

Sur la méthode de Mayor en hyperstatique spatiale

Autor(en): **Ansermet, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin technique de la Suisse romande**

Band (Jahr): **99 (1973)**

Heft 11: **SIA spécial, no 2, 1973**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-71674>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Sur la méthode de Mayor en hyperstatique spatiale

par A. ANSERMET, ingénieur professeur¹

Introduction

Le calcul de systèmes statiques articulés et surdéterminés évolue de façon spectaculaire ; citons à ce sujet la publication n° 104 EPUL. A la base du calcul il y a la méthode de Mayor soumise à l'Académie des sciences ; cet éminent staticien a le premier choisi comme inconnues les variations de coordonnées des nœuds, ce qui procure une solution générale. Pour le calcul de réseaux électro-téléométriques cette solution a aussi fait ses preuves.

Malheureusement le cours de ce professeur est épuisé et l'édition ne sera pas renouvelée ; il paraît opportun de la publier à nouveau. En attendant ces quelques lignes furent rédigées car les droits de priorité de Mayor furent parfois méconnus.

Dans ce vaste problème, traité plus à fond à Zurich et outre Rhin, l'élément fondamental est le travail de déformation ; pour un nœud, grâce à la solution de Mayor, on a analytiquement une forme quadratique ternaire. La notion d'ellipsoïde de déformation pour un nœud devient aveuglante. C'est dire que la mesure de déformations présente moins d'intérêt, surtout pour l'enseignement supérieur. Quant aux systèmes articulés et statiquement déterminés, ils se prêtent au calcul d'ellipsoïdes de déformation des nœuds ; mais un élément est indéterminé : la déformation quadratique moyenne. En d'autres termes l'échelle manque mais ce n'est pas l'essentiel. Les poids des barres a posteriori ne sont plus amplifiés comme quand il y a surdétermination. De tels progrès furent réalisés pour ces calculs que les mesures de déformations présentent moins d'intérêt qu'autrefois.

Généralités

Le calcul de structures articulées est à certains égards plus simple que celui de réseaux téléométriques ; la fixation des poids donne lieu à moins de controverses car ces poids sont proportionnels aux coefficients d'élasticité, aux sections transversales des barres et aux inverses des longueurs de celles-ci.

En outre une certaine symétrie est parfois réalisée ce qui permet mieux d'éliminer partiellement ou totalement des éléments non diagonaux des matrices de rigidité. Le choix des axes joue un rôle.

Le choix des inconnues n'est plus guère sujet à des controverses ; la supériorité de la méthode aux déformations (Verformungsgrößenverfahren) sur celle aux forces (Kraftgrößenverfahren) n'est plus discutée. Enfin pour le calcul des termes absolus des équations aux déformations on rend le système déterminé (Grundsystem). Cette étape des calculs est trop connue pour donner lieu à des commentaires. On procédera souvent par voie semi-graphique. Le calcul électronique a contribué à l'évolution qui s'est manifestée pour ces calculs (voir [4]) ; mais tous les éléments du problème ne s'y prêtent pas également bien (ellipsoïdes

de déformation, poids des barres a posteriori, déformation quadratique moyenne relative à l'unité de poids, etc.).

C'est la chaire de statique de Lausanne qui présenta à l'Académie des sciences (voir [1]) la solution sans formation des dérivées de l'énergie avec représentation plane. Divers périodiques, notamment le « Zeitschrift für Mathematik und Physik » et le « Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik » méconnurent cette priorité.

Avant de poursuivre développons les notations essentielles sous forme générale donc sans indices :

l, s	Longueurs des barres et sections transversales de celles-ci
E	Coefficients d'élasticité des barres
A	Energie de déformation du système (Energieaufwand) $A = [pvv]$ (voir [4])
v	Variations de longueurs des barres ($v = mT$)
a, b, c	Coefficients directeurs des côtés du réseau et des barres du système
Dx, Dy, Dz	Variations de coordonnées des nœuds (solution sans coupures)
dx, dy, dz	Variations de coordonnées des nœuds (solution avec coupures)
p, P	Poids des barres respectivement a priori et a posteriori
T, m	Efforts axiaux (Stabkräfte) et modules des barres ($mT = v$)
Mr, Mi	Matrices de rigidité et leurs inverses

Théoriquement les coefficients $a, b, c \dots$ n'ont pas rigoureusement la même valeur selon que l'on fait des coupures ou pas de coupures mais bien pratiquement.

