Courbes d'égale longueur

Autor(en): **Amstein, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **37 (1901)**

Heft 139

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-266432

Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Vol. XXXVII. N° 139. 1901

COURBES D'ÉGALE LONGUEUR

PAR

H. AMSTEIN

Pl. I-III.

Dans la théorie de la flexion d'une poutre prismatique on considère celle des fibres dont la longueur n'est pas modifiée par l'action des forces, c'est la *fibre neutre*. La forme qu'elle affecte après la flexion est dite *ligne élastique*. La fibre neutre et la ligne élastique sont des *courbes d'égale longueur*.

Il va sans dire qu'en géométrie on peut former autant de courbes d'égale longueur qu'on veut. Il suffit, à cet effet, d'introduire des facteurs de proportionnalité convenables. Dans ce domaine la recherche des courbes d'égale longueur ne présente aucun intérêt. Il n'en est pas de même d'autres domaines. Comme l'étude des lignes élastiques définies plus haut est très importante en mécanique, il peut être intéressant, dans le domaine des représentations conformes, d'étudier une question analogue.

Le problème dont s'occupe ce petit travail est donc le suivant : Etant donnée une fonction monogène, quelle est la courbe dont la longueur de chacun de ses éléments n'est pas modifiée par la représentation conforme attachée à cette fonction ?

Ce problème est de ceux que l'on rencontre tout naturellement sur son chemin dès que l'on aborde l'étude des représentations conformes. Sa résolution n'offre aucune difficulté, d'ailleurs elle est connue. Ce n'est donc pas pour la méthode employée que nous offrons ces quelques pages au lecteur, mais bien pour les résultats de détail obtenus.

Il peut, en effet, être utile de connaître des courbes qui, entre deux points correspondants quelconques, ont la même longueur, ou bien encore des courbes dont la longueur peut, comme par exemple celle de la lemniscate, être divisée en un certain nombre de parties égales.

Soit

$$\zeta = \xi + i\eta = f(z, a, b, \ldots) \tag{1}$$

une fonction monogène de la variable indépendante $z = x + iy$ et des paramètres constants $a = a' + ia''$, $b = b' + ib''$, ...

On sait que toute fonction de cette nature sert d'intermédiaire à une représentation conforme.

En mettant en évidence la valeur absolue r et la déviation φ de la dérivée $f'(z)$, l'équation

$$d\zeta = f'(z, a, b, \ldots)\, dz = re^{\varphi i}\, dz$$

montre que le rapport des valeurs absolues de $d\zeta$ et dz est égal à r, ce qui peut s'écrire en adoptant la notation généralement en usage

$$\frac{|d\zeta|}{|dz|} = r.$$

Il suffit donc que r soit égal à l'unité pour que la longueur de l'élément dz ne soit pas modifiée par la représentation conforme $\zeta = f(z, a, b, \ldots)$.

On arrive au même résultat en introduisant les quantités conjugées de ζ, z, a, b, ... que nous désignerons par l'indice 1, de sorte que

$$\zeta_1 = \xi - i\eta, \quad z_1 = x - iy, \quad a_1 = a' - ia'', \quad b_1 = b' - ib'', \ldots.$$

En effet l'équation (1) entraîne cette autre

$$\zeta_1 = f(z_1, a_1, b_1, \ldots) \tag{1^a}$$

et l'on a, en désignant encore par ds l'élément de la courbe *originale*, (z), et par $d\sigma$ l'élément de la courbe *image*, (ζ),

$$dz.\,dz_1 = (dx + idy)(dx - idy) = dx^2 + dy^2 = ds^2,$$

$$d\zeta.\,d\zeta_1 = (d\xi + id\eta)(d\xi - id\eta) = d\xi^2 + d\eta^2 = d\sigma^2,$$

et puisque

$$d\zeta = f'(z, a, b, \ldots)\,dz, \qquad d\zeta_1 = f'(z_1, a_1, b_1, \ldots)\,dz_1,$$

il vient

$$d\sigma^2 = f'(z, a, b, \ldots)\,dz.f'(z_1, a_1, b_1, \ldots)\,dz_1 =$$
$$= f'(z, a, b, \ldots)f'(z_1, a_1, b_1, \ldots)\,ds^2.$$

Ainsi, pour que $d\sigma$ soit égal à ds, il suffit que l'on ait

$$f'(z, a, b, \ldots)f'(z_1, a_1, b_1, \ldots) = 1. \tag{2}$$

Cette condition détermine la courbe (z). Pour trouver la courbe correspondante (ζ), on peut ou bien chercher directement l'image de la courbe (z), ce qui sera généralement assez long, ou bien se servir de l'équation (2) appliquée à la fonction inverse de $f(z, a, b, \ldots)$, car de

$$\frac{d\zeta}{dz} \cdot \frac{d\zeta_1}{dz_1} = 1,$$

il suit immédiatement

$$\frac{dz}{d\zeta} \cdot \frac{dz_1}{d\zeta_1} = 1.$$

Ceci dit, nous allons passer en revue les représentations conformes les plus élémentaires et les mieux connues, afin de découvrir des courbes d'égale longueur.

I. (1) $\zeta = z + a$, $a = \text{const.}$

Dans ce cas on a

$$\zeta' = \frac{d\zeta}{dz} = 1\,,\ \zeta'_1 = 1\,,$$

et, par conséquent,

$$\zeta'\,\zeta'_1 = 1\,.$$

Comme cette dernière relation est indépendante de z, on en conclut que les courbes (z) et (ζ) sont toujours identiques. La formule (1) constitue, en effet, un simple déplacement de l'origine avec maintien de la direction des axes des coordonnées x et y.

II. (1) $\zeta = az$, $a = \text{const.}$

$$\zeta' = a,\ \zeta'_1 = a_1\,.$$

La relation

$$\zeta'\,\zeta'_1 = 1$$

n'est satisfaite que si a est de la forme $e^{\lambda i}$, où λ est un nombre réel. Dans ce cas il n'existe donc pas de courbes d'égale longueur, à moins que le facteur a n'ait pour seul effet une rotation autour de l'origine commune des plans (z) et (ζ). La formule (1) peut, en vérité, être considérée comme le symbole de la similitude parfaite, avec l'origine comme centre de similitude.

III. (1) $$\zeta = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

où

$$\alpha = \alpha' + i\alpha'', \ \beta = \beta' + i\beta'', \ \gamma = \gamma' + i\gamma'', \ \delta = \delta' + i\delta''$$

sont des constantes.

On sait que cette fonction fait correspondre à toute circonférence (z) une circonférence (ζ), la droite étant considérée comme un cas particulier de la circonférence. Elle est le symbole de ce que Mœbius appelle une « Kreisverwandtschaft », ou encore, elle caractérise (avec une légère modification), une transformation au moyen de rayons vecteurs réciproques.

De (1) on tire

$$\zeta' = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma z + \delta)^2}, \ \zeta'_1 = \frac{\alpha_1 \delta_1 - \beta_1 \gamma_1}{(\gamma_1 z_1 + \delta_1)^2}$$

d'où

$$\zeta' \zeta'_1 = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma z + \delta)^2} \cdot \frac{\alpha_1 \delta_1 - \beta_1 \gamma_1}{(\gamma_1 z_1 + \delta_1)^2} = 1,$$

ou bien

$$(2) \quad (\gamma z + \delta)^2 (\gamma_1 z_1 + \delta_1)^2 = (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha_1 \delta_1 - \beta_1 \gamma_1).$$

En posant pour simplifier l'écriture

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \mathrm{A}' + i\mathrm{A}'',$$

où

$$\mathrm{A}' = (\alpha' \delta' - \beta' \gamma') - (\alpha'' \delta'' - \beta'' \gamma''),$$

$$\mathrm{A}'' = (\alpha' \delta'' - \beta' \gamma'') + (\alpha'' \delta' - \beta'' \gamma'),$$

il vient

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha_1 \delta_1 - \beta_1 \gamma_1) = \mathrm{A}'^2 + \mathrm{A}''^2.$$

Ensuite on trouve successivement

$$(\gamma z+\delta)(\gamma_1 z_1+\delta_1)=\gamma\gamma_1 zz_1+\gamma_1\delta z_1+\gamma\delta_1 z+\delta\delta_1=$$

$$=(\gamma'^2+\gamma''^2)(x^2+y^2)+(\gamma'-i\gamma'')(\delta'+i\delta'')(x-iy)+$$

$$+(\gamma'+i\gamma'')(\delta'-i\delta'')(x+iy)+\delta'^2+\delta''^2=$$

$$=(\gamma'^2+\gamma''^2)(x^2+y^2)+2(\gamma'\delta'+\gamma''\delta'')x+2(\gamma'\delta''-\gamma''\delta')y+\delta'^2+\delta''^2.$$

Ainsi la condition (2) fournit l'équation

$$[(\gamma'^2+\gamma''^2)(x^2+y^2)+2(\gamma'\delta'+\gamma''\delta'')x+2(\gamma'\delta''-\gamma''\delta')y+\delta'^2+\delta''^2]^2=\mathrm{A}'^2+\mathrm{A}''^2$$

qui est celle d'une courbe du 4e degré dégénérant en deux circonférences, dont l'une est imaginaire.

Cette équation peut facilement être mise sous la forme normale

$$\left(x+\frac{\gamma'\delta'+\gamma''\delta''}{\gamma'^2+\gamma''^2}\right)^2+\left(y+\frac{\gamma'\delta''-\gamma''\delta'}{\gamma'^2+\gamma''^2}\right)^2=\frac{\sqrt{\mathrm{A}'^2+\mathrm{A}''^2}}{\gamma'^2+\gamma''^2},$$

où la seconde valeur de $\sqrt{\mathrm{A}'^2+\mathrm{A}''^2}$ a été rejetée.

