

**Zeitschrift:** IABSE reports of the working commissions = Rapports des commissions de travail AIPC = IVBH Berichte der Arbeitskommissionen  
**Band:** 18 (1974)  
**Artikel:** Zur Ausgangssituation bei der Beurteilung der Bauwerkssicherheit  
**Autor:** Siebke, H.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-16945>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 08.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## **Zur Ausgangssituation bei der Beurteilung der Bauwerkssicherheit**

On the Starting Points in the Evaluation of the Safety of Structures

De la situation de départ dans l'évaluation de la sécurité des structures

**H. SIEBKE**

Dr.-Ing.

Ministerialrat

Hauptverwaltung der Deutschen Bundesbahn

Frankfurt am Main, BRD

### 1. Soziologische und ökonomische Aspekte

Sicherheit ist ein mit Gefühlswerten beladener Begriff. Besonders im Bauwesen erwartet die Öffentlichkeit seit alters her ein hohes Maß an Sicherheit. Dies weisen schon die Gesetze des Hammurabi oder die Rechtsvorstellungen des Sachspiegels aus. Es ist Aufgabe der Soziologie zu untersuchen, warum die Gesellschaft im Bauwesen eine größere Sicherheit als etwa im Straßenverkehr voraussetzt. Mit ein Grund dürfte es sein, daß von dem Versagen eines Bauwerkes viele, meist unbeteiligte Menschen betroffen oder zumindest bedroht werden, während der wirtschaftliche Vorteil beim risikoreichen Bauen nur dem Bauherrn oder dem Bauunternehmer zugute kommt. Ganz anders z. B. im Verkehr. Hier glaubt jeder vom schnellen Fahren unmittelbaren Nutzen zu haben und ist bereit, ein hohes Risiko einzugehen. Hinzu kommt, daß in vielen Fällen des Bauwesens zur Erhöhung der Sicherheit von jenem Grenzwert, der ein nahezu zwangsläufiges Zusammenbrechen gerade noch vermeidet, bis zu jenem Wert, der die gewohnte Standfestigkeit garantiert, gemessen an den Gesamtkosten, nur ein geringer Betrag aufzuwenden ist. Oft sind nur einige Bewehrungsseisen zusätzlich einzulegen, deren Kosten in der Streuung der Angebotspreise des Bauwerkes untergehen. Erst bei extremen Bauaufgaben, wie bei weitgespannten Brücken oder Superhochhäusern gewinnen Sicherheitsbetrachtungen ökonomischen Einfluß. Dann können sie womöglich über die Ausführbarkeit einer Konstruktion entscheiden. Dieser Fall ist besonders deutlich im Flugzeugbau gegeben. Hier würde womöglich eine "Verstärkung" im landläufigen Sinne zu einer Herabsetzung der Gesamtsicherheit führen, wenn eine unzulässige Gewichtserhöhung damit verbunden wäre. Es ist daher zu verstehen, wenn Sicherheitstheorien auf wahrscheinlichkeitstheoretischer Grundlage vom Flugzeugbau ausgingen. Andererseits können kleine Gewinne auch dann zu Buch schlagen, wenn die gleichen Bauteile in großen Mengen ausgeführt werden. Dies ist etwa bei Hochspannungsmasten der Fall, die besonders dann, wenn sie durch schwachbesiedelte Gebiete führen, so daß ein Versagen keine Menschen gefährden, nach versa-

genswahrscheinlichen Grundsätzen konzipiert werden können, bei denen der Schaden durch eine Stromunterbrechung, der Aufwand für die Wiederherstellung und die Kosten des Mastes gegeneinander abzuwägen sind.

Letztlich sind die moralischen Hemmungen zu bedenken, die entstehen, wenn der Wert eines Menschenlebens in die Standsicherheitsberechnung eines Bauwerkes eingehen soll.

Die Widerstände, die sich hier auftun, sind nicht zu unterschätzen, auch wenn mit jeder Lohn- und Gehaltsrechnung, mit Renten- und Versicherungskalkulation Werte des Menschen schon heute beziffert werden. Es wird von den Gesellschaftssystemen und -strukturen abhängen, wie weit die Theorien getrieben werden dürfen. Manipuliertes Objekt aber darf der Mensch auch in der Bauwerksberechnung nicht werden.

Es ist zusammenzufassen:

- a) im Bauwesen wird von der Öffentlichkeit ein hohes Maß an Sicherheit erwartet.
- b) Die Kostenfunktion, aufgetragen über der Sicherheit, hat im Bauwesen meist ein sehr breit verlaufendes Minimum.
- c) Der bezifferte Wert des Menschen hat in einer Standfestigkeitsberechnung keinen Platz.

## 2. Juristische Probleme

Es ist noch ein weiterer "nichttechnischer" Aspekt zu beachten, der sich an die vorangegangene Betrachtung anschließt.

Unsere Rechtsvorstellungen gehen von der Annahme des Determiniertseins allen Geschehens aus. Unter dieser Annahme wird geurteilt, ob bei einem bestimmten Handeln Schuld oder Unschuld vorliegt. Dabei kann die Kausalkette immer nur um einige Glieder zurück und die Verantwortung der hier Angetroffenen geprüft werden. "Den letzten beißen die Hunde" lautet sprichwörtlich diese Erfahrung. Das Recht und die Rechtsprechung hat bisher noch keinen Maßstab für die Crenzwahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ereignisses, der Schuld und Unschuld trennt. Es ist z. B. keine zu fordernde Versagenswahrscheinlichkeit für eine Fahrzeugachse à priori anzugeben, die zu fordern ist, um dem Sicherheitsinteresse der Öffentlichkeit gerecht zu werden. Die Versagenswahrscheinlichkeit einer Straßenkreuzung als geplanten, berechneten und ausgeführten Bestandteil eines Verkehrsnetzes, die Versagenswahrscheinlichkeit eines Haushaltsplanes als Instrument staatlichen Funktionierens sind dem Recht noch nicht in den Blick gekommen, und werden noch nicht mit justitiablen Handeln verbunden, obgleich ein Gelingen oder Versagen für die Öffentlichkeit mehr Bedeutung haben kann als ein Bankraub.

Dabei ist der Wahrscheinlichkeitsbegriff, der Rechtssprechung nicht fremd: "mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit" ist eine übliche Formulierung. Schwierig wird es erst, wenn diese Wahrscheinlichkeit beziffert ist. Wie wird ein Richter urteilen, wenn in einer Standsicherheitsberechnung geschrieben steht: "die Versagenswahrscheinlichkeit ist so und so groß" und das Bauwerk stürzt tatsächlich ein. Es wird intensiver Aufklärung bedürfen, bis bei allen Beteiligten eine bezifferte Versagenswahrscheinlichkeit als Regel der Technik und nicht als Vorsatz anerkannt wird.

Es ist zusammenzufassen:

- a) Die Umstellung auf statistische oder wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungsweisen im gesellschaftspolitischen wie rechtlichen Bereich stellt letztlich auch die Frage nach menschlicher Verantwortung und ist damit sehr tiefgreifend.
- b) Es ist sicher möglich, Juristen mit dem Wesen der Versagenswahrscheinlichkeit vertraut zu machen und den Begriff damit in der Rechtsprechung abzustecken. Es bedarf dazu aber einer Aufklärung, die weit über den Kreis der Ingenieure und Juristen hinausreichen muß, um verständlich zu bleiben.