Un cas concret, très simple, rendra tout le problème plus clair.

Considérons un double-pylône (9 barres, 3 surabondantes), six inconnues (variations de coordonnées des nœuds). Faisons application de la solution classique tant en ce qui concerne les réseaux téléométriques et les systèmes articulés, surdéterminés. On pourrait réaliser la forme sphérique pour les ellipsoïdes de déformation des nœuds en modifiant un peu les poids des barres et éventuellement la structure.

L'ellipsoïde dit moyen est obtenu en fonction de la déformation quadratique moyenne relative à l'unité de poids. Les poids a posteriori des barres présentent de l'intérêt et donnent lieu à un contrôle bienvenu la somme des p/P .

Pour un nœud libre posons A constant : ce ne peut être qu'un ellipsoïde. Dans ce cas concret on a

$$[pav] = 0, \quad [pbv] = 0 \dots [pc'v] = 0$$

Double pylône à trois barres surabondantes

(9 équations et 6 inconnues car il y a 2 nœuds libres)

Le tableau des coefficients des équations aux déformations est :

¹ A l'EPFL un prix Mayor fut créé pour rendre hommage aux mérites de l'éminent professeur.

Barres	a	b	c	a'	b'	c'	p
1-2	+0,557	+0,575	+0,60				1
1-3	+0,557	-0,575	+0,60				1
1-4	-0,557	-0,575	+0,60				1
1-5	-0,557	+0,575	+0,60				1
1-6	+1,00	0	0	-1,00	0	0	0,6
6-7				+0,557	+0,575	+0,60	1
6-8				+0,557	-0,575	+0,60	1
6-9				-0,557	-0,575	+0,60	1
6-10				-0,557	+0,575	+0,60	1

Ces chiffres permettent de se rendre compte de la structure. Les poids p interviennent toujours par leurs valeurs relatives. Les coefficients de poids des inconnues sont $Q_{11}, Q_{22} \dots Q_{66}$ pour les quadratiques et $Q_{12}, Q_{13} \dots Q_{56}$ pour les non quadratiques. (Calcul par centre électronique EPFL.)

La formation des matrices est immédiate

$$M_r \equiv \begin{bmatrix} 1,84 & 0 & 0 & -0,60 & 0 & 0 \\ & 1,32 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1,44 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1,84 & 0 & 0 \\ \text{symétrique} & & & & 1,32 & 0 \\ & & & & & 1,44 \end{bmatrix}$$

$$M_i \equiv \begin{bmatrix} 0,610 & 0 & 0 & +0,20 & 0 & 0 \\ & 0,758 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0,694 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0,610 & 0 & 0 \\ \text{symétrique} & & & & 0,758 & 0 \\ & & & & & 0,694 \end{bmatrix}$$

La première des 36 équations aux coefficients de poids, par exemple est :

$$1,84 \times Q_{11} - 0,60 Q_{14} = 1,84 \times 0,610 - 0,60 \times 0,20 = 1$$

et la quatrième :

$$-0,60 Q_{11} + 1,84 Q_{14} = -0,60 \times 0,61 + 1,84 \times 0,20 = 0$$

(calculs faits à la règle)

Poids *a posteriori* P : De suite on voit que pour 8 barres on obtient la même valeur de P :

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{0,557^2 \times 0,610 + 0,575^2 \times 0,758 + 0,60^2 \times 0,694} = 0,69$$

et pour la barre 1-6 :

$$\frac{1}{P} = 0,610 + 0,610 - 2 \times 0,20 = 0,82$$

(somme $p/P = 6$) (voir [3], p. 68)

Les longueurs des axes principaux des ellipsoïdes de déformation sont proportionnelles à :

$$\sqrt{0,610} : \sqrt{0,758} : \sqrt{0,694} = 0,78 : 0,87 : 0,83$$

pour les deux nœuds 1 et 6, valeurs favorables.