La courbe (z) étant une circonférence, on sait d'avance que son image (ζ) sera une courbe de même nature. Pour la trouver, on résoudra l'équation (1) par rapport à z, ce qui donne

$$z=\frac{-\delta\zeta+\beta}{\gamma\zeta-\alpha}.$$

En comparant cette formule avec (1), on reconnaît qu'il suffit de remplacer dans l'équation précédente

$$x \text{ par } \xi, \quad y \text{ par } \eta, \quad \alpha \text{ par } -\delta, \quad \delta \text{ par } -\alpha$$

pour obtenir l'équation de la courbe (ζ), à savoir

$$\left(\xi-\frac{\alpha'\gamma'+\alpha''\gamma''}{\gamma'^2+\gamma''^2}\right)^2+\left(\eta-\frac{\alpha''\gamma'-\alpha'\gamma''}{\gamma'^2+\gamma''^2}\right)^2=\frac{\sqrt{\mathrm{A}'^2+\mathrm{A}''^2}}{\gamma'^2+\gamma''^2},$$

Comme ces substitutions n'affectent pas les quantités A' et A'', on voit que les circonférences (z) et (ζ) ont le même rayon ; ce sont bien des courbes d'égale longueur.

IV $$\zeta = z^n,$$

où n est un nombre constant réel quelconque, mais différent de l'unité.

Dans ce cas on a

$$\zeta' = nz^{n-1}, \quad \zeta'_1 = nz_1{}^{n-1},$$

et la condition

$$\zeta'\zeta'_1 = n^2 (zz_1)^{n-1} = 1$$

donne

$$n^2 (x^2 + y^2)^{n-1} = 1$$

ou

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{n^{\frac{2}{n-1}}}.$$

La courbe (z) est une circonférence de centre 0 et de rayon $\dfrac{1}{n^{\frac{1}{n-1}}}$. La courbe (ζ) sera également une circonférence de centre 0, mais de rayon $\dfrac{1}{n^{\frac{n}{n-1}}}$. On s'en convainc immédiatement.

En effet, la formule

$$z = \zeta^{\frac{1}{n}}$$

montre que, pour obtenir l'équation de cette courbe, il suffit de remplacer dans l'équation précédente

$$x \text{ par } \xi, \quad y \text{ par } \eta \quad \text{et} \quad n \text{ par } \frac{1}{n},$$

ce qui donne

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{1}{n^{\frac{2n}{n-1}}} .$$

Il est à remarquer que la correspondance entre les courbes (z) et (ζ) est telle que le point ζ parcourt n fois sa circonférence, tandis que z décrit une seule fois la circonférence (z).

Cas particulier. $\zeta = \frac{1}{z}, \quad z = \frac{1}{\zeta}$.

Les circonférences (z) et (ζ) se confondent ; leur rayon est égal à l'unité. Les deux points correspondants parcourent cette courbe en même temps, mais en sens inverse.

Observation. Il est évident que, les points z et ζ restant en général distincts, les courbes (z) et (ζ) se confondront toutes les fois que la fonction ζ et la fonction inverse z sont identiques. Plus loin nous rencontrerons encore un exemple de ce genre.

V. (1) $\zeta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

Nous rappelons, en passant, que cette fonction transforme le système de circonférences concentriques avec l'origine comme centre commun et le faisceau de rayons correspondants respectivement en un système d'ellipses et d'hyperboles homofocales aux foyers $z = \pm 1$.

De (1) il suit

$$\zeta' = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right), \quad \zeta'_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2_1}\right),$$

ensorte que la condition $\zeta' \zeta'_1 = 1$ prend la forme

$$\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)\left(1 - \frac{1}{z^2_1}\right) = 1 ,$$

ou bien

$$3 z^2 z_1^2 + z^2 + z_1^2 - 1 = 0.$$

L'équation de la courbe (z) devient ainsi

$$3 (x^2 + y^2)^2 + 2 (x^2 - y^2) - 1 = 0,$$

ou, posant

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

en coordonnées polaires

$$3 r^4 + 2 r^2 \cos 2 \varphi - 1 = 0.$$

En résolvant cette équation, soit par rapport à r, soit par rapport à $\cos 2 \varphi$,

$$\left\{ \begin{aligned} r &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{- \cos 2 \varphi + \sqrt{3 + \cos^2 2\varphi}}, \\ \cos 2\varphi &= \frac{1 - 3 r^4}{2 r^2}, \end{aligned} \right\} \text{(fig. 1)}$$

on obtient des formules qui se prêtent bien au calcul numérique.

Etant connu un point r, φ de la courbe (z), on peut déterminer le point correspondant de la courbe (ζ) à l'aide des formules

$$\xi = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi, \quad \eta = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi,$$

que l'on obtient en posant dans l'équation (1) $z = re^{\varphi i}$, et en séparant ensuite la partie réelle de la partie imaginaire.

Il est d'ailleurs facile d'établir l'équation de cette courbe. En résolvant l'équation (1) par rapport à z, il vient

$$z = \zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1},$$

d'où

$$z' = 1 \pm \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} = \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1} \pm \zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}},$$

$$z'_1 = \frac{\sqrt{\zeta^2_1 - 1} \pm \zeta_1}{\sqrt{\zeta^2_1 - 1}}.$$

La condition $z' \, z'_1 = 1$ donne ensuite

$$\frac{\left(\sqrt{\zeta^2 - 1} \pm \zeta\right)\left(\sqrt{\zeta^2_1 - 1} \pm \zeta_1\right)}{\sqrt{\zeta^2 - 1} \, . \sqrt{\zeta^2_1 - 1}} = 1,$$

relation à laquelle on peut donner la forme

$$\pm \zeta \sqrt{\zeta^2_1 - 1} \pm \zeta_1 \sqrt{\zeta^2 - 1} = - \zeta \zeta_1 .$$

En rendant rationnel et en simplifiant, on est conduit à

$$3 \, \zeta^4 \, \zeta^4_1 - 2 \, \zeta^2 \, \zeta^2_1 \, (\zeta^2 + \zeta^2_1) + 2 \, \zeta^2 \, \zeta^2_1 - \zeta^4 - \zeta^4_1 = 0,$$

ce qui fournit l'équation cherchée

$$3 \, (\xi^2 + \eta^2)^4 - 4 \, (\xi^2 + \eta^2) \, (\xi^2 - \eta^2) + 16 \, \xi^2 \eta^2 = 0 .$$

Transformée en coordonnées polaires, à l'aide des formules

$$\xi = \varrho \cos \psi, \quad \eta = \varrho \sin \psi,$$

elle devient, après division par ϱ^4

$$3 \varrho^4 - 4 \, \varrho^2 \cos 2 \psi + 4 \sin^2 2 \psi = 0 .$$

En vue du calcul numérique, on en tire

$$\left\{ \begin{aligned} \varrho &= \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\cos 2 \, \psi \pm \sqrt{4 \cos^2 2 \, \psi - 3}}, \\ \cos 2 \, \psi &= \frac{- \varrho^2 + 2 \sqrt{1 + \varrho^4}}{2} \end{aligned} \right\} \quad \text{(fig. 2)}$$

Remarque. La présence du facteur commun ϱ^4 accuse l'origine comme un point quadruple de la courbe.

VI. (1) $\zeta^2 + z^2 = 1$.

De cette équation on tire d'abord

$$\zeta = \sqrt{1 - z^2},$$

puis

$$\zeta' = -\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}, \quad \zeta'_1 = -\frac{z_1}{\sqrt{1-z^2_1}}.$$

La condition $\zeta' \zeta'_1 = 1$ devient

$$\frac{z\, z_1}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z^2_1}} = 1,$$

d'où il suit

$$z^2 + z^2_1 = 1,$$

ou bien

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{2}.$$

La courbe (z) est donc une hyperbole équilatère qui, en vertu de la symétrie de l'équation (1) relativement aux variables z et ζ, se correspond à elle-même. La correspondance est telle qu'au point x, y correspond le point $\xi = x$, $\eta = -y$, ou encore le point $\xi = -x$, $\eta = y$.

VII. $\zeta = \log z$.

Dans ce cas

$$\zeta' = \frac{1}{z}, \quad \zeta'_1 = \frac{1}{z_1},$$

et la condition $\zeta' \zeta'_1 = 1$ donne la circonférence

$$x^2 + y^2 = 1.$$

La courbe (ζ) se réduit à la droite $\xi = 0$, car de

$$z = e^{\zeta}, \quad z' = e^{\zeta}, \quad z' z'_1 = e^{\zeta+\zeta_1} = 1$$

il suit

$$\zeta + \zeta_1 = 0, \qquad \text{ou bien} \qquad \xi = 0 .$$

Lorsque le point z parcourt le cercle des unités une fois dans le sens positif, le point ζ décrit la portion de l'axe des η qui va de $\eta = 0$ à $\eta = + 2\pi$.