### 3. Aufgaben im technisch wissenschaftlichen Bereich

Bis zu den aufgezeigten Aufgaben ist noch ein weiter Weg, da vorerst die Ingenieure selbst mit den angesprochenen Problemen vertraut zu machen sind. Dabei führt weder eine gefühlsbeladene Reserviertheit noch Euphorie weiter. Der Grund vieler immer wieder laut werdender Zwistigkeiten liegt in einem Aneinandervorbeireden. Es kommt im technisch wissenschaftlichen Bereich daher vor allem darauf an, eine Klärung der Begriffe und deren eindeutige Definition herbeizuführen.

Ein weiterer Grund für die Verwirrung ist die Vielzahl von Beiträgen, Berichten und Arbeiten zu dem Sicherheitsproblem, von denen nicht immer auf den ersten Blick zu erkennen ist, welches Teilproblem angesprochen wird, welches die Grundlagen, welches die Voraussetzungen sind, wie weit eine exakte Theorie verfolgt, wo abgebrochen und eine Näherung angeboten wird. Hier wäre es eine dankbare Aufgabe, zunächst einmal die gegenseitigen Abgrenzungen im Problemfeld zu kartieren, um auch dem weniger Vertrauten eine Orientierung zu ermöglichen.

Eine gewisse Vereinheitlichung der Begriffe, Nomenklatur und Formelzeichen ist erwünscht, zumal die Arbeiten in allen Teilen der Welt vorangetrieben werden, wodurch die Kommunikation erschwert ist.

Es stellen sich mithin die vordringlichen Aufgaben:

- a) In den Begriffsfeldern um die Sicherheit und die Versagenswahrscheinlichkeit sind klare, möglichst international einheitliche Begriffe zu erarbeiten und zu definieren. Dabei wären die kennzeichnenden Eigenschaften und die Beziehungen zu den bestehenden und vertrauten Begriffen kritisch herauszustellen.
- b) Es ist eine "Kartierung" der bisher erschlossenen Bereiche der Sicherheitstheorie zu versuchen.

### 4. Definition einiger Begriffe und Bemerkungen zur Methode

Bevor zu diesen Aufgaben eigene Auffassungen darzustellen sind, müssen einige Bemerkungen zur Methode und ein paar Begriffsbestimmungen eingeschoben werden. Es ist heute nicht mehr zu bezweifeln, daß sich eine Sicherheitstheorie mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung auseinandersetzen muß. Nicht selbstverständlich ist damit schon, daß mit "Wahrscheinlichkeitsrechnung" immer das gleiche ge-

meint wird. Die Methodik der Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen findet erst langsam Eingang in das Ingenieurwesen. Hier sind zur Begriffsklärung einige Bemerkungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie an den Anfang gestellt.

- a) Es soll zwischen Wahrscheinlichkeitsproblemen und stochastischen Problemen unterschieden werden. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat es mit zufälligen Ereignissen zu tun, während es sich bei stochastischen Prozessen um zufällige Funktionen handelt. Thema dieser Ausführungen ist es unter anderem, die Frage zu stellen, ob das Sicherheitsproblem mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen erschöpfend behandelt werden könne, oder ob hierzu schon die Mathematik stochastischer Prozesse nötig sei.
- b) Die Verteilung zufälliger Veränderlicher soll durch die Verteilungsfunktion  $F(x)$  und durch ihre Dichte  $f(x)$  gekennzeichnet werden. Es wird hier der Bezeichnungsweise von Fisz (1) gefolgt (Bild 1).

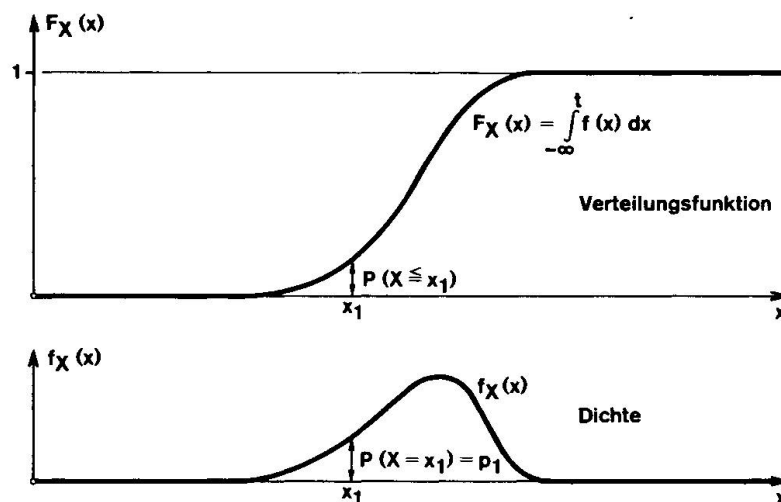


Bild 1

- c) Bei vielen Betrachtungen im Rahmen der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird von Gaußverteilungen ausgegangen. Damit besteht die Gefahr, daß wichtige Zusammenhänge vorzeitig vereinfacht werden. Ob diese vereinfachenden Annahmen zulässig sind, müßte in jedem Fall geprüft werden. Um nicht der Gefahr zu erliegen, stillschweigend Voraussetzungen zu unterstellen, die womöglich nicht erfüllt sind, sollen hier die grundsätzlichen Zusammenhänge vorwiegend mit Rechteck- oder Dreiecksverteilungen untersucht werden.
- d) Eine wichtige Frage wird die Behandlung mehrdimensionaler zufälliger Veränderlicher sein. Schon die Behandlung zweidimensionaler Probleme, die dann auf weitere Dimensionen ausgedehnt werden könnten, werden in der Literatur selten behandelt. Hier soll diesen Fragen besondere Aufmerksamkeit gewidmet werden. Dabei stellt sich sofort die Frage, ob von zwei zufälligen Veränderlichen mit Recht gegenseitige Unabhängigkeit angenommen werden darf, oder ob eine Abhängigkeit vorliegt. Die Prüfung ist einfach, wenn die zwei- oder mehrdimensionale Dichte aus Messungen vorliegt. Dann muß sich die gemessene Dichte aus den Randverteilungen wieder zurückrechnen lassen. Es bleibt aber ein Problem,

bei festgestellter Abhängigkeit das Abhängigkeitsmaß zu bestimmen. Es bedeutet eine in bestimmten Fällen nicht zulässige Festlegung von Voraussetzungen, wenn ohne weitere Prüfung der Korrelationskoeffizient als Abhängigkeitsmaß gewählt wird, da hier Gauß- oder gaußähnliche Randverteilungen vorausgesetzt werden.

##### 5. Aussagen der Versagenswahrscheinlichkeit und des Sicherheitsbeiwertes

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, ob ein Zusammenhang zwischen dem klassischen Begriff des "Sicherheitsbeiwertes" einer Bauwerksbemessung und der neueren Auffassung der "Versagenswahrscheinlichkeit", wie sie in zahlreichen Veröffentlichungen behandelt wird, besteht. Er ist als Beitrag aufzufassen, die oft erhitzte Diskussion um die Probleme der Bauwerkssicherheit ein wenig aus dem Bereich des Emotionellen heraus zu einer sachgemäßen Auseinandersetzung zu führen. Es wäre aber ein Mißverständnis, wenn die hier erörterten ungelösten Fragen, Schwierigkeiten und Probleme zur Abwehr neuartiger Betrachtungsmöglichkeiten genutzt würden. Dem klassischen Verfahren haftet gleichviel, wenn nicht mehr Problematik an, die hier nur nicht erörtert zu werden braucht, da sie als bekannt vorausgesetzt werden darf.

