude du théorème dont je parle.

²⁵⁾ J'ai prouvé dans T. p. 32, le théorème général suivant:

Une colonne cyclique de i -uples des éléments $0, 1, 2, \dots, N - 1$:

$$a_1 + x, a_2 + x, \dots, a_i + x,$$

où a_1, a_2, \dots, a_i sont i entiers différents parmi $0, 1, 2, \dots, N - 1$; $x = 0, 1, 2, \dots, N - 1$; chaque entier $> N - 1$ est remplacé par son plus petit reste positif ou nul (mod. N), a toujours N i -uples différents, excepté la colonne suivante:

$$0 + x, \frac{N}{i} + x, 2 \frac{N}{i} + x, \dots, (i - 1) \frac{N}{i} + x,$$

dans le cas où N est multiple de i .

En effet, admettons que deux d'entre eux soient le même triple; je peux les écrire, en disposant verticalement les éléments de la même série cyclique $0, 1, \dots, 6n$:

$$m, n, p, \tag{4}$$

$$n, p, m. \tag{5}$$

Il suffit pour cela de mettre à la seconde place dans (4) l'élément n qui, dans (5), est venu de m dans (4). Mais alors la colonne cyclique contient encore le troisième triple:

$$p, m, n.$$

Les N triples (3) seront alors trois à trois le même triple; $N = 6n + 1$ devrait être divisible par 3, ce qui n'est pas.

8. Chacun des éléments $0, 1, 2, \dots, 6n$ entre dans trois et trois seuls des triples (3).

En effet, soit α l'un de ces éléments. Chacune des trois séries cycliques $a + x, b + x, c + x$, ($x = 0, 1, 2, \dots, 6n$), contient une fois et une seule fois l'élément α . D'autre part il ne peut y avoir dans un même triple deux éléments égaux, a, b, c , étant trois éléments différents.

9. Pour contenir une fois et une seule fois chaque couple des N éléments, un système de triples de Steiner contient $\frac{N(N-1)}{2 \cdot 3} = \frac{N(N-1)}{6}$ triples. Il est dit *cyclique* lorsqu'il est formé de $\frac{N-1}{6} = n$ colonnes cycliques de N triples du type (3).

10. L'ensemble des $\frac{N(N-1)(N-2)}{6} = n(6n+1)(6n-1)$ triples des N éléments $0, 1, 2, \dots, 6n$, se répartit en $n(6n-1)$ colonnes cycliques de triples du type (3). Ces colonnes ne peuvent pas toutes servir à la constitution de systèmes de triples de Steiner. Pour qu'une colonne puisse être utilisée, il faut et il suffit qu'elle ne contienne pas, dans ses triples, deux fois le même couple.

11. Nous prendrons comme *tête* de la colonne (3) le triple:

$$0, \alpha, \beta, \quad \alpha < \beta.$$

Les trois triples contenant l'élément 0 dans cette colonne sont alors, dans l'ordre où ils se déduisent du premier :

$$\begin{array}{ccc} 0, & \alpha, & \beta, \\ N - \beta, & N - (\beta - \alpha), & 0, \\ N - \alpha, & 0, & \beta - \alpha. \end{array} \quad (6)$$

Pour que cette colonne ne contienne pas dans ses triples deux fois le même couple, il faut et il suffit que les 6 éléments associés à 0 dans les triples (6) :

$$\alpha, \beta, \beta - \alpha, N - \alpha, N - \beta, N - (\beta - \alpha) \quad (7)$$

soient *tous différents*. En effet si la colonne contenait deux fois un même couple d'éléments, elle contiendrait deux fois un même couple ayant 0 pour l'un de ses éléments et inversement.

12. Dans les six éléments (7) on a déjà, puisque les triples (6) ont chacun trois éléments différents :

$$\alpha \neq \beta, \quad N - \alpha \neq \beta - \alpha, \quad N - \beta \neq N - (\beta - \alpha);$$

$$\text{par suite: } N - \alpha \neq N - \beta, \quad \alpha \neq N - (\beta - \alpha), \quad \beta \neq \beta - \alpha.$$

On ne peut avoir non plus, N étant impair :

$$\alpha = N - \alpha, \quad \beta = N - \beta, \quad \beta - \alpha = N - (\beta - \alpha).$$

Il ne reste donc comme égalités possibles que :

$$\begin{array}{llll} \alpha = \beta - \alpha & \text{qui entraîne} & N - \alpha = N - (\beta - \alpha) & \text{et réciproquement} \\ \alpha = N - \beta & \text{»} & \text{»} & N - \alpha = \beta & \text{»} & \text{»} & (8) \\ \beta = N - (\beta - \alpha) & \text{»} & \text{»} & N - \beta = \beta - \alpha & \text{»} & \text{»} \end{array}$$

Or ces trois égalités donnent pour le triple de tête dans (6) respectivement :

$$0, \alpha, 2\alpha; \quad 0, \alpha, N - \alpha; \quad 0, \alpha, \frac{N + \alpha}{2} \quad (9)$$

Le second de ces triples appartient, comme le premier, à la colonne dont les triples contenant l'élément 0 sont :

$$\begin{array}{ccc} 0, & \alpha, & 2\alpha, \\ N - 2\alpha, & N - \alpha, & 0, \\ N - \alpha, & 0, & \alpha. \end{array} \quad (10)$$

Le troisième des triples (9) appartient à la colonne $N - \alpha$, 0 , $N - \alpha + \frac{N - \alpha}{2}$ ou 0 , $\frac{N - \alpha}{2}$, $N - \alpha$, qui est encore du même type (10) 0 , α' , $2\alpha'$, en prenant $\frac{N - \alpha}{2} = \alpha'$.