VIII. $\zeta = \arcsin z$.

Dans le cas actuel on a

$$\zeta' = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}, \quad \zeta'_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2_1}} .$$

La courbe (z) est une lemniscate particulière au paramètre $\sqrt{2}$, à savoir

(1) $$(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0 . \qquad \text{(fig. 3)}$$

Pour trouver l'image de cette courbe, on partira de l'équation

$$z = \sin \zeta = \frac{e^{i\zeta} - e^{-i\zeta}}{2i}$$

qui fournit

$$z' = \frac{e^{i\zeta} + e^{-i\zeta}}{2}, \quad z'_1 = \frac{e^{-i\zeta_1} + e^{i\zeta_1}}{2} .$$

La condition $z' z'_1 = 1$ prend la forme

$$\frac{1}{4}\left(e^{i\zeta} + e^{-i\zeta}\right)\left(e^{i\zeta_1} + e^{-i\zeta_1}\right) = 1 ,$$

ou bien

$$e^{i(\zeta+\zeta_1)} + e^{-i(\zeta+\zeta_1)} + e^{i(\zeta-\zeta_1)} + e^{-i(\zeta-\zeta_1)} = 4 ,$$

$$e^{2i\xi} + e^{-2i\xi} + e^{2\eta} + e^{-2\eta} = 4 ,$$

(2) $$e^{2\eta} + e^{-2\eta} + 2 \cos 2\xi = 4 .$$

Posant pour un instant

$$e^{2\eta} = u,$$

cette dernière équation devient

$$u + \frac{1}{u} + 2\cos 2\xi = 4,$$

ou

$$u^2 + 2(\cos 2\xi - 2)u + 1 = 0.$$

On en tire

$$e^{2\eta} = u = (2 - \cos 2\xi) \pm \sqrt{(2 - \cos 2\,\xi)^2 - 1}.$$

Finalement la courbe (ζ) est représentée par l'équation

$$\eta = \frac{1}{2}\log\left[(2 - \cos 2\xi) \pm \sqrt{(2 - \cos 2\xi)^2 - 1}\right]$$

ou

$$\eta = \pm\frac{1}{2}\log\left[(2 - \cos 2\xi) + \sqrt{(2 - \cos 2\xi)^2 - 1}\right] \text{ (fig. 4)}.$$

On remarquera que l'ordonnée η est une fonction périodique de l'abscisse ξ ; la période est égale à π.

L'élément de cette courbe est donné par la formule

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}\, d\xi.$$

Or

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \pm\frac{\sin 2\xi}{\sqrt{(2 - \cos 2\xi)^2 - 1}}$$

et, par conséquent

$$d\sigma = \sqrt{1 + \frac{\sin^2 2\xi}{(2 - \cos 2\xi)^2 - 1}}\, d\xi = 2\sqrt{\frac{1 - \cos 2\xi}{(2 - \cos 2\xi)^2 - 1}}\, d\xi =$$

$$= 2\sqrt{\frac{1 - \cos 2\xi}{(1 - \cos 2\xi)(3 - \cos 2\xi)}}\, d\xi = \frac{2\, d\xi}{\sqrt{3 - \cos 2\xi}} = \frac{\sqrt{2}\, d\xi}{\sqrt{1 + \sin^2\xi}}.$$

Afin de vérifier si, entre deux points correspondants, les courbes (z) et (ζ) ont la même longueur, il est utile d'exprimer les coordonnées x, y en fonction de ξ. A cet effet on écrira

$$z = x + iy = \frac{1}{2i}\left(e^{i\zeta} - e^{-i\zeta}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(\xi+i\eta)} - e^{-i(\xi+i\eta)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{i\xi}e^{-\eta} - e^{-i\xi}e^{\eta}\right) = \frac{1}{2i}\left[e^{-\eta}(\cos\xi + i\sin\xi) - e^{\eta}(\cos\xi - i\sin\xi\right] =$$

$$= \frac{e^{\eta} + e^{-\eta}}{2}\sin\xi + i\,\frac{e^{\eta} - e^{-\eta}}{2}\cos\xi\,.$$

En comparant, dans les deux membres, les parties réelles et les parties imaginaires, on obtient

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{e^{\eta} + e^{-\eta}}{2}\sin\xi\,, \\ y &= \frac{e^{\eta} - e^{-\eta}}{2}\cos\xi\,. \end{aligned}\right.$$

Incidemment on pourra constater (ce qui d'ailleurs est connu) qu'aux droites $\eta =$ const. correspond un système d'ellipses homofocales

$$\frac{x^2}{\left(\frac{e^{\eta} + e^{-\eta}}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{e^{\eta} - e^{-\eta}}{2}\right)^2} = 1$$

et aux droites $\xi =$ const. un système d'hyperboles homofocales

$$\frac{x^2}{\sin^2\xi} - \frac{y^2}{\cos^2\xi} = 1\,.$$

Les foyers communs à toutes ces courbes sont les points $x = \pm 1$, $y = 0$.

Dans le but de faire disparaître la variable η des formules (3), on modifie l'équation (2) de la manière suivante :

$$(2) \qquad e^{2\eta} + e^{-2\eta} = 4 - 2\cos 2\xi\,,$$

$$e^{2\eta} + 2 + e^{-2\eta} = 6 - 2\cos 2\xi\,,$$

$$e^{2\eta} - 2 + e^{-2\eta} = 2 - 2\cos 2\xi\,,$$

d'où l'on tire

$$\frac{e^{\eta} + e^{-\eta}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{3 - \cos 2\xi}\,,$$

$$\frac{e^{\eta} - e^{-\eta}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \cos 2\xi}\,.$$

En introduisant ces valeurs dans les formules (3), ces dernières prennent la forme

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\xi \sqrt{3 - \cos 2\xi} = \frac{1}{2}\sqrt{(2 - \cos 2\xi)^2 - 1}\,, \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\xi \sqrt{1 - \cos 2\xi} = \frac{1}{2}\sin 2\xi\,. \end{aligned} \right.$$

On en déduit

$$dx = \frac{(2 - \cos 2\xi)\sin 2\xi}{\sqrt{(2 - \cos 2\xi)^2 - 1}}\,d\xi\,, \quad d\eta = \cos 2\xi\,d\xi\,;$$

puis

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\frac{(2 - \cos 2\xi)^2 \sin^2 2\xi}{(2 - \cos 2\xi)^2 - 1} + \cos^2 2\xi}\,d\xi =$$

$$= 2\sqrt{\frac{1 - \cos 2\xi}{(3 - \cos 2\xi)(1 - \cos 2\xi)}}\,d\xi = \frac{2\,d\xi}{\sqrt{3 - \cos 2\xi}} = \frac{\sqrt{2}\,d\xi}{\sqrt{1 + \sin^2\xi}}\,.$$

Ainsi on a bien $ds = d\sigma$ et les deux courbes sont d'égale longueur. Il va sans dire que, s'il s'agissait de calculer la longueur de la lemniscate (1), on préférerait introduire des coordonnées polaires moyennant les formules $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. On obtiendrait de cette façon

$$r = \sqrt{2} \sqrt{\cos 2\varphi}\,, \quad ds = \frac{\sqrt{2}\, d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,.$$

Le rayon de courbure R de la courbe (z) est donné par la formule

$$\mathrm{R} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}^{\,3}}{dx\, d^2 y - dy\, d^2 x}\,;$$

son expression tirée des formules (4), est

$$\mathrm{R} = -\frac{\sqrt{2}}{3 \sin \xi}\,,$$

tandis que le rayon de courbure P de la courbe (ζ) devient

$$\mathrm{P} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}^{\,3}}{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sin \xi}\,.$$

Le rapport $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{R}} = -3$ est donc constant; cette circonstance digne d'être remarquée, se rencontrera encore plusieurs fois dans la suite de ce travail.

IX. $\zeta = \operatorname{arctg} z$

Cette fonction conduit aux mêmes courbes que la précédente, à la seule différence près que les axes des x et des y sont échangés entre eux (mais non les axes des ξ et des η).

X. (1) $$\zeta = z + \frac{1}{3\,z^3}\cdot$$

Cette fonction permet de représenter d'une manière conforme l'extérieur du cercle des unités sur l'extérieur de l'astroïde particulière.

$$\xi^{\frac{2}{3}} + \eta^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Dans ce cas on a

$$\zeta' = 1 - \frac{1}{z^4}\,, \quad \zeta'_1 = 1 - \frac{1}{z_1^4}$$

et la condition $\zeta'\,\zeta'_1 = 1$ donne

$$z^4 + z_1^4 = 1\,,$$

d'où il suit que la courbe (z) a pour équation

$$(x^2 + y^2)^2 - 8\,x^2\,y^2 = \frac{1}{2}\,, \tag{2}$$

ou en coordonnées polaires, si l'on pose $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$$r^4(1 - 8\sin^2\varphi\cos^2\varphi) = r^4(1 - 2\sin^2 2\varphi) = r^4\cos 4\varphi = \frac{1}{2}\,,$$

ou encore

$$r = \frac{1}{\sqrt[4]{2\cos 4\varphi}}\,. \qquad \text{(fig. 5)} \tag{3}$$

De cette équation on tire, en désignant par ϑ l'angle que fait la tangente en un point quelconque avec le rayon vecteur et par α l'angle que fait cette même tangente avec l'axe positif des x,

$$\operatorname{tg}\vartheta = r\,\frac{d\varphi}{dr} = \operatorname{cotg} 4\varphi\,,$$

d'où

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - 4\varphi\,,$$

$$\alpha = \vartheta + \varphi = \frac{\pi}{2} - 3\varphi\,;$$

l'élément de la courbe a pour expression

$$ds = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \frac{d\varphi}{(\cos 4\varphi)^{\frac{5}{4}}}\,,$$

et le rayon de courbure R devient

$$\mathrm{R} = \frac{ds}{d\alpha} = -\frac{1}{3\sqrt[4]{2}\,(\cos 4\varphi)^{\frac{5}{4}}}\,.$$

Cette courbe a quatre asymptotes passant par l'origine et faisant avec l'axe positif des x respectivement les angles $\pm\frac{\pi}{8}$, $\pm\frac{3\pi}{8}$. Elle est donc du genre hyperbole.

Posant dans l'équation (1) $z = re^{i\varphi}$ et en séparant les parties réelles des parties imaginaires, il vient

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= r\cos\varphi + \frac{1}{3\,r^3}\cos 3\varphi\,, \\ \eta &= r\sin\varphi - \frac{1}{3\,r^3}\sin 3\varphi\,, \end{aligned}\right.$$

$\left(\text{d'où pour } r = 1 \text{ l'astroïde } \xi = \frac{4}{3}\cos^3\varphi\,,\ \eta = \frac{4}{3}\sin^3\varphi \text{ ou } (2)\right)$.