Hat man für ein Bauwerk oder eine Bauwerksart ein Kriterium für das Versagen unter der Beanspruchung aus bestimmten Lasten oder Lastkombinationen gefunden und ist es möglich, die Beanspruchung des Bauwerkes in einem Maß zu messen, so kann man der effektiven Grenzbeanspruchung  $R$ , bei der ein Versagen des vorhandenen oder zu erstellenden Bauwerkes gerade eintritt oder gerade noch vermieden wird, eine Zahl zwischen 0 und 1 derart als Wahrscheinlichkeit für ihr Auftreten zuordnen, daß die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Grenzbeanspruchungen, die bei gleichen Bauwerken unter gleichen Herstellungsbedingungen möglich sind, gleich "1" ist. Es bereitet also keine Schwierigkeiten, die Grenzbeanspruchung eines Bauwerkes im Sinne der Kolmogoroff'schen Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffes als zufällige Veränderliche aufzufassen, für die dann in einem "Beanspruchungsmaßstab" die Dichte und Verteilungsfunktion einschließlich aller Parameter darzustellen ist (Bild 2).

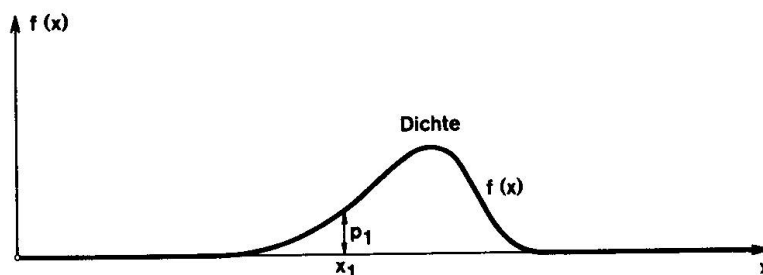


Bild 2

Nicht ganz so eindeutig ist es, der Beanspruchung aus einer Lastwirkung  $S$  eine Wahrscheinlichkeit zuzuordnen, da die Lastwirkungen Funktionen der Zeit sind, bei denen es nicht ohne weiteres möglich ist, das zufällige Ereignis  $s$  abzugrenzen. Außerdem bedarf es bestimmter Definitionen, um die Menge aller möglichen Lastwirkungen zu bestimmen, deren Summe der Wahrscheinlichkeiten ihres Auftre-

tens die Größe "1" zuzuordnen ist. Diesen Schwierigkeiten soll noch nachgegangen werden, vorerst wird angenommen, daß die Lastwirkungen im Bauwerk als zufällige Ereignisse aufgefaßt werden können und im gleichen Maß wie die Grenzbeanspruchung durch die Dichte oder Verteilungsfunktion darzustellen sind (Bild 3).

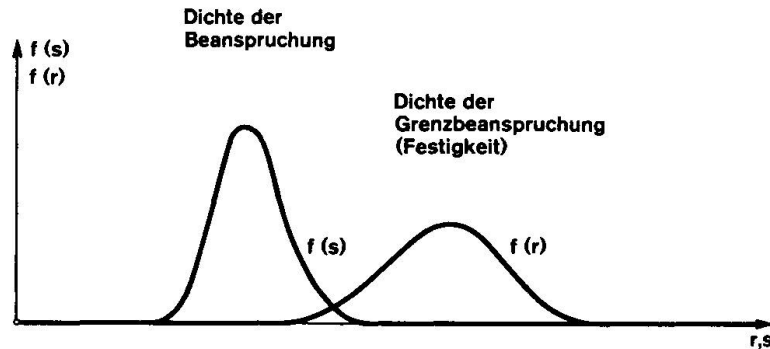


Bild 3

Auf eine in der älteren Literatur unexakte Betrachtungsweise soll hier hingewiesen werden. Die Darstellung (Bild 3) erlaubt mit einem Blick zu erkennen, ob eine Versagenswahrscheinlichkeit gegeben ist oder nicht. Sie liegt vor, wenn es Abschnitte gibt, in denen  $r$  und  $s$  gleichzeitig möglich sind, das heißt, wenn die Dichtefunktionen sich überschneiden. Bei dem Vergleich einfacher Fälle ist es auch anhand der Darstellung möglich anzugeben, in welchem Fall die größere Versagenswahrscheinlichkeit gegeben ist. Es darf aber nicht der Eindruck suggeriert werden, die von den beiden Dichtefunktionen abgegrenzte Fläche sei ein Maßstab für die Versagenswahrscheinlichkeit selbst.

Die Versagenswahrscheinlichkeit  $p_f$  bestimmt sich als Funktion  $T_1 = R - S$  der unabhängigen zufälligen Veränderlichen  $R$  und  $S$  für den Wert  $t_1 = 0$  zu

$$p_f = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t_1) \cdot F_2(t_1) dt_1$$

und kann als "Kopplungsintegral" einer Verteilungs- und Dichtefunktion aufgefaßt und dargestellt werden (Bild 4).

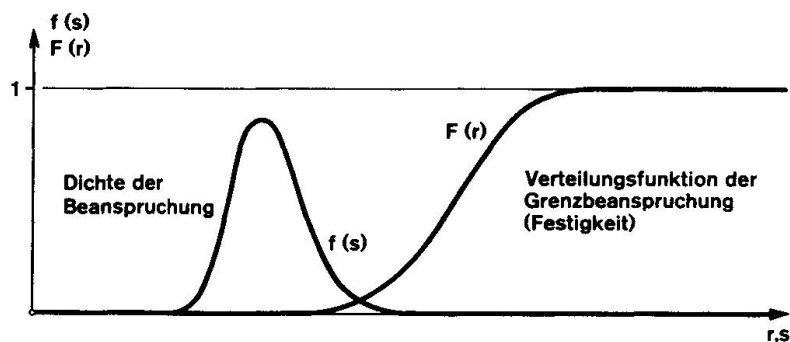


Bild 4

Die Bezifferung der Versagenswahrscheinlichkeit unter bestimmten Lasteinwirkungen wirft sofort die Frage nach der Verlässlichkeit dieser Aussage auf. Damit ist nicht die Ungewißheit gegenüber dem Einzelfall gemeint, wie sie für eine Wahrscheinlichkeitsangabe evident ist, sondern die Frage nach der Genauigkeit des Zahlenwertes

der angegebenen Wahrscheinlichkeit, die z. B. eine Rolle spielt, wenn zwei Fälle miteinander verglichen werden sollen. Selbstredend muß in der Ingenieurpraxis zunächst von Annahmen und Voraussetzungen ausgegangen werden, die ihrerseits Unsicherheiten in sich bergen. Die Frage nach der Verlässlichkeit wäre leichter zu beantworten, wenn zu dem Wert der Versagenswahrscheinlichkeit das totale Differential nach allen angenommenen Parametern mit angegeben würde. Dies ist sicher nicht möglich, aber schon eine Darstellung des funktionalen Zusammenhanges  $F(t_1)$  über alle Werte von  $t_1$  und nicht nur die Angabe des Funktionswertes  $F(t_1)$  für  $t_1 = 0$  als Verteilungsfunktion deckt gewisse Gesetzmäßigkeiten auf (Bild 5). Diese Vertei-