Les $3n$ colonnes ayant les têtes suivantes :

$$0, 1, 2; \quad 0, 2, 4; \quad 0, 3, 6; \quad \dots; \quad 0, 3n, 6n \quad (11)$$

sont donc les seules qui ne peuvent pas servir à la formation de systèmes de triples de Steiner.

13. Les deux colonnes suivantes :

$$\begin{array}{lll} 0, & \alpha, & \beta; \quad 0, \quad N - \beta, \quad N - \alpha, \quad \alpha < \beta \\ N - \beta, & N - (\beta - \alpha), & 0; \quad \alpha, \quad N - (\beta - \alpha), \quad 0, \\ N - \alpha, & 0, & \beta - \alpha; \quad \beta, \quad 0, \quad \beta - \alpha. \end{array} \quad (12)$$

sont dites *conjuguées* l'une de l'autre. Elles se transforment l'une en l'autre par la substitution $|x, N - x|$. En effet, cette substitution change le triple $x, \alpha + x, \beta + x$, de la première, en $N - x, N - x - \alpha, N - x - \beta$, qui est un triple de la seconde, et inversement.

Les colonnes (12) sont deux colonnes différentes, excepté si l'une d'elles est une colonne (10). En effet, pour qu'elles soient la même colonne, il faut et il suffit que le triple $0, \alpha, \beta$ de la première soit l'un des triples de la seconde et donc l'un des triples (12) à droite. Cela exige ou $\alpha = N - \beta$ et $\beta = N - \alpha$ (on ne peut avoir $\alpha = N - \alpha$), ou $\beta = N - (\beta - \alpha)$, ou $\beta - \alpha = \alpha$, c'est-à-dire exactement les égalités (8). Dans chacune de ces éventualités, la colonne unique (12) est donc une des colonnes (11), qui sont chacune *conjuguées à elles-mêmes*.

14. Pour former un système de triples de Steiner, il faut n colonnes cycliques (§ 9) telles que les $6n$ éléments associés à l'élément 0 dans leurs triples, soient différents et reproduisent donc les $6n$ éléments $1, 2, \dots, 6n$. En effet, un tel système ne contenant pas deux fois un même couple comprenant l'élément 0 , ne contiendra pas deux fois un autre couple quelconque.

Puisque dans les deux colonnes conjuguées (12), les éléments associés à 0 dans chacune sont *les mêmes six éléments* (7), dans la formation d'un système de triples de Steiner, une colonne quelconque peut être remplacée par sa conjuguée, sans conséquence pour les $n - 1$ autres colonnes

restantes. En effet, les couples contenus dans la colonne conjuguée sont exactement les mêmes que ceux contenus dans la première colonne.

En faisant cette opération sur les n colonnes d'un système constitué, on a, selon le point de vue, les deux résultats:

I. *Les systèmes cycliques de triples vont par paires de systèmes dits conjugués, formés chacun des n colonnes respectivement conjuguées aux n colonnes de l'autre; deux systèmes conjugués n'ont aucun triple commun, mais sont équivalents et se transforment l'un dans l'autre par la substitution $|x, N - x|^{26}$.*

II. *Un système cyclique de triples étant formé, il donne sans autre 2^n (lui-même compté) systèmes cycliques de triples, en faisant de toutes les façons possibles l'opération de remplacer une ou plusieurs de ses colonnes par les conjuguées; 2^{n-1} de ces systèmes sont éventuellement des systèmes différents.*

15. Des six éléments (7) que nous écrirons à nouveau:

$$\alpha, \beta - \alpha, \beta, N - \alpha, N - (\beta - \alpha), N - \beta, \quad \alpha < \beta \quad (7)$$

trois sont inférieurs à $\frac{N}{2}$; ils déterminent univoquement les trois autres.

Nous appellerons le triple de ces trois éléments inférieurs à $\frac{N}{2}$, la *caractéristique* des deux colonnes conjuguées (12).