Le problème peut revêtir une forme plus générale si, par exemple, certains nœuds sont astreints à se déplacer sur des surfaces. A la condition du minimum s'ajoutent des équations liant les inconnues. Une solution usuelle (voir [3]) consiste à fractionner le calcul (zweistufige); admettons des poids $p = 1$ pour simplifier

$[v'v] = \text{minimum} = [v'v'] + [v''v'']$ le terme non quadratique $[v'v'']$ étant nul. Cette solution permet de mieux réaliser le rôle joué par les équations ce qui ne serait pas

le cas si on avait procédé par voie d'élimination préalable d'inconnues.

Solution sans coupure de barres ni formation de dérivées de l'énergie

A certains égards elle est remarquable mais était peu utilisée par les praticiens car elle donnait lieu, en général, à un nombre élevé d'inconnues et d'équations. Grâce aux calculatrices électroniques elle est devenue moderne. Aux 6 variations de coordonnées ($Dx, Dy \dots$) des nœuds viennent s'ajouter les 9 efforts axiaux T dans les barres. En tout 15 inconnues déterminées grâce aux 9 équations aux déformations des barres et aux 6 équations d'équilibre (3 par nœud libre) qui sont linéaires.

Dans le calcul classique on avait $v = a dx + b dy + c dz + f$, le terme absolu f étant obtenu après coupure de barres surabondantes. En admettant les $a, b, c \dots$ pratiquement les mêmes l'équation devient :

$$mT = a Dx + b Dy + c Dz$$

Dans son mémoire présenté à l'Académie des sciences B. Mayor a encore ajouté les équations relatives aux nœuds fixes et celles exprimant que certains nœuds sont astreints à se déplacer sur des surfaces.

En outre cette solution se prête bien à une représentation plane de la structure spatiale : au point de vue des mathématiques pures cela revient à changer les variables. Pour chaque nœud au lieu de trois variations de coordonnées on n'en a plus que deux et une rotation comme 3^e inconnue. Une telle représentation plane fut appliquée notamment au calcul de la coupole du Reichstag (thèse Yung).

Pour une valeur déterminée de la rotation on a, dans le plan, une ellipse de déformation. L'épure de statique graphique fournit les déformations ; si le calcul graphique est spatial c'est moins simple.

En conclusion on peut dire que l'analogie existant entre les réseaux téléométriques et certains systèmes hyperstatiques a permis de réaliser de grands progrès. La solution de Mayor, reprise dans la publication EPUL n° 104, est la plus générale grâce au choix des inconnues. Elle se prête au calcul complet des déformations comme il convient dans l'enseignement supérieur. Pour ce problème la mesure de déformations est à déconseiller ; c'est par des calculs que l'on réalise la condition du minimum d'une part et une forme pas trop défavorable pour les ellipsoïdes de déformation des nœuds d'autre part. Par la méthode des moindres carrés ces calculs sont un jeu.

LITTÉRATURE

- [1] MAYOR, B. : *Statique des systèmes spatiaux* (Cours EPUL, épuisé).
- [2] STÜSSI, F. : *Baustatik I, II* (Birkhäuser).
- [3] WOLF, H. : *Ausgleichsrechnung...* (Dümmeler-Verlag).
- [4] DUPUIS, G. : *L'électronique au service de l'ingénieur* (Publication EPUL, n° 104).
- [5] FRIEDRICH, K. : *Richtigkeit der Methode der kleinsten Quadrate aus den Grundsätzen der Mechanik abgeleitet* (Zeitschr. f. Vermessungsw. 1943).
- [6] ANSERMET, A. : *Berechnung überstimmter Fachwerkkuppeln* (trad. chaire statique ETH) (Publication subsidiée par le Fonds national).
- [7] LINKWITZ : Diverses publications de l'Institut Geodäsie-Bauwesen Stuttgart.

Adresse de l'auteur :

A. Ansermet
professeur honoraire EPFL
1814 La Tour-de-Peilz