En introduisant dans ces équations la valeur de r tirée de (3), on obtient pour la courbe (ζ) la représentation paramétrique

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{3}\,\frac{4\cos\varphi + \cos 7\varphi}{(2\cos 4\varphi)^{\frac{1}{4}}}\,, \\ \eta &= \frac{1}{3}\,\frac{4\sin\varphi - \sin 7\varphi}{(2\cos 4\varphi)^{\frac{1}{4}}}\,. \qquad \text{(fig. 6)} \end{aligned}\right.$$

Cette courbe qui se compose de quatre branches, a les mêmes asymptotes que la courbe (z) ; elle possède en outre quatre points doubles situés sur les axes coordonnés à la distance 1,20959 de l'origine; un de ces points correspond à $\varphi = 14^0\ 15'\ 38'', 39$. Pour trouver l'élément de cette courbe, on formera

$$\left\{\begin{aligned} d\xi &= -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\ \frac{\sin 11\varphi}{(\cos 4\varphi)^{\frac{5}{4}}}\, d\varphi, \\ d\eta &= -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\ \frac{\cos 11\varphi}{(\cos 4\varphi)^{\frac{5}{4}}}\, d\varphi, \end{aligned}\right.$$

d'où l'on tire, comme cela devait être

$$d\sigma = ds = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\ \frac{d\varphi}{(\cos 4\varphi)^{\frac{5}{4}}}\,.$$

On peut encore remarquer que pour cette courbe

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} 11\varphi \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - 11\varphi$$

et le rayon de courbure

$$\mathrm{P} = -\frac{1}{11\sqrt[4]{2}} \cdot \frac{1}{(\cos 4\varphi)^{\frac{5}{4}}}\,.$$

Ainsi, en deux points correspondants, les rayons de courbure des courbes (z) et (ζ) sont dans un rapport constant $= \dfrac{11}{3}$.

XI. (1) $\zeta = \dfrac{1}{4}\left(3\,z + \dfrac{1}{z^3}\right)$.

A l'égard de cette fonction qui sert d'intermédiaire à la représentation conforme de l'extérieur du cercle des unités sur l'extérieur de l'astroïde $\xi^{\frac{2}{3}} + \eta^{\frac{2}{3}} = 1$, on pourra consulter mon travail intitulé : *Un exemple de représentation conforme,* « Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences naturelles », vol. XI, 1878, pages 175 à 198.

Bien que cette fonction ne se distingue de la précédente que par le facteur constant $\frac{3}{4}$, les courbes (z) et (ζ) sont très différentes de celles que nous venons de trouver.

Dans le cas actuel la courbe (z) a pour équation

$$7(x^2+y^2)^4+9(2x^4-12x^2y^2+2y^4)=9,$$

ou en coordonnées polaires $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$,

$$7r^8+18r^4\cos 4\varphi=9. \qquad \text{(fig. 7)}$$

En vue du calcul numérique on en tire

$$(2) \quad r=\frac{1}{\sqrt[4]{7}}\sqrt[4]{-9\cos 4\varphi+\sqrt{81\cos^2 4\varphi+63}}.$$

Son élément est donné par l'une des formules

$$ds=\frac{12\,rd\varphi}{7r^4+9\cos 4\varphi}=\frac{4\,rd\varphi}{\sqrt{9\cos^2 4\varphi+7}}$$

et son rayon de courbure par

$$\mathrm{R}=\frac{24\,r^5}{35\,r^8-27}.$$

L'équation (2) étant satisfaite, il suffit pour obtenir les coordonnées ξ, η du point de la courbe (ζ) qui correspond au point r, φ de la courbe (z), de poser $z=re^{i\varphi}$ dans l'équation (1) et de comparer, dans les deux membres, les parties réelles et les parties imaginaires, ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{l} \xi = \frac{1}{4}\left(3\,r \cos \varphi + \frac{1}{r^3} \cos 3\varphi\right), \\ \eta = \frac{1}{4}\left(3\,r \sin \varphi - \frac{1}{r^3} \sin 3\varphi\right). \qquad \text{(fig. 8)} \end{array}\right.$$

Cette courbe présente quatre points doubles situés sur les axes coordonnés à la distance 0,83662 de l'origine. (Un de ces points répond à $\varphi = 18^0\,55'\,20'', 35$). La construction de la courbe est facilitée par la connaissance de $\operatorname{tg} \beta = \frac{d\eta}{d\xi}$ et du rayon de courbure. On trouve

$$\operatorname{tg} \beta = - \frac{r^8 \cos 5\varphi - 2\,r^4 \cos \varphi + \cos 3\varphi}{r^8 \sin 5\varphi - 2\,r^4 \sin \varphi - \sin 3\varphi},$$

et

$$\mathrm{P} = - \frac{24\,r^5}{35\,r^8 - 99}.$$

(Au point double correspondant à la valeur indiquée de φ, $\operatorname{tg} \beta = \pm 1{,}73152$).

XII. $\qquad$ (1) $\qquad \zeta = nz - pz^n,$

où p est un nombre réel quelconque et n un nombre entier positif.

Cette fonction résout le problème : Représenter d'une manière conforme l'intérieur du cercle des unités sur l'intérieur d'une épicycloïde. A $p = 1$ correspond une épicycloïde ordinaire et à $p < 1$ une épicycloïde allongée. *)

Dans ce cas

$$\zeta' = n\,(1 - pz^{n-1}), \quad \zeta'_1 = n\,(1 - pz_1{}^{n-1}),$$

*) Comparez mon travail intitulé : *Notes sur les épicycloïdes et les hypocycloïdes, envisagées au point de vue de la représentation conforme.* Bulletin de la Soc. vaud. des Sciences nat. Vol. XXVIII, 1892, p. 9.

et la condition $\zeta' \zeta'_1 = 1$ donne l'équation

$$n^2 [1 - p (z^{n-1} + z_1^{n-1}) + p^2 (z z_1)^{n-1}] = 1$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$p^2 (z z_1)^{n-1} - p (z^{n-1} + z_1^{n-1}) = - \frac{n^2 - 1}{n^2}$$

ou, en introduisant $z = x + iy$, $z_1 = x - iy$ et en posant

$$\frac{m (m-1) (m-2) \ldots (m-k+1)}{1. \ 2. \ 3 \ \ldots \ k} = m_k$$

$$p^2(x^2+y^2)^{n-1} - p [x^{n-1} + (n-1)_1 x^{n-2} y i - (n-1)_2 x^{n-3} y^2 -$$
$$- (n-1)_3 x^{n-4} y^3 i + \ldots + (n-1)_k x^{n-k-1} y^k i^k + \ldots + y^{n-1} i^{n-1}] -$$
$$- p [x^{n-1} - (n-1)_1 x^{n-2} y i - (n-1)_2 x^{n-3} y^2 + (n-1)_3 x^{n-4} y^3 i + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^k (n-1)_k x^{n-k-1} y^k i^k + \ldots + (-1)^{n-1} y^{n-1} i^{n-1}] =$$
$$= - \frac{n^2 - 1}{n^2} .$$

En simplifiant, il vient

$$p^2 (x^2+y^2)^{n-1} - 2p [x^{n-1} - (n-1)_2 x^{n-3} y^2 + (n-1)_4 x^{n-5} y^4 + \ldots .$$
$$+ (-1)^\lambda (n-1)_{2\lambda} x^{n-2\lambda} y^{2\lambda} - \ldots] = - \frac{n^2 - 1}{n^2} ,$$

ce que l'on peut écrire 1°) lorsque n est impair

$$p^2 (x^2+y^2)^{n-1} - 2p \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{1}{2}(n-1)} (-1)^\lambda (n-1)_{2\lambda} x^{n-2\lambda-1} y^{2\lambda} = - \frac{n^2 - 1}{n^2} ,$$

et 2°) lorsque n est pair

$$p^2 (x^2+y^2)^{n-1} - 2p \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{1}{2}(n-2)} (-1)^\lambda (n-1)_{2\lambda} x^{n-2\lambda-1} y^{2\lambda} = - \frac{n^2 - 1}{n^2} .$$

En coordonnées polaires $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, ces équations prennent respectivement la forme

1°) pour n impair

$$p^2 r^{2(n-1)} - 2p\,r^{n-1} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{1}{2}(n-1)} (-1)^\lambda (n-1)_{2\lambda} \cos^{n-2\lambda-1}\varphi \sin^{2\lambda}\varphi = -\frac{n^2-1}{n^2};$$

2° pour n pair

$$p^2 r^{2(n-1)} - 2p\,r^{n-1} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{1}{2}(n-2)} (-1)^\lambda (n-1)_{2\lambda} \cos^{n-2\lambda-1}\varphi \sin^{2\lambda}\varphi = -\frac{n^2-1}{n^2}.$$

Etant de la forme $Ax^{2m} + Bx^m + C = 0$, ces équations peuvent être résolues par rapport à r.

En tenant compte de l'une ou de l'autre de ces équations, suivant que n est impair ou pair, on obtient la courbe correspondante (ζ) par les équations

$$\begin{cases} \xi = nr\cos\varphi - pr^n\cos n\varphi \\ \eta = nr\sin\varphi - pr^n\sin n\varphi \end{cases}$$

qu'on établit en posant dans (1) $x = re^{i\varphi}$ et en séparant les parties réelles des parties imaginaires.

XIII. (1) $$\zeta = nz + \frac{p}{z^n},$$

où p et n ont la même signification que dans l'exemple précédent.

A l'aide de cette fonction on peut représenter l'extérieur du cercle des unités conformément sur l'extérieur d'une hypocycloïde ordinaire ou allongée suivant que $p = 1$ ou $p < 1$.*)

*) L. c. p. 9.