### Verteilungsfunktion $F(t_1)$ und Versagenswahrscheinlichkeit $p_f$

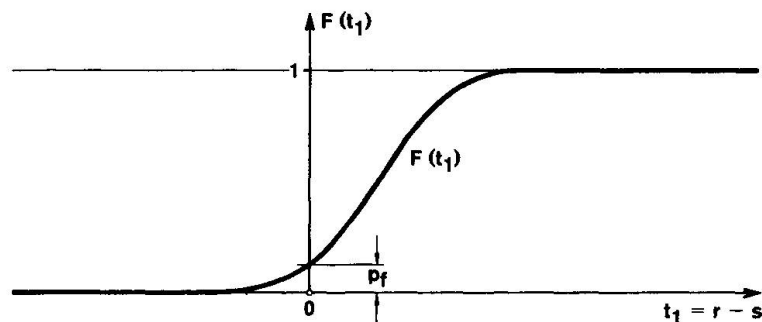


Bild 5

lungsfunktion  $F(t_1)$  kann in der oben angegebenen Weise ermittelt werden, indem die Werte  $F(t_1)$  stetig für  $-\infty \leq t_1 \leq +\infty$  bestimmt werden. Sehr viel anschaulicher ist  $F(t_1)$  zu gewinnen, wenn  $R$  und  $S$  als eine zweidimensionale zufällige Veränderliche  $(R, S)$  aufgefaßt wird (Bild 6.1 und 6.2). Es darf Unabhängigkeit vorausgesetzt

### Grundriß einer zweidimensionalen Dichte $f(s, r)$ mit den gaußförmigen Randdichten $f(s)$ und $f(r)$

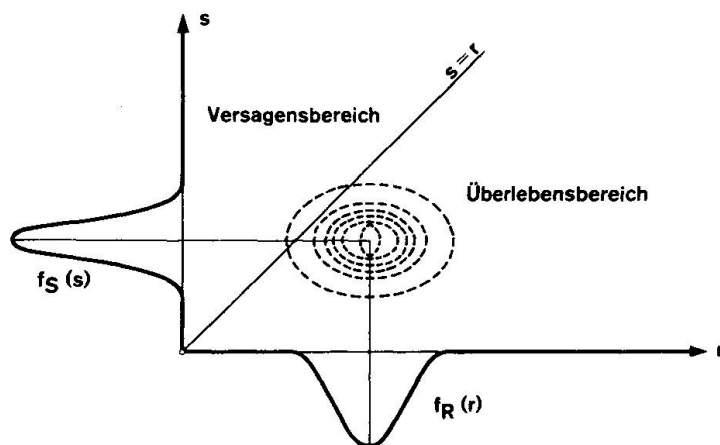


Bild 6.1

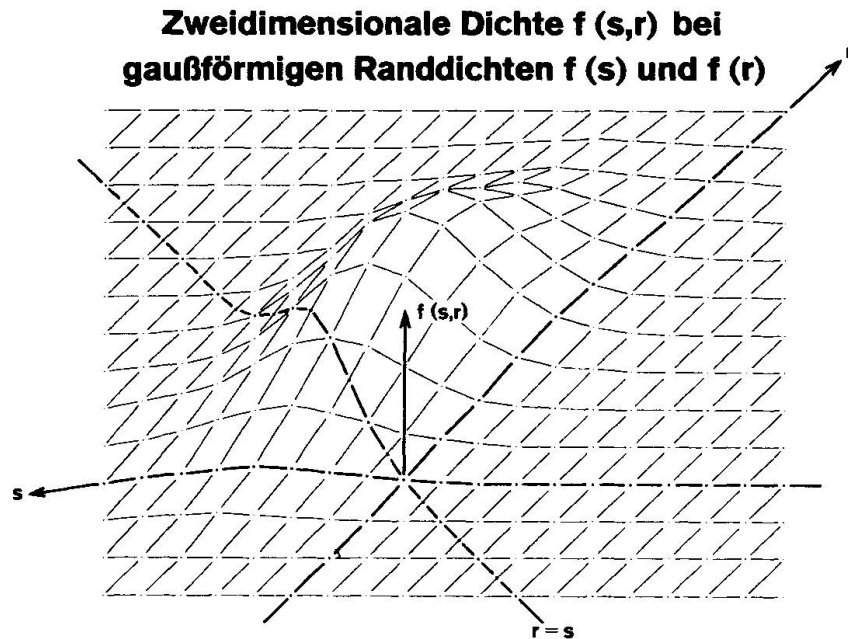


Bild 6.2

werden, da Abhängigkeit mit der Annahme, daß  $R$  und  $S$  zufällige Ereignisse seien, zu Widersprüchen führen würde. Nachwirkungen der vorangegangenen Beanspruchungen auf die Grenzbeanspruchung des Bauwerkes gegenüber einer folgenden Beanspruchung fallen somit aus dem Rahmen einer wahrscheinlichkeitstheoretischen Betrachtung. Sie würden im Verlauf einer stochastischen Betrachtung zu erörtern sein. Bei Unabhängigkeit ist die zweidimensionale Dichte  $f(r,s)$  aus den Randverteilungen für  $(R,S)$  zu ermitteln. Die Verteilungsfunktion  $F(t_1)$  für  $T_1 = R - S$  ist eine eindimensionale zufällige Funktion der zweidimensionalen Funktion  $F(r,s)$  und bestimmt sich sehr anschaulich durch Integration der Dichte  $f(r,s)$  unter einer wandernden Geraden  $R - S = \text{const.}$  Wird für die Achsen der zweidimensionalen zufälligen Veränderlichen  $(R,S)$  die logarithmische Teilung benutzt, erhält man bei gleichem Vorgehen die Verteilungsfunktion für  $T_2 = \frac{R}{S}$ . Die Versagenswahrscheinlichkeit  $p_f$  erscheint dann beim Wert  $T_2 = 1$ . Diese Darstellung hat den Vorteil, daß sich für  $T_2$  die gleiche Einheit ergibt, in der der klassische Sicherheitsbeiwert gemessen wird.

Die graphische Darstellung von  $F(t_2)$  ermöglicht eine zwischen der Versagenswahrscheinlichkeit und dem Sicherheitsbeiwert vergleichende Diskussion (Bild 7).

1. Die Beziehungen zwischen den Beanspruchungen und den Grenzbeanspruchungen eines Bauwerkes oder Bauwerksteiles werden durch den gesamten Verlauf der Verteilungsfunktion  $F(t_2)$  charakterisiert. So zeigt ein steiler Verlauf geringe Streuung der Beanspruchungs- wie der Grenzbeanspruchungswerte an, während im umgekehrten Fall die Verteilungsfunktion sehr flach verläuft. Eine mittlere Neigung kann auf dreierlei Arten erzeugt sein, mittlere Streuung von Beanspruchungs- und Grenzbeanspruchungswerten, geringe Streuung der Beanspruchungs- und große Streuung der Grenzbeanspruchungswerte oder umgekehrt.

### Versagenswahrscheinlichkeit $F(t_2)$ und Sicherheitskoeffizient $\nu$

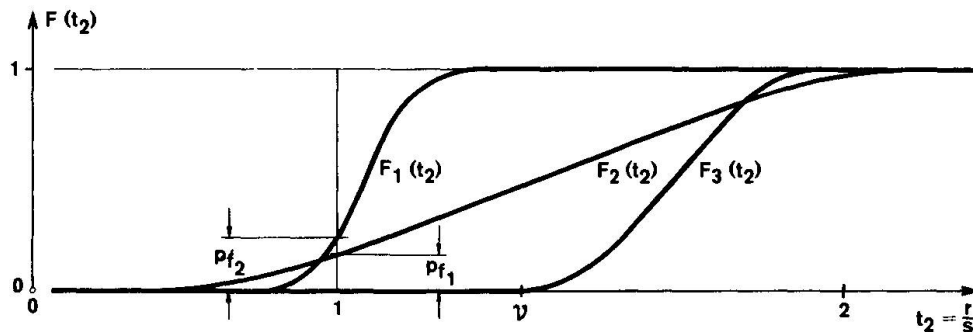


Bild 7

2. Die Steilheit der Verteilungsfunktion, die Ableitung, das heißt, die Größe der Dichte  $f(t_2)$  an der Stelle  $t_2 = 1$  ist sicher ein Maß für die Empfindlichkeit der Versagenswahrscheinlichkeit  $p_f$  in dem betrachteten Fall. Bauwerke mit sehr gering streuenden Beanspruchungen und Grenzbeanspruchungen haben gegenüber kleinen Änderungen bei den Ausgangswerten eine sehr viel größere Empfindlichkeit als Bauwerke, bei denen diese Werte sehr weit streuen (Bild 8). Im Grenzfall, daß beide Streuungen gegen Null