Fixons que α est toujours le plus petit des éléments associés à 0 dans les trois triples (6). Prenons pour α dans la tête de colonne (6), les éléments 1, 2, 3, ..., $2n - 1$. Pour chaque α , prenons $\beta = 2\alpha + 1, 2\alpha + 2, \dots$, jusqu'aux valeurs respectives suivantes:

$$\beta = 3n, 3n + 1, 3n + 1, 3n + 2, 3n + 2, \dots, 4n - 1, 4n - 1, \\ \text{selon que } \alpha = 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad \dots, 2n - 2, 2n - 1.$$

Nous obtenons ainsi le nombre suivant de couples (α, β) :

$$(3n - 2) + (3n - 3) + (3n - 5) + (3n - 6) + (3n - 8) + \dots + 3 + 1.$$

²⁶⁾ *H.-S. White* dans le mémoire cité plus haut (note 13) a remarqué ce théorème dans le cas particulier du système cyclique de Netto de 13 éléments. Il est ainsi établi d'une manière générale.

Ce nombre est immédiatement :

$$\frac{(1 + 3n - 2)n}{2} + \frac{(3 + 3n - 3)(n - 1)}{2} = n(3n - 2).$$

Pour les systèmes (7) déterminés par ces couples (α, β) on a :

$$\beta > 2\alpha \text{ ou } \beta - \alpha > \alpha, \quad \beta - \alpha \equiv 3n - 1, \quad N - \beta \equiv 2n + 2.$$

On ne peut avoir ainsi ni $\alpha = \beta - \alpha$, ni $\alpha = N - \beta$.

On n'aura pas non plus $\beta = N - (\beta - \alpha)$ ou $N - \beta = \beta - \alpha$.

En effet si $\beta \equiv 3n$, $N - \beta > 3n > \beta - \alpha$
 si $\beta = 3n + \varepsilon$, ($\varepsilon = 1, 2, \dots, n - 1$), $N - \beta = 3n + 1 - \varepsilon$,

et pour ce β fixé, le plus petit α est 2ε et le plus grand $\beta - \alpha$ est $3n + \varepsilon - 2\varepsilon = 3n - \varepsilon$. Ainsi aucun de ces systèmes ne satisfait à l'une des égalités (8).

Les caractéristiques correspondantes seront, leurs trois éléments rangés par ordre de grandeur :

$$\begin{aligned} \alpha, \beta - \alpha, \beta, & \quad \text{lorsque } \beta \equiv 3n \\ \alpha, \beta - \alpha, N - \beta, & \quad \text{lorsque } \beta > 3n. \end{aligned} \tag{13}$$

Toutes ces caractéristiques diffèrent entre elles au moins par un élément. Toutes celles qui ont un α fixé diffèrent entre elles au moins par l'un des deux autres éléments. D'autre part α ne peut être égal à $\beta - \alpha$, β ou $N - \beta$.

Il résulte de ce qui est établi que ces $n(3n - 2)$ caractéristiques déterminent autant de paires différentes de colonnes conjuguées en dehors des colonnes du type (10), et qui peuvent donc toutes servir à former des systèmes de triples de Steiner.

Mais en comptant les colonnes (11), nous aurons ainsi :

$$2n(3n - 2) + 3n = n(6n - 1)$$

colonnes cycliques de triples différentes. *Ce sont là toutes les colonnes cycliques de triples des N éléments (§ 10).*

16. Pour former un système de triples de Steiner, il nous suffit maintenant d'avoir n caractéristiques telles que leurs $3n$ éléments soient différents (§ 14) et soient donc les éléments $1, 2, \dots, 3n$. Le problème de la détermination de tous les systèmes cycliques de triples de Steiner pour $N = 6n + 1$ éléments revient donc à trouver dans l'ensemble des $n(3n - 2)$ caractéristiques (13) tous les systèmes de n de ces caractéristiques, dans lesquels les n caractéristiques sont sans élément commun.

Remarquons que ces caractéristiques ont les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{lorsque } \beta \equiv 3n, & \alpha + (\beta - \alpha) = \beta \\ \text{lorsque } \beta > 3n, & \alpha + \beta - \alpha + N - \beta = N. \end{array}$$

Pour les premières, la somme de deux éléments est égale au troisième ; pour les secondes, la somme des trois éléments est égale à N .

D'autre part, si $\alpha, \alpha', \alpha''$, sont trois nombres différents pris dans $1, 2, \dots, 3n$, rangés par ordre de grandeur, $\alpha < \alpha' < \alpha''$, et tels que,

$$\text{ou } \alpha + \alpha' = \alpha'' \quad \text{ou } \alpha + \alpha' + \alpha'' = N$$

ils peuvent s'écrire en posant dans chacun des deux cas $\beta = \alpha + \alpha'$,

$$\text{dans le premier cas } \alpha, \beta - \alpha, \beta, \quad \text{où } \beta \equiv 3n,$$

$$\text{dans le second cas } \alpha, \beta - \alpha, N - \beta, \quad \text{où } \beta > 3n.$$

On voit sans peine que dans les deux cas le triple est l'une des caractéristiques (13).

Nous retrouvons bien, comme cela devait être, le problème de L. Heffter : Chercher tous les systèmes de n caractéristiques sans élément commun revient à répartir de toutes les façons possibles les nombres $1, 2, \dots, 3n$ en n groupes de trois, de manière que dans chaque groupe les trois nombres aient pour somme $6n + 1$, ou que l'un des trois nombres soit égal à la somme des deux autres.

(Reçu le 18 décembre 1930)