De (1) on tire

$$\zeta' = n\left(1 - \frac{p}{z^{n+1}}\right), \quad \zeta'_1 = n\left(1 - \frac{p}{z_1{}^{n+1}}\right),$$

et la condition $\zeta'\,\zeta'_1 = 1$ fournit l'équation

$$n^2\left(1 - \frac{p}{z^{n+1}}\right)\left(1 - \frac{p}{z_1{}^{n+1}}\right) = 1$$

ou

$$\frac{n^2 - 1}{n^2}(z\,z_1)^{n+1} - p\,(z^{n+1} + z_1{}^{n+1}) + p^2 = 0\,.$$

Un calcul analogue à celui qui vient d'être fait dans l'exemple précédent, conduit aux équations finales

1°) pour n impair

$$\frac{n^2-1}{n^2}(x^2+y^2)^{n+1} - 2p\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{1}{2}(n+1)}(-1)^\lambda(n+1)_{2\lambda}\,x^{n-2\lambda+1}\,y^{2\lambda} = -p^2\,;$$

2°) pour n pair

$$\frac{n^2-1}{n^2}(x^2+y^2)^{n+1} - 2p\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{1}{2}n}(-1)^\lambda(n+1)_{2\lambda}\,x^{n-2\lambda+1}\,y^{2\lambda} = -p^2\,.$$

En coordonnées polaires $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, elles prennent la forme

1°) pour n impair

$$\frac{n^2-1}{n^2}r^{2(n+1)} - 2p\,r^{n+1}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{1}{2}(n+1)}(-1)^\lambda(n+1)_{2\lambda}\cos^{n-2\lambda+1}\varphi\sin^{2\lambda}\varphi = -p^2,$$

2°) pour n pair

$$\frac{n^2-1}{n^2}r^{2(n+1)} - 2p\,r^{n+1}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{1}{2}n}(-1)^\lambda(n+1)_{2\lambda}\cos^{n-2\lambda+1}\varphi\sin^{2\lambda}\varphi = -p^2.$$

Les points ξ, η de la courbe image (ζ) sont fournis par les équations

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= nr \cos\varphi + \frac{p}{r^n} \cos n\varphi, \\ \eta &= nr \sin\varphi - \frac{p}{r^n} \sin n\varphi, \end{aligned}\right.$$

où les variables r et φ sont reliées entre elles, suivant le cas, par l'une ou l'autre des équations précédentes.

Exemple. Soit $\quad p = 1, \quad n = 1,$

$$\zeta = z + \frac{1}{z} \cdot$$

Directement ou à l'aide des formules précédentes, on trouve que la courbe (z) est une hyperbole équilatère dont l'équation est

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{2},$$

ou en coordonnées polaires $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$$r = \frac{1}{\sqrt{2\cos 2\varphi}}. \qquad \text{(Fig. 9.)}$$

Son élément a pour expression

$$ds = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d\varphi}{(\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

et les quantités ϑ, α, R dont la signification est la même que dans l'exemple X, prennent respectivement la valeur

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - 2\varphi, \quad \text{car } \operatorname{tg} \vartheta = r\,\frac{d\varphi}{dr} = \operatorname{cotg} 2\varphi,$$

$$\alpha = \vartheta + \varphi = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

$$\mathrm{R} = \frac{ds}{d\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{(\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

La courbe (ζ) est donnée par les équations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \xi &= \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi = \left(\frac{1}{\sqrt{2\cos 2\varphi}} + \sqrt{2\cos 2\varphi}\right)\cos\varphi, \\ \eta &= \left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi = \left(\frac{1}{\sqrt{2\cos 2\varphi}} - \sqrt{2\cos 2\varphi}\right)\sin\varphi, \end{aligned}\right.$$

ou par l'équation unique que l'on obtient en éliminant le paramètre φ entre ces deux équations, à savoir

$$2(\xi^2+\eta^2)^2(\xi^2-\eta^2) - 5(\xi^2+\eta^2)^2 - [4(\xi^2-\eta^2)-9]^2 = 0. \quad \text{(Fig. 10)}$$

Elle a deux asymptotes qui font, comme celles de l'hyperbole, les angles $\pm\frac{1}{4}\pi$ avec l'axe positif des ξ, et deux points doubles situés sur l'axe des ξ à la distance $\pm\sqrt{3}$ de l'origine. Les tangentes en ces points font les angles $\pm\frac{1}{3}\pi$ avec l'axe positif des ξ.

Des équations (1) on tire

$$d\xi = \frac{\sin\varphi - 2(\sin 2\varphi\cos 2\varphi\cos\varphi + \sin\varphi\cos^2 2\varphi)}{\sqrt{2}\,(\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\,d\varphi =$$

$$= \frac{\sin\varphi - 2\cos 2\varphi(\sin 2\varphi\cos\varphi + \cos 2\varphi\sin\varphi)}{\sqrt{2}\,(\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\,d\varphi = \frac{\sin\varphi - 2\cos 2\varphi\sin 3\varphi}{\sqrt{2}\,(\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\,d\varphi$$

$$= \frac{\sin\varphi - (\sin 5\varphi + \sin\varphi)}{\sqrt{2}\,(\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\,d\varphi = -\frac{\sin 5\varphi}{\sqrt{2}\,(\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\,d\varphi,$$

$$d\eta = \frac{\cos\varphi - 2(\cos\varphi\cos^2 2\varphi - \sin\varphi\sin 2\varphi\cos 2\varphi)}{\sqrt{2}\,(\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\,d\varphi =$$

$$= \frac{\cos\varphi - 2\cos 2\varphi\,(\cos 2\varphi\cos\varphi - \sin 2\varphi\sin\varphi)}{\sqrt{2}\,(\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\,d\varphi = \frac{\cos\varphi - 2\cos 2\varphi\cos 3\varphi}{\sqrt{2}\,(\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\,d\varphi$$

$$= \frac{\cos\varphi - (\cos 5\varphi + \cos\varphi)}{\sqrt{2}\,(\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\,d\varphi = -\,\frac{\cos 5\varphi}{\sqrt{2}\,(\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\,d\varphi\,.$$

Il s'ensuit que

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{cotg} 5\varphi\,, \quad \beta = \frac{\pi}{2} - 5\varphi\,, \quad d\beta = -5d\varphi\,,$$

$$d\sigma = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{d\varphi}{(\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}}} = ds\,,$$

$$\mathrm{P} = \frac{d\sigma}{d\beta} = -\,\frac{1}{5\sqrt{2}\,(\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Ainsi on reconnaît qu'en deux points correspondants quelconques, le rayon de courbure de la courbe (z) est 5 fois aussi grand que celui de la courbe (ζ).

Les courbes d'égale longueur ne sont que des cas particuliers de courbes dont les longueurs comptées à partir de deux points correspondants jusqu'à deux autres points correspondants quelconques sont dans un rapport constant. Le problème : « Etant donnée une fonction de la variable complexe z

$$\zeta = f(z, a, b, \ldots),$$

trouver deux courbes correspondantes (z) et (ζ) telles que

$\frac{d\sigma}{ds} = m$, où m est une constante réelle », est aussi facile à résoudre que celui des courbes d'égale longueur. En effet, de

$$d\sigma^2 = f'(z, a, b, \ldots) f'(z_1, a_1, b_1, \ldots) ds^2$$

il suit immédiatement

$$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = m^2 = f'(z, a, b, \ldots) f'(z_1, a_1, b_1, \ldots),$$

et, si $\varphi(\zeta, a, b, \ldots)$ est la fonction inverse de $f(z, a, b, \ldots)$, on a également

$$\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2 = \frac{1}{m^2} = \frac{1}{f'(z, a, b, \ldots)} \cdot \frac{1}{f'(z_1, a_1, b_1, \ldots)} =$$
$$= \varphi'(\zeta, a, b, \ldots) \varphi'(\zeta_1, a_1, b_1, \ldots).$$

Ainsi les courbes originales (z) sont déterminées par la relation

$$f'(z, a, b, \ldots) f'(z_1, a_1, b_1, \ldots) = m^2,$$

et les courbes images (ζ) par la relation analogue

$$\varphi'(\zeta, a, b, \ldots) \; \varphi'(\zeta_1, a_1, b_1, \ldots) = \frac{1}{m^2}.$$

Quand on fait varier le paramètre m, les courbes (z) et (ζ) forment, en général, deux familles de courbes distinctes qui cependant peuvent se confondre ; ce sera le cas toutes les fois que l'équation entre z et ζ sera symétrique relativement à ces deux variables.

Il ne sera pas inutile de faire suivre ces considérations de quelques exemples.

I. $$\zeta = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}.$$

Les lettres α, β, γ, δ, A', A'' conservant la même signification que dans l'exemple III, p. 5, le procédé indiqué conduit aux équations suivantes : Pour les courbes (z)

$$\left(x+\frac{\gamma'\delta'+\gamma''\delta''}{\gamma'^2+\gamma''^2}\right)^2+\left(y+\frac{\gamma'\delta''-\gamma''\delta'}{\gamma'^2+\gamma''^2}\right)^2=\frac{1}{m}\,\frac{\sqrt{A'^2+A''^2}}{\gamma'^2+\gamma''^2},$$

et pour les courbes (ζ)

$$\left(\xi-\frac{\alpha'\gamma'+\alpha''\gamma''}{\gamma'^2+\gamma''^2}\right)^2+\left(\eta-\frac{\alpha''\gamma'-\alpha'\gamma''}{\gamma'^2+\gamma''^2}\right)^2=m\,\frac{\sqrt{A'^2+A''^2}}{\gamma'^2+\gamma''^2}.$$

Si m varie d'une courbe à l'autre, ces équations représentent deux systèmes de circonférences concentriques. Une circonférence du second système est m fois aussi longue que la circonférence correspondante du premier système

II. $\qquad \zeta = \log z.\qquad$ (Exemple VII, p. 11).

Les courbes (z) sont les circonférences

$$x^2+y^2=\frac{1}{m^2},$$

les courbes (ζ) les droites

$$\xi=-\log m.$$

Lorsque z décrit une fois et dans le sens positif une de ces circonférences, le point ζ parcourt la droite $\xi=-\log m$ depuis $\eta=0$ jusqu'à $\eta=2\pi$.