### Empfindlichkeit der Versagenswahrscheinlichkeit $p_f$ in Abhängigkeit der Verteilungsfunktion $F(t_2)$

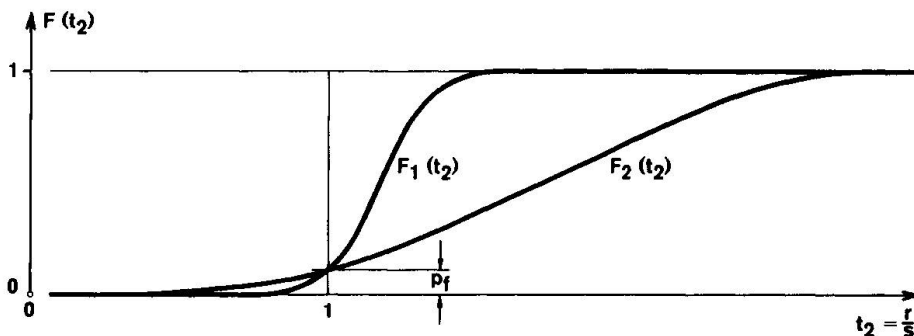


Bild 8

gehen, das heißt, die Beanspruchung wie die Grenzbeanspruchung bekannt sind, ist die Versagenswahrscheinlichkeit unbestimmt und als Bemessungsgrundlage nicht mehr zu gebrauchen. Dies ist kein Widerspruch, denn Gewißheit hebt in jedem Fall die Wahrscheinlichkeit auf. Ob in der Praxis Situationen vorkommen können, die an diesen Grenzwert bedenklich nahe rücken, müßte untersucht werden. Daß die Empfindlichkeit der Versagenswahrscheinlichkeit größer ist, als wohl oft angenommen wird, dürfte aus später zu erörternden Zahlenwerten hervorgehen. Die unterschiedliche Empfindlichkeit, die wie gezeigt, durch die Dichte

an der Stelle  $t_2 = 1$  ausgedrückt werden kann, spielt vor allem eine Rolle, wenn zwei Konstruktionen bewertet werden sollen, die gleiche oder nahezu gleiche Versagenswahrscheinlichkeiten haben, deren Dichte an dieser Stelle aber große Unterschiede aufweist. Es wird daher deutlich, daß auch die Versagenswahrscheinlichkeit alleine nicht den Traum nach einem gleichwertigen Sicherheitsmaß für alle Baustoffe, Beanspruchungsarten, Versagensmechanismen und Bauwerkstypen erfüllen kann. Womit nicht bestritten wird, daß sie der Erfüllung näherrückt, aber vielleicht gleichzeitig auch die Unmöglichkeit der Erfüllung beweist.

3. Entsprechend der mathematischen Gesetzmäßigkeiten ist die Verteilungsfunktion  $F(t_2)$  durch eine Linie darzustellen (Bild 9).

### Unschärfe der Versagenswahrscheinlichkeit $p_f$

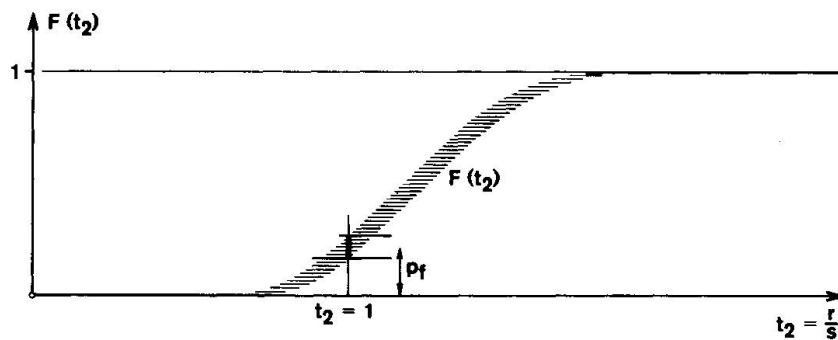


Bild 9

In der praktischen Mathematik muß diese mit Rücksicht auf die Unsicherheit der Ausgangswerte als ein Bereich angegeben werden, der von Vertrauensgrenzen begrenzt wird. Diese Vertrauensgrenzen streuen gerade im Bereich sehr kleiner Werte von  $F(t_2)$  besonders stark. Wenn die Berechnung von  $p_f$  mit wahrscheinlichkeitstheoretischer Fehlerverfolgung durchgeführt wird, wird es zwar möglich sein, in einem Wert  $p_f^*$  die Versagenswahrscheinlichkeit und ihre "Vertrauenswahrscheinlichkeit" zusammenzufassen, doch könnte der wirklich interessierende wahrscheinlichkeitstheoretische Zusammenhang zwischen Beanspruchung und Grenzbeanspruchung eines Bauwerkes bei Variation der Konstruktion, der Abmessungen, der Baustoffe, der Nutzung oder dergleichen überdeckt werden, so daß die so bestimmte Versagenswahrscheinlichkeit  $p_f^*$  dann kein brauchbares Maß für den Ingenieur mehr abgäbe.

4. Einige Ursachen für die Unsicherheit in der Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit sollen hier genannt werden. Die Versagenswahrscheinlichkeit  $p_f$  ist eine sehr kleine Differenz großer Zahlen. Dies gilt besonders im Bauwesen, da hier, wie dargelegt, große Sicherheit von der Öffentlichkeit erwartet wird. Es ist grundsätzlich anders, wenn die Methode auf andere Probleme angewendet wird, bei denen mit sehr viel größeren Versagenswahrscheinlichkeiten gerechnet werden darf. Dies wäre der Fall, wenn das Durchbrennen einer Glühbirne, die Verspätung eines Zuges oder das Verstopfen einer Straße als Versagen definiert wird. Ich möchte nachdrücklich anregen, in solchen Bereichen inge-

nieurmäßiger Planung und Vorhersage die Methode der Versagenswahrscheinlichkeit anzuwenden und die Erfahrungen mitzuteilen, die Diskussion um die Bauwerkssicherheit könnte davon sehr profitieren.

Die kleine Differenz großer Zahlen, die Versagenswahrscheinlichkeit, ist als Prozentsatz einer Gesamtheit definiert. Nach der Wahrscheinlichkeitstheorie ist der Umfang dieser Gesamtheit unbegrenzt, so daß die Angabe des Prozentsatzes eindeutig ist. Im Ingenieurwesen muß dieser Prozentsatz auf eine endliche, wenn auch große Menge, auf eine Stichprobe, bezogen werden. Damit Eindeutigkeit herrscht, müssen die Elemente der Menge und der Umfang der Stichprobe eindeutig bestimmbar sein. Das ist nicht selbstverständlich. Die Menge, auf die die Versagenswahrscheinlichkeit  $p_f$  bezogen wird, ist die Menge der Beanspruchungsfälle eines Bauwerkes. Ein Beanspruchungsfall ist aber nicht ohne weiteres eindeutig definiert. Er kann bei einer Eisenbahnbrücke z. B. definiert sein als der Größtwert einer Zugüberfahrt, oder es werden die Beanspruchungsspitzen bei einer schwankenden Beanspruchung gezählt, oder man mißt zu äquidistanten Zeitpunkten die Beanspruchung und definiert jeden Wert als zufälliges Ereignis. Für die Bestimmung der Beanspruchungskollektive, wie sie bei Betrachtung der Dauerfestigkeit üblich sind, gibt es mindestens neun verschiedene Zählmethoden, mit denen die Beanspruchungsfälle definiert werden. Hier zeigt sich ein Dilemma, das sich aus der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung ergibt. Es wird noch deutlicher, wenn sich die Beanspruchung aus verschiedenen, gleichzeitig wirkenden Lasten ergibt: aus Verkehr, Wind und Temperatur (Bild 10).

