De la transformation des lignes planes par réflexion sur un miroir conique

DE LA

TRANSFORMATION DES LIGNES PLANES

PAR RÉFLEXION SUR UN MIROIR CONIQUE

PAR

M. LE PROFESSEUR TERRIER

Soit donné un miroir ayant la forme d'un cône de révolution; supposons l'œil placé à une hauteur donnée H au-dessus du sommet, proposons-nous de déterminer quelles lignes il faut tracer dans le plan de la base pour apercevoir dans le miroir une image donnée, et inversement, quelle sera l'image produite par des lignes données.

—

Soient R le rayon de base du cône, θ le demi-angle au sommet, $\varphi(\rho,\omega)=0$ l'équation de l'image demandée, en coordonnées polaires, le centre O du cercle de base du cône étant pris pour pôle et une ligne passant par ce point pour axe polaire.

Désignons par M un point quelconque de l'image, par N le point correspondant de la ligne demandée : la ligne OM passe par N, soit B le point où elle coupe le cercle de base. Soient enfin S le sommet du cône, A la position de l'œil, D le point où le rayon visuel AM rencontre le cône, δ l'angle ADS.

La ligne DB est bissectrice de l'angle D du triangle MDN;

comme $MB = R - \rho$, $BN = \rho' - R$; ρ et ρ' étant les rayons vecteurs des deux points correspondants, on en déduit :

$$\frac{R-\rho}{\rho'-R} = \frac{\frac{BM}{\sin\delta}}{\frac{BN}{\sin\delta}} = \frac{\cos(2\theta - A)}{\cos A}$$

par suite de la proportionnalité des côtés aux sinus des angles opposés dans les triangles BDM et BDN, et de la relation $\delta = \theta - A$.

On a d'ailleurs

$$\operatorname{tg} A = \frac{\rho}{H}$$

par suite

$$\frac{R-\rho}{\rho'-R} = \cos 2\theta + \frac{\rho}{H}\sin 2\theta$$

et

$$\rho = H\,\frac{R + (R-\rho')\cos 2\theta}{H + (\rho'-R)\sin 2\theta}$$

En remplaçant ρ par sa valeur dans l'équation $\varphi(\rho,\omega) = o$, on obtient l'équation polaire de la ligne demandée.

De même on obtient la solution de la question inverse.

—

Cas particulier.

Si $\theta = 45$, la valeur de ρ se réduit à

$$\frac{RH}{\rho' + H - R}$$

et l'on a

$$\rho' = \frac{HR}{\rho} - (H - R)$$

Cherchons la ligne dont l'image est une portion de ligne droite, à distance d du centre du cercle de base. Son équation est

$$\rho = \frac{d}{\cos\omega}$$

d'où résulte pour la ligne cherchée l'équation

$$\rho' = \frac{HR}{d} \cos \omega - (H - R)$$

équation d'une conchoïde de cercle dont un arc seulement répond à la question.

Secondement, cherchons la ligne dont l'image est une circonférence décrite sur un des rayons du cercle de base comme diamètre.

Equation de la circonférence :

$$\rho = R \cos \omega$$

d'où résulte pour la ligne cherchée l'équation

$$\rho' = \frac{H}{\cos \omega} - (H - R)$$

équation d'une conchoïde de droite.