III. $\qquad \zeta = \text{arc sin } z.\qquad$ (Exemple VIII, p. 12).

La famille des courbes (z) est donnée par l'équation

$$(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)+\left(1-\frac{1}{m^4}\right)=0,$$

et la famille des courbes (ζ) par l'équation

$$\eta = \pm \log \left[\left(\frac{2}{m^2} - \cos 2\xi \right) + \sqrt{\left(\frac{2}{m^2} - \cos 2\xi \right)^2 - 1} \right].$$

Pour $m = 1$ la courbe (z) est une lemniscate et la forme de la courbe correspondante est connue (fig. 3 et 4).

Lorsque $m < 1$ la courbe (z) est formée d'un seul trait entourant la lemniscate plus ou moins étroitement suivant que m se rapproche plus ou moins de l'unité (fig. 11), et la courbe (ζ) a une forme se rapprochant de celle indiquée dans fig. 12 qui, de même que fig. 11, répond à $m = \sqrt{\frac{9}{10}}$.

Enfin lorsque $m > 1$, la courbe (z) se compose de deux traits fermés, symétriques par rapport à l'axe des y, tandis qu'un ensemble d'une infinité de traits fermés, isolés et tous identiques, constitue la courbe (ζ) ; car on a déjà reconnu que l'ordonnée η est une fonction périodique de l'abscisse ξ.

Les rayons de courbure R et P des courbes (z) et (ζ) ont respectivement pour expression

$$R = \frac{2}{m^2} \frac{r^3}{\left(1 - \frac{1}{m^4}\right) + 3r^4},$$

$$P = -\frac{2}{m} \frac{r^3}{\left(1 - \frac{1}{m^4}\right) + r^4}.$$

IV. $$\zeta = \sqrt{1 - z^2}.$$

Par le procédé habituel on trouve

pour les courbes (z)

$$(1 - m^4)(x^2 + y^2)^2 + 2m^4(x^2 - y^2) - m^4 = 0,$$

pour les courbes (ζ)

$$\left(1-\frac{1}{m^4}\right)(\xi^2+\eta^2)^2+\frac{2}{m^4}(\xi^2-\eta^2)-\frac{1}{m^4}=0,$$

et l'on peut remarquer que la seconde équation s'obtient en remplaçant dans la première x par ξ, y par η, m par $\frac{1}{m}$.

Si donc on se figure les plans (z) et (ζ) confondus, les deux familles de courbes n'en forment qu'une seule. Elles constituent, en quelque sorte, une involution en ce sens que la correspondance entre deux courbes qui répondent à la même valeur de m, est réciproque.

Lorsque l'une des courbes est formée d'un seul trait fermé, la courbe correspondante se compose de deux traits fermés, isolés et symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Dans le cas limite $m=1$, l'hyperbole $x^2-y^2=\frac{1}{2}$ se correspond à elle-même. (Elément double de l'involution.)

V. $$\zeta = 3z - z^3.$$

Les courbes (z) ont pour équation

$$(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)=\frac{m^2}{9}-1,$$

et les courbes (ζ) sont données par

$$(1)\qquad \begin{cases} \xi = 3r\cos\varphi - r^3\cos 3\varphi, \\ \eta = 3r\sin\varphi - r^3\sin 3\varphi. \end{cases}$$

Dans le cas particulièrement intéressant où $m=3$, la courbe (z) devient la lemniscate

$$(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)=0,$$

ou, en coordonnées polaires $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$,

$$(2) \qquad r = \sqrt{2}\sqrt{\cos 2\varphi}. \qquad \text{(fig. 13)}$$

En introduisant cette valeur de r dans les équations (1), il vient

$$\xi = 3\sqrt{2}\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi - 2\sqrt{2}\cos 2\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}\cos 3\varphi =$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{\cos 2\varphi}\,(3\cos\varphi - 2\cos 2\varphi\cos 3\varphi) =$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{\cos 2\varphi}\,(3\cos\varphi - \cos\varphi - \cos 5\varphi)$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{\cos 2\varphi}\,(2\cos\varphi - \cos 5\varphi),$$

$$\eta = 3\sqrt{2}\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi - 2\sqrt{2}\sqrt{\cos 2\varphi}\cos 2\varphi\sin 3\varphi =$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{\cos 2\varphi}\,(3\sin\varphi - 2\cos 2\varphi\sin 3\varphi) =$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{\cos 2\varphi}\,(3\sin\varphi - \sin\varphi - \sin 5\varphi)$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{\cos 2\varphi}\,(2\sin\varphi - \sin 5\varphi),$$

en sorte que l'on a pour la courbe correspondante (ζ) la représentation paramétrique

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \sqrt{2}\sqrt{\cos 2\varphi}\,(2\cos\varphi - \cos 5\varphi), \\ \eta &= \sqrt{2}\sqrt{\cos 2\varphi}\,(2\sin\varphi - \sin 5\varphi). \end{aligned} \right. \qquad \text{(fig. 14)}$$

De (2) on tire

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\sqrt{2}\,\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}},$$

d'où

$$\operatorname{tg} \vartheta = r \frac{d\varphi}{dr} = -\operatorname{cotg} 2\varphi, \quad \vartheta = \frac{\pi}{2} + 2\varphi,$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + 3\varphi, \quad d\alpha = 3d\varphi,$$

et comme on a

$$ds = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi = \frac{\sqrt{2}\, d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}},$$

le rayon de courbure R de la lemniscate a pour expression

$$\mathrm{R} = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Les équations (3) donnent

$$\frac{d\xi}{2} = \left[-\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}(2\cos\varphi - \cos 5\varphi) + \sqrt{\cos 2\varphi}\,(-2\sin\varphi + 5\sin 5\varphi)\right] d\varphi =$$

$$= \frac{-2\sin 2\varphi\cos\varphi + \sin 2\varphi\cos 5\varphi - 2\sin\varphi\cos 2\varphi + 5\cos 2\varphi\sin 5\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\, d\varphi =$$

$$= \frac{-2\sin 3\varphi + \sin 7\varphi + 2(\sin 7\varphi + \sin 3\varphi)}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\, d\varphi = \frac{3\sin 7\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\, d\varphi,$$

$$\frac{\eta}{2} = \left[-\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}(2\sin\varphi - \sin 5\varphi) + \sqrt{\cos 2\varphi}\,(2\cos\varphi - 5\cos 5\varphi)\right] d\varphi =$$

$$= \frac{-2\sin 2\varphi\sin\varphi + \sin 2\varphi\sin 5\varphi + 2\cos 2\varphi\cos\varphi - 5\cos 2\varphi\cos 5\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\, d\varphi =$$

$$= \frac{2\cos 3\varphi - \cos 7\varphi - 2(\cos 7\varphi + \cos 3\varphi)}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\, d\varphi = -\frac{3\cos 7\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\, d\varphi,$$

d'où il suit

$$\left\{\begin{aligned} d\xi &= 3\sqrt{2}\,\frac{\sin 7\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi\,, \\ d\eta &= -3\sqrt{2}\,\frac{\cos 7\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi\,, \end{aligned}\right.$$

$$d\sigma = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2} = 3\sqrt{2}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,,$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{d\eta}{d\xi} = -\operatorname{cotg} 7\varphi\,, \quad \beta = \frac{\pi}{2} + 7\varphi\,, \quad d\beta = 7\,d\varphi\,.$$

Le rayon de courbure P de la courbe (ζ) devient donc

$$\mathrm{P} = \frac{d\sigma}{d\beta} = \frac{3}{7}\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,,$$

et l'on reconnaît qu'en deux points correspondants les rayons de courbure des courbes (ζ) et (z) sont dans le rapport constant $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{R}} = \frac{9}{7}$.

La courbe (ζ) possède trois points doubles, à savoir l'origine et les points $\xi = \pm\, 2{,}702\ldots$, $\eta = 0$ dont l'un correspond à $\varphi = \arcsin\sqrt{\frac{5-\sqrt{13}}{8}}$ (ou $\varphi = 24^0 40' 36'', 62$).

A l'origine les tangentes à la courbe font les angles $\pm\frac{1}{4}\pi$ avec l'axe positif des ξ; aux deux autres points doubles on a $\operatorname{tg}\beta = 7{,}847\ldots$

Nous avons rencontré plusieurs couples de courbes d'égale longueur (ou de longueur proportionnelle) qui, en deux points correspondants, ont des rayons de courbure proportionnels. Ce fait n'est pas général. On peut, en conséquence, demander : Quelle est la condition à laquelle la fonction $\zeta = f(z, a, b, \ldots)$ doit suffire pour qu'il se produise? Il est facile de répondre à cette question.

Si $F(x, y) = 0$ est l'équation d'une courbe, son rayon de courbure a pour expression

$$R = -\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}^{\,3}}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}.$$

Dans le cas actuel où

$$F(x, y) = f'(z, a, b, \ldots) f'(z_1, a_1, b_1, \ldots) - m^2 = 0$$

tse l'équation de la courbe (z), nous poserons, afin de simplifier l'écriture

$$f'(z, a, b, \ldots) = f', \quad f'(z_1, a_1, b_1, \ldots) = f_1',$$

$$f''(z, a, b, \ldots) = f'', \quad f''(z_1, a_1, b_1, \ldots) = f_1'',$$

etc.