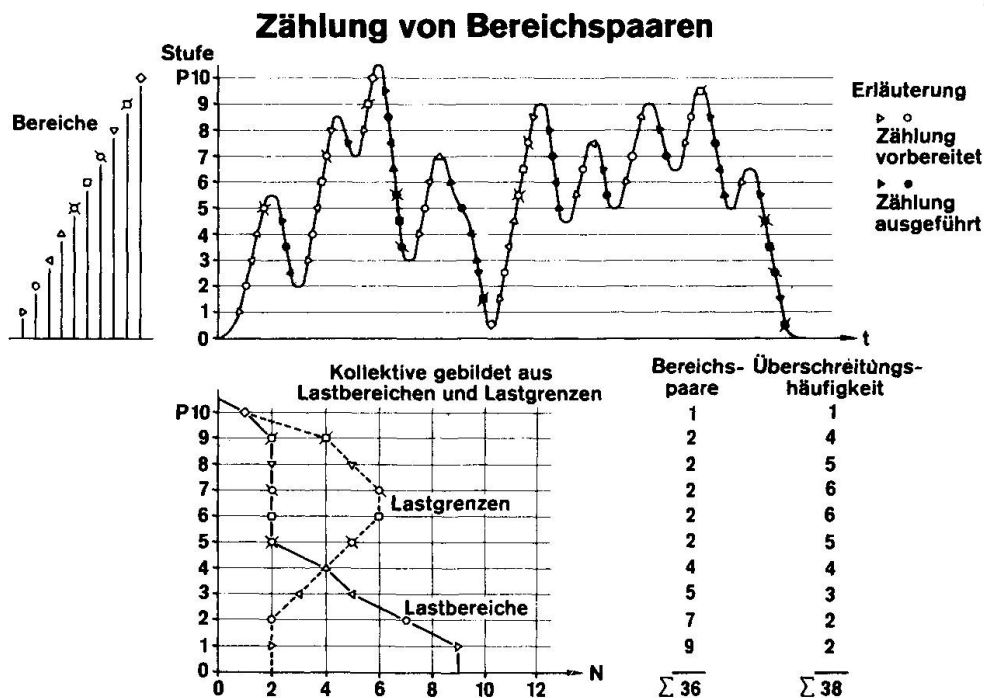


Bild 10

Es ist zusammenzufassen:

Will man die Gesetzmäßigkeiten der Wahrscheinlichkeitsrechnung anwenden, müssen die Elemente, aus denen sich die Gesamtheit zu-

sammensetzt, exakt definiert sein, damit die Angabe eines Prozentwertes als Versagenswahrscheinlichkeit eindeutig ist. Außerdem müssen bei Beanspruchungen aus unterschiedlichen Ursachen die Elemente so definiert sein, daß mit ihnen nach den Gesetzmäßigkeiten der Wahrscheinlichkeitsrechnung gerechnet werden darf.

Da in der Praxis die Verteilungsfunktionen für die Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit immer aus Stichproben ermittelt werden muß, müssen die Elemente nicht nur zählbar, sondern die Stichprobe muß auch abzählbar sein. Hier liegen die grundsätzlichen Schwierigkeiten hinsichtlich der Auswertung tatsächlich eingetretener Schadensfälle. Die Schadensfälle selbst sind sehr wohl leicht abzuzählen und als Element zu definieren, die Menge der Elemente der zugehörigen Stichprobe bleibt meist im Dunkeln. Die Zahl der Montageunfälle in einem bestimmten Zeitraum oder die Zahl der Gasexplosionen als extreme Belastungsfälle läßt sich sicher angeben; welche Versagenswahrscheinlichkeit sie repräsentieren, ist nicht eindeutig, da die Gesamtheit der Beanspruchungsfälle, auf die sie sich beziehen, nicht eindeutig zu bestimmen ist.

5. Die Darstellung von  $F(t_2)$  mit einem Abszissenmaßstab  $\frac{r}{s}$  erlaubt es, Vergleiche mit dem klassischen Sicherheitsmaß zu ziehen. Eine Verteilungsfunktion  $F(t_2)$ , für die gilt

$$\begin{aligned} F(t_2) &= 0 \quad \text{für } t_2 \leq \gamma \\ F(t_2) &\neq 0 \quad \text{für } t_2 \geq \gamma \end{aligned}$$

stellt die Vorstellung absoluter Sicherheit garantiert durch den Sicherheitskoeffizienten  $t_2 = \gamma$  dar (Bild 7).

An dieser Stelle muß noch einmal die Gesamtheit der Beanspruchungsfälle betrachtet werden. Man kann, wie gezeigt, die Versagenswahrscheinlichkeit  $p_f$  und den Sicherheitsbeiwert  $\gamma$  mit Hilfe einer Funktion  $F(t_2)$  veranschaulichen. Es darf aber nicht angenommen werden, daß bei einer Konstruktion, die unter sonst gleichen Umständen eine - bis ein bestimmter Wert für  $p_f$  erreicht ist - nach links "verschobene" Verteilungsfunktion ausweist, "überflüssige" Sicherheit abgebaut wäre. Hierbei wird nämlich übersehen, daß beide Berechnungsarten - Versagenswahrscheinlichkeit und Sicherheitskoeffizient - von verschiedenen Gesamtheiten der Belastungsfälle bzw. von einer unterschiedlichen Definition eines zu betrachtenden Belastungsfalles ausgehen. Im Fall der klassischen Sicherheit wird von der Gesamtheit der technisch sinnvollen Beanspruchungsfälle ausgegangen. Bei kombinierten Belastungsfällen wird die ungünstigste Kombination mit einem Sicherheitsbeiwert gegen Versagen abgesichert. Bei der Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit wird von der Gesamtheit aller zufälligen Beanspruchungsfälle ausgegangen. Deren Elemente sind anders definiert, und betrachtet man die Anzahl der Elemente einer Stichprobe, die auf die gleiche Zeiteinheit bezogen wurde, so ist der Umfang der Elemente im zweiten Fall natürlich größer als im ersten Fall, deren Elemente Teilmenge der Menge der Elemente des zweiten Falles ist. Geht man von den beobachteten Schadensfällen aus, muß man die Menge aller möglichen Beanspruchungsfälle zugrunde legen, die über die zufälligen Fälle hinaus die vielleicht statistisch noch erfaßbaren vorsätz-

lichen oder grobfahrlässigen Beanspruchungsfälle einschließen. Es ist Auffassungssache, ob man davon noch die Menge der Beanspruchungsfälle durch höhere Gewalt oder Kriegsgeschehen abgrenzen will, die statistisch nicht erfaßbar sein dürften. Für den berechnenden Ingenieur sind vor allem die beiden erstgenannten Mengen, die der sinnvollen und die der zufälligen Beanspruchungen interessant.

Geht man von der Darstellung der Verteilungsfunktion  $F(t_2)$ , in der sich  $p_f$  angeben läßt, aus und nimmt an, es ließe sich der kleinste Wert  $t_2 = \frac{r}{s}$  angeben, der der Menge der "sinnvollen" Beanspruchungsfälle - in der oben definierten Bedeutung - zugehört, so wäre ein Punkt der Verteilungsfunktion  $F(t_2)$  gefunden, der horizontal um den Wert  $\gamma$  von dem Wert  $t_2 = 1$  entfernt sein muß, wenn die Konstruktion in gleicher Weise der Vorstellung der Versagenswahrscheinlichkeit wie der des Sicherheitsbeiwertes genügt (Bild 11). Es zeigt sich somit: die Versagenswahrschein-

### Versagenswahrscheinlichkeit $p_f$ und Sicherheitskoeffizient $\gamma$

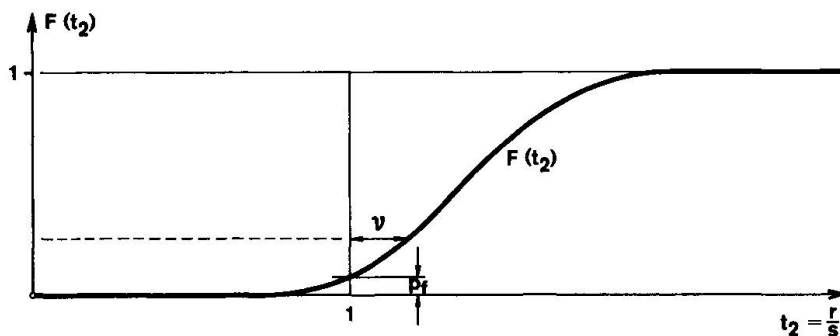


Bild 11

lichkeit und der Sicherheitsbeiwert definieren je nur einen Punkt der Verteilungsfunktion  $F(t_2)$ , die durch Beanspruchung und Grenzbeanspruchung eines Bauwerkes festgelegt wird. Sie sind insofern gleichwertig.

Es ist nun so, daß sich der Horizont nicht einfach angeben läßt, auf dem sich dieser kleinste Wert  $F(t_2)$  für noch "sinnvolle" Beanspruchung und Grenzbeanspruchung befindet, denn dieser Punkt trennt in vertikaler Richtung nicht die Menge der "sinnvollen" von denen der "zufälligen" Werte ab, da auch größere Werte  $t_2$  als der definierte "sinnvolle" Grenzwert "zufällig" sein können. Das heißt, die Verteilungsfunktion der "sinnvollen" Werte für  $t_2$  ist nicht ein Bruchstück der Verteilungsfunktion der "zufälligen" Werte für  $t_2$ . Mithin kann man auch nicht aus dem Wert für die Versagenswahrscheinlichkeit  $p_f$  den äquivalenten Sicherheitsbeiwert ableiten, es sei denn, man macht eine ganze Reihe von Annahmen, deren Berechtigung erst nachzuweisen wäre. Festzuhalten bleibt: Versagenswahrscheinlichkeit und Sicherheitskoeffizient sind zwei grundsätzlich verschiedene Aussagen, da sie unterschiedlichen Gesamtheiten angehören. Nur durch einengende Voraussetzungen sind sie in funktionale Abhängigkeit zu bringen.

Es ist vorgeschlagen worden,  $t_2$  für  $F(t_2) = 0,5$  als zentralen Sicherheitsbeiwert  $\gamma_0$  zu definieren. Dieser zentrale Sicherheitsbeiwert  $\gamma_0$  ermittelt sich besonders einfach aus den Mittelwerten der Beanspruchung und der Grenzbeanspruchung (Bild 12). Dabei wird stillschweigend vorausgesetzt, die Zen-

### Definition des zentralen Sicherheitsbeiwertes

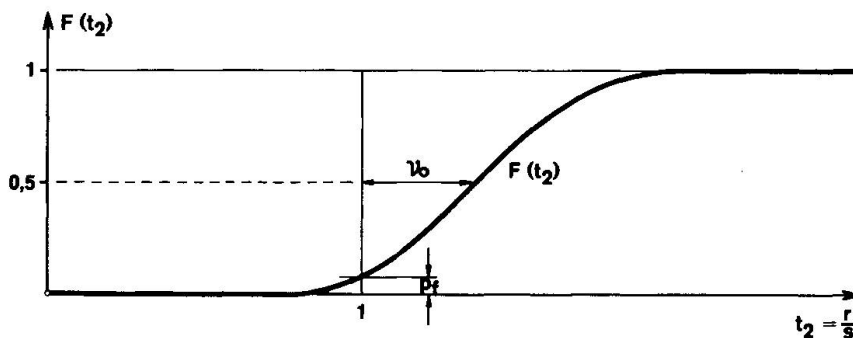


Bild 12

tralwerte der Verteilungsfunktionen für die "zufälligen" und für die "sinnvollen" Werte seien identisch, was durchaus nicht der Fall zu sein braucht. Wird die Berechtigung dieser Voraussetzung angenommen, so ist der Nachteil des zentralen Sicherheitswertes  $\gamma_0$ , daß er nicht ein Versagen auch schon technisch "sinnvoller" Beanspruchung ausschließt. Zum anderen zeigt er aber sehr deutlich die überaus große Empfindlichkeit der Versagenswahrscheinlichkeit. Setzt man gaußähnliche Verteilung für  $t_2$  voraus, und verlangt eine Versagenswahrscheinlichkeit von  $10^{-4}$  oder  $10^{-5}$ , so ändert sich diese um eine Zehnerpotenz, wenn sich der zentrale Sicherheitswert auch nur um 0,05 ändert. Die große Empfindlichkeit der Versagenswahrscheinlichkeit wird hier noch einmal deutlich. Es gibt Vorschläge, diesen Nachteil der Versagenswahrscheinlichkeit gegenüber dem Sicherheitsbeiwert zu entschärfen.

6. Wie gezeigt, ist es zumindest ideell möglich, den Sicherheitsbeiwert  $\gamma$  und die Versagenswahrscheinlichkeit in ein und derselben Verteilungsfunktion  $F(t_2)$  zu veranschaulichen. Es werden so zwei Punkte dieser Funktion, die Bauwerk und Lasteinwirkungen miteinander in Beziehung setzt, fixiert. Da beide Werte gesondert offenbar nicht befriedigen, liegt es nahe, bei der Bauwerksbemessung zu fordern, daß beide Kriterien, wenn auch etwas weniger scharf einzuhalten sind. Da der Sicherheitsbeiwert und die Versagenswahrscheinlichkeit, wie dargelegt, zwei verschiedenen Verteilungsfunktionen angehören, wird diese Forderung un bequem, wenn die Verteilungsfunktion  $F(t_2)$  der "zufälligen" Werte, die ja für die Bestimmung von  $p_f$  benötigt wird, als genügend genau bekannt vorausgesetzt werden muß. Es bietet sich dann an, diese Funktion durch zwei statt durch nur einen Grenzwert festzulegen (Bild 13). Damit würde man gleichzeitig der immer gewünschten "homogenen Sicherheit" näher kommen und ein einheitlicheres Verhalten der Bauwerke bei Änderung der Beanspruchungscharakteristika erhalten. An dieser Darstellung wird aber gleichzeitig deutlich, daß die absolute "homogene Sicherheit"