Alors il vient

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f' f_1'' + f_1' f'', \quad \frac{\partial F}{\partial y} = i(f'' f_1' - f' f_1''),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = f''' f_1' + 2 f'' f_1'' + f' f_1''', \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = i(f''' f_1' - f' f_1'''),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -(f''' f_1' - 2 f'' f_1'' + f' f_1'''),$$

de sorte que

$$R = 2\frac{\sqrt{f' f_1'}\,\sqrt{f'' f_1''}^{\,3}}{f''^2(f_1' f_1''' - f_1''^2) + f_1''^2(f' f''' - f''^2)}.$$

Le rayon de courbure P de la courbe correspondante (ζ) s'obtient par la même formule. Il devient, si l'on désigne la fonction inverse de ζ par $\varphi(\zeta, a, b, \ldots)$ et qu'à l'égard de la fonction φ on adopte des notations abrégées analogues aux précédentes, à savoir $\varphi'(\zeta, a, b, \ldots) = \varphi'$, $\varphi'(\zeta_1, a_1, b_1, \ldots) = \varphi_1'$, etc.

$$(1) \qquad \mathrm{P} = 2\, \frac{\sqrt{\varphi' \varphi_1'}\, \sqrt{\varphi'' \varphi_1''}^{\,3}}{\varphi''^2 (\varphi_1' \varphi_1''' - \varphi_1''^2) + \varphi_1''^2 (\varphi' \varphi''' - \varphi''^2)} \,.$$

Or on sait que

$$\varphi' = \frac{1}{f'}, \quad \varphi'' = -\frac{f''}{f'^3}, \quad \varphi''' = \frac{3 f''^2 - f' f'''}{f'^5},$$

et de même

$$\varphi_1' = \frac{1}{f_1'}, \quad \varphi_1'' = -\frac{f_1''}{f_1'^3}, \quad \varphi_1''' = \frac{3 f_1''^2 - f_1' f_1'''}{f_1'^5}.$$

En introduisant ces valeurs dans (1), on obtient

$$\mathrm{P} = 2 f' f_1' \frac{\sqrt{f'' f_1''}^{\,3}}{f''^2 (2 f_1''^2 - f_1' f_1''') + f_1''^2 (2 f''^2 - f' f''')} \,.$$

Pour que le quotient $\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{P}}$ soit constant et $= n$, où n est un nombre réel positif ou négatif, on doit avoir, en tenant compte de l'égalité $\sqrt{f' f'_1} = m$,

$$\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{P}} = \frac{f''^2 (2 f_1''^2 - f_1' f_1''') + f_1''^2 (2 f''^2 - f' f''')}{f''^2 (f_1' f_1''' - f_1''^2) + f_1''^2 (f' f''' - f''^2)} = mn.$$

De cette équation on tire successivement, afin de donner à la condition cherchée la forme la plus simple possible

$$\frac{f''^2(f_1''^2 - f_1' f_1''') + f_1''^2(f''^2 - f' f''') + 2f''^2 f_1''^2}{f''^2(f_1' f_1''' - f_1''^2) + f_1''^2(f' f''' - f''^2)} = mn =$$

$$= -1 + \frac{2f''^2 f_1''^2}{f''^2(f_1' f_1''' - f_1''^2) + f_1''^2(f' f''' - f''^2)},$$

$$\frac{f''^2 f_1''^2}{f''^2(f_1' f_1''' - f_1''^2) + f_1''^2(f' f''' - f''^2)} = \frac{mn+1}{2},$$

$$\frac{f''^2(f_1' f_1''' - f_1''^2) + f_1''^2(f' f''' - f''^2)}{f''^2 f_1''^2} = \frac{2}{mn+1},$$

$$\frac{f_1''^2 - f_1' f_1'''}{f_1''^2} + \frac{f''^2 - f' f'''}{f''^2} = -\frac{2}{mn+1},$$

$$\frac{d}{dz_1}\left(\frac{f_1'}{f_1''}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{f'}{f''}\right) = -\frac{2}{mn+1}.$$

Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que le fait mentionné plus haut arrive, est

$$(2) \qquad \frac{d}{dz}\left(\frac{f'}{f''}\right) + \frac{d}{dz_1}\left(\frac{f_1'}{f_1''}\right) = \text{const.}$$

En d'autres termes, il faut qu'en vertu de l'équation de la courbe (z)

$$f' f_1' = m^2$$

le premier membre de l'équation (2) se réduise à une constante.

Le problème inverse : Etant donnée une courbe (z), déterminer la fonction $\zeta = f(z)$ et la courbe (ζ) de telle façon que les deux courbes soient d'égale longueur, offre évidemment beaucoup plus de difficulté que celui qui vient d'être traité. D'ailleurs on reconnaît aisément que si l'on sait trouver une solution, on pourra en indiquer un nombre illimité, car la solution dépend en dernier lieu d'une quadrature. Toute la difficulté consiste à mettre l'équation de la courbe donnée sous la forme $\psi(z) \,.\, \psi(z_1) = 1$ (ou, quand il s'agit de deux courbes dont la longueur de l'une est un multiple donné de celle de l'autre, $\psi(z)\,\psi(z_1) = m^2$). Une fois cette forme obtenue, il suffira de poser $f'(z) = \psi(z)$, d'où il suit immédiatement

$$\zeta - \zeta_0 = \int \psi(z)\, dz\,.$$

Nous choisissons comme exemples deux courbes que nous avons rencontrées déjà plusieurs fois, à savoir la lemniscate et l'hyperbole équilatère. Le procédé indiqué s'y applique sans la moindre difficulté.

Exemple 1. *La lemniscate.*

$$(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0\,.$$

Cette équation peut se mettre sous les formes différentes

$$z^2 z_1^2 - (z^2 + z_1^2) = 0,$$

$$z^2 z_1^2 - (z^2 + z_1^2) + 1 = 1,$$

$$(z^2 - 1)(z_1^2 - 1) = 1\,.$$

On peut donc poser

1°) $f'(z) = 1 - z^2$, d'où $\zeta - \zeta_0 = \frac{1}{3}(3z - z^3)$;

2°) $f'(z) = \sqrt{1 - z^2}$, » $\zeta - \zeta_0 = \frac{1}{2}\left(z\sqrt{1-z^2} + \arcsin z\right)$;

3°) $f'(z) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$, » $\zeta - \zeta_0 = \arcsin z$;

4°) $f'(z) = \dfrac{1}{1-z^2}$, d'où $\zeta - \zeta_0 = \dfrac{1}{2} \log \dfrac{1+z}{1-z}$;

5°) $f'(z) = (1-z^2)^2$, » $\zeta - \zeta_0 = z - \dfrac{2}{3} z^3 + \dfrac{1}{5} z^5$;

6°) $f'(z) = \sqrt[4]{1-z^2}$, » $\zeta - \zeta_0 = \int \sqrt[4]{1-z^2}\, dz$;

7°) $f'(z) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{1-z^2}}$, » $\zeta - \zeta_0 = \int \dfrac{dz}{\sqrt[4]{1-z^2}}$;

etc.

Exemple 2. Hyperbole équilatère.

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{2}.$$

En mettant cette équation successivement sous les formes

$$z^2 + z_1^2 = 1,$$

$$\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z_1^2} = \frac{1}{z^2 z_1^2},$$

$$1 - \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z_1^2}\right) = 1 - \frac{1}{z^2 z_1^2},$$

$$\frac{1}{z^2 z_1^2} - \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z_1^2}\right) + 1 = 1,$$

il vient finalement

$$\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)\left(1 - \frac{1}{z_1^2}\right) = 1.$$

Cette dernière forme permet de poser

$$1^0 f'(z) = 1 - \frac{1}{z^2}, \quad \text{d'où } \zeta - \zeta_0 = z + \frac{1}{z};$$

$$2^0) \; f'(z) = \sqrt{1 - \frac{1}{z^2}}, \quad \text{»} \quad \zeta - \zeta_0 = \sqrt{z^2 - 1} + \text{arc coséc } z;$$

$$3^0) \; f'(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{z^2}} = 1 - \frac{1}{1 - z^2}, \text{ d'où } \zeta - \zeta_0 = z - \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z};$$

$$4^0) \; f'(z) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{z^2} - 1}} = \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}}, \quad \text{»} \quad \zeta - \zeta_0 = \sqrt{1 - z^2};$$

$$5^0) \; f'(z) = \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{1}{z^2} - 1}} = \sqrt[4]{\frac{z^2}{1 - z^2}}, \text{ d'où } \zeta - \zeta_0 = \int \sqrt[4]{\frac{z^2}{1 - z^2}}\, dz;$$

etc.

fig: 1.

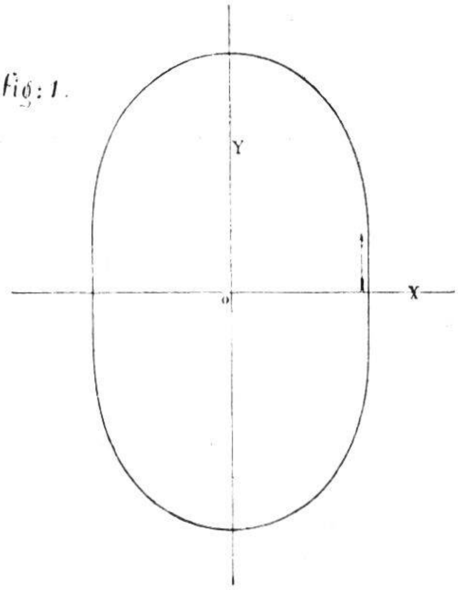

fig: 2

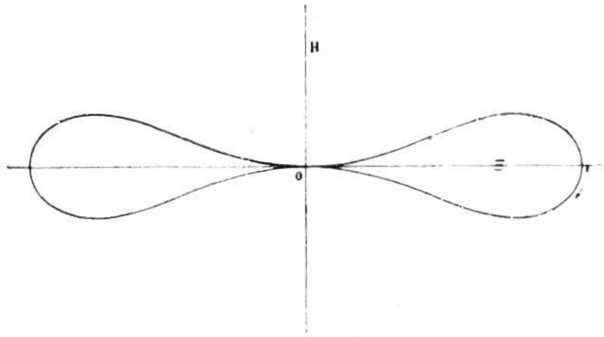

fig. 3

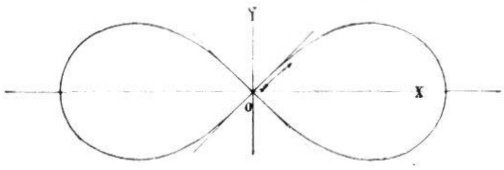

fig. 4

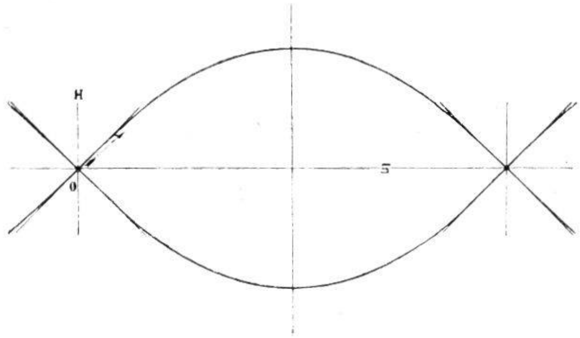

fig: 5.

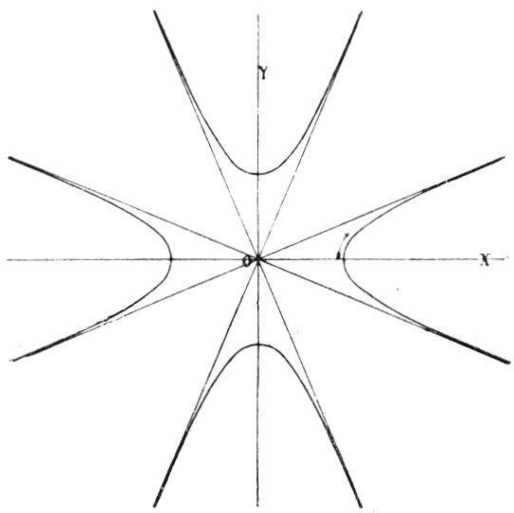

fig: 6

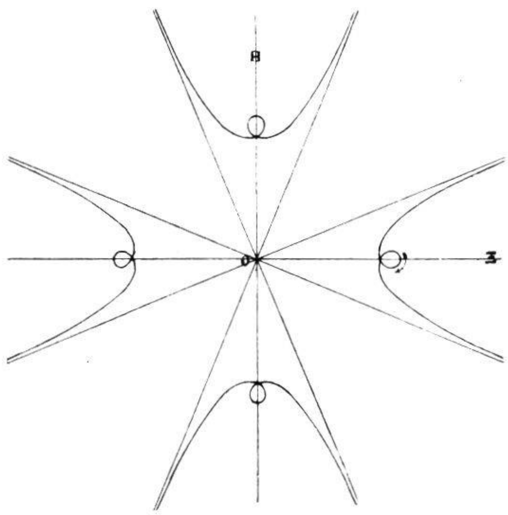

fig: 7

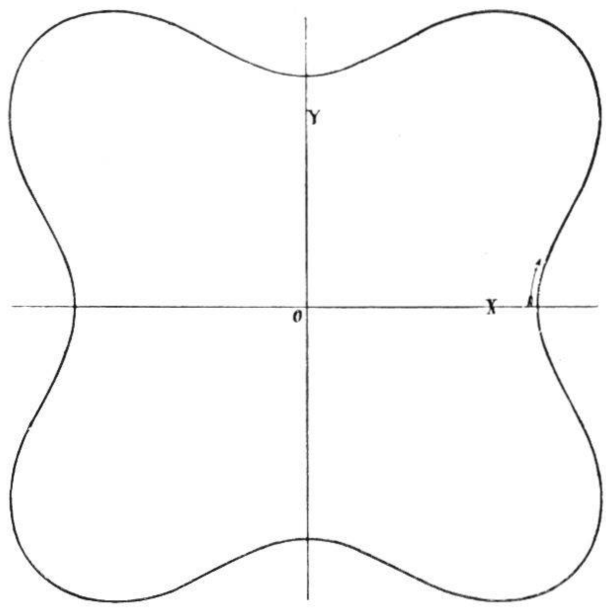

fig: 8

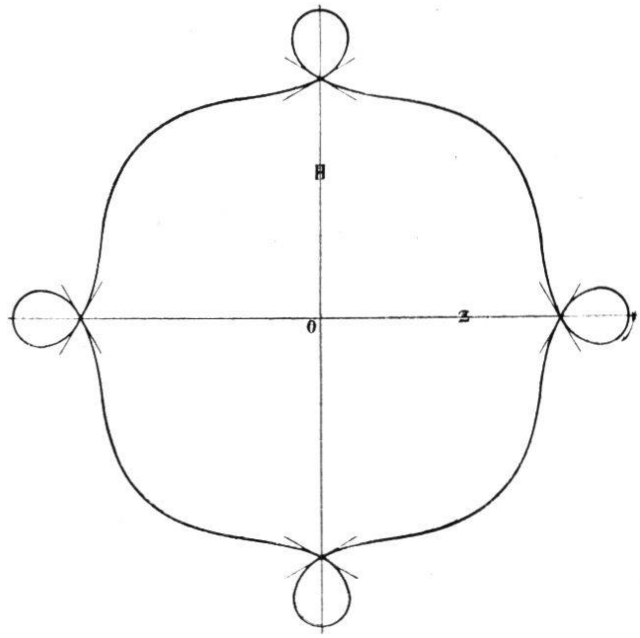

fig: 9

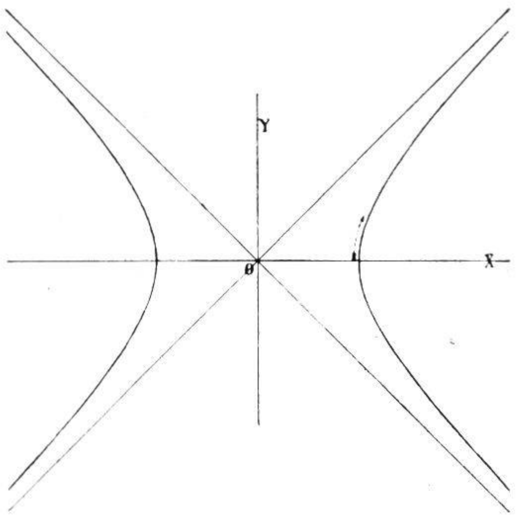

fig: 10.

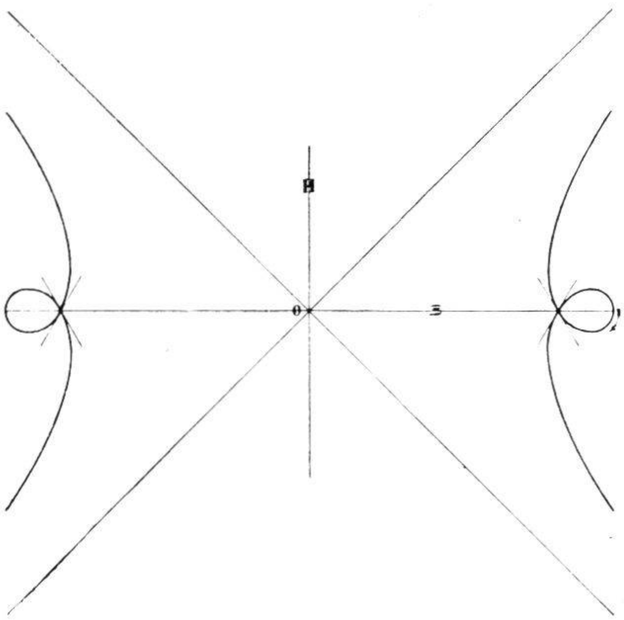

fig: 11.

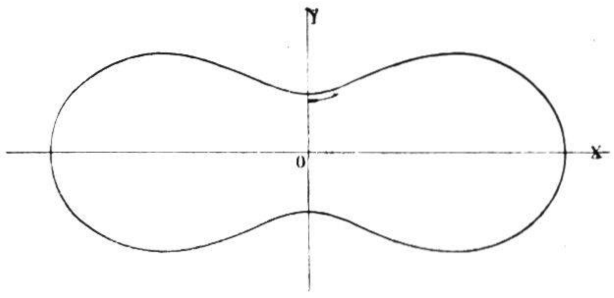

fig: 12.

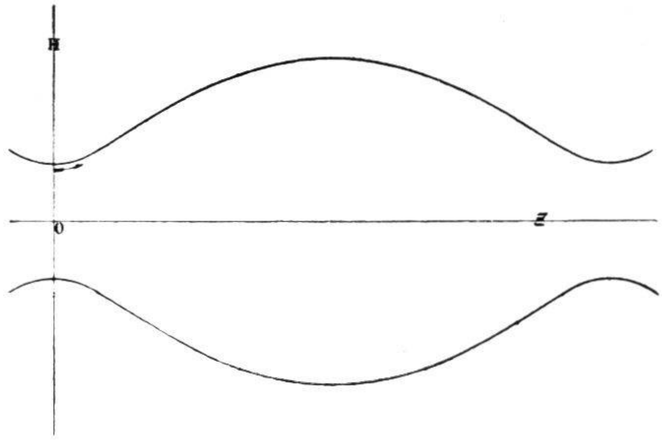

fig: 13

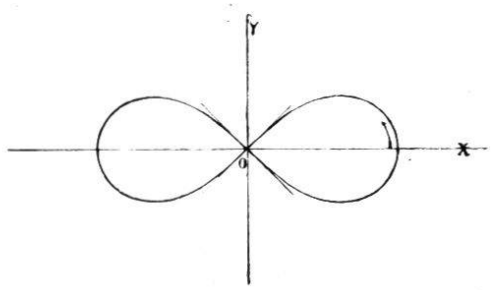

fig: 14