### Beziehungen zwischen Versagenswahrscheinlichkeit $p_f$ und Sicherheitskoeffizient $\gamma$

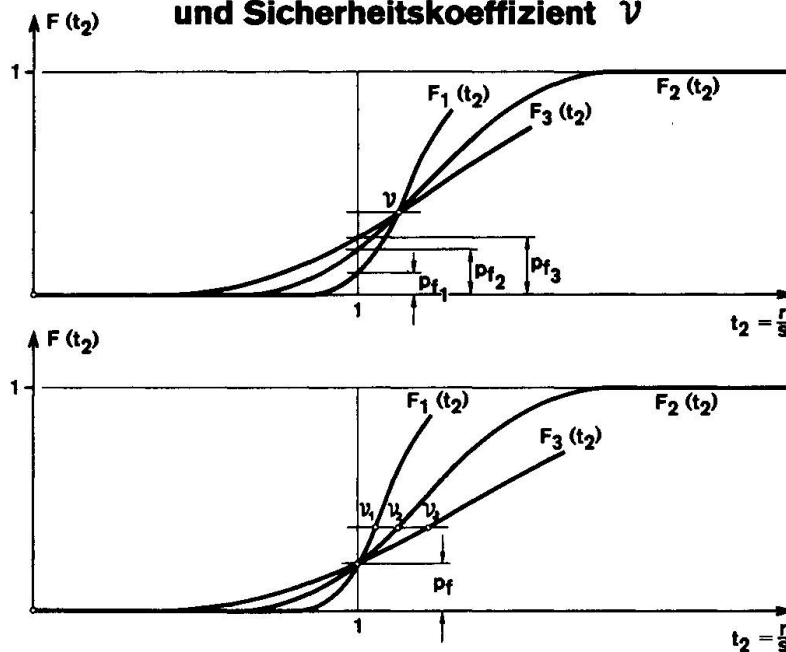


Bild 13

eine nicht zu erfüllende Forderung ist. Es ist zwar theoretisch möglich, für alle "Schwachstellen" eines Bauwerkes eine gleiche Versagenswahrscheinlichkeit zu fordern - damit sollen die traditionellen unterschiedlich großen Sicherheitsbeiwerte überwunden werden, die sich bei den verschiedenen Baustoffen und Beanspruchungsarten entwickelt haben - da aber die Versagenswahrscheinlichkeit wie der Sicherheitsbeiwert nur einen Punkt der Verteilungsfunktion markieren, kann die Qualität der Aussage nicht unterschiedlich sein. Ein Fortschritt ist erst zu erwarten, wenn man mehr über den gesamten Verlauf der Funktion kennt und sei es nur ein zweiter Punkt von ihr. Es wird dann aber nicht zu erwarten sein, daß für alle Schwachstellen eines Bauwerkes die gleiche Verteilungsfunktion  $F(t_2)$  gilt, mithin würde bei der geringsten Veränderung oder Nichteinhaltung der Voraussetzungen doch wieder eine der "Schwachstellen" das schwächste Glied in der Kette werden, das über die Gesamttragfähigkeit entscheidet. Diese Betrachtungen besagen allerdings nicht, daß nicht extreme Schwachstellen zu vermeiden wären, daß weitgehend homogene Sicherheit anzustreben wäre und daß Betrachtungen zur Versagenswahrscheinlichkeit hier hilfreich sein können. Sie legen außerdem nahe, dem Umspringen der Reihenfolge der Schwachstellen unter äußeren Einflüssen besondere Aufmerksamkeit zu widmen.

Die Forderung, zwei Punkte der Verteilungsfunktion  $F(t_2)$  einzuhalten, die zu homogenerem Bauwerksverhalten als bisher führen könnte, ließe sich auf verschiedene Weise formulieren, wie graphisch anschaulich dargestellt werden kann (Bild 14.1 und 14.2).

### Festlegen der Verteilungsfunktion $F(t_2)$ durch zwei geforderte Grenzwerte

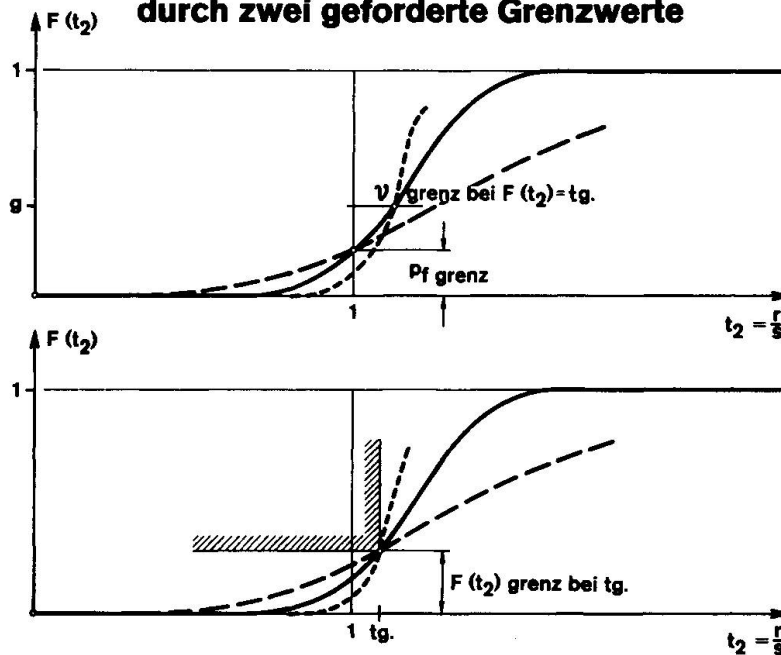


Bild 14.1

### Festlegen der Verteilungsfunktion $F(t_2)$ durch zwei geforderte Grenzwerte

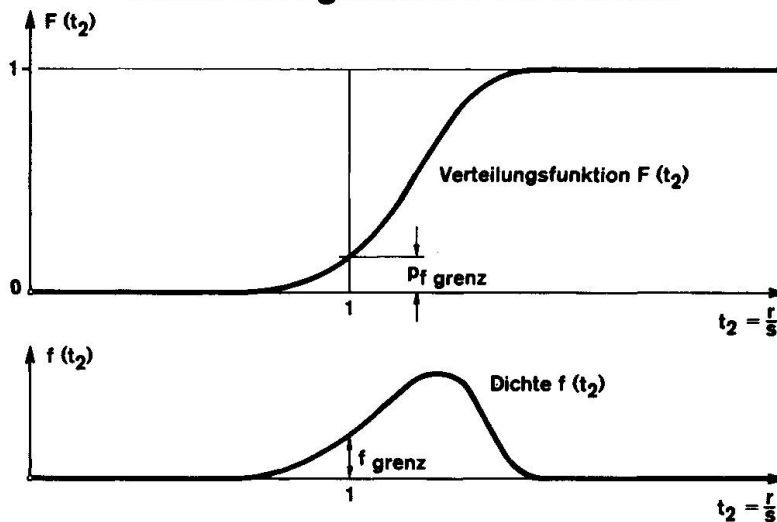


Bild 14.2

- a) Verteilungsfunktionen dürfen einen bestimmten Wert  $p_f$  für die Versagenswahrscheinlichkeit bei  $t_2 = 1$  nicht über- und einen bestimmten Wert als Sicherheitsabstand bei  $F(t_2) = 0,2$  nicht unterschreiten;  
oder
- b) Verteilungsfunktionen dürfen den durch einen Eckwert  $F(t_2)$ ,  $t_2$  festgelegten Bereich nicht berühren;  
oder

- c) Verteilungsfunktionen dürfen einen bestimmten Wert  $F(t_2 = 1) = p_f$  und einen bestimmten Wert  $f(t_1 = 1)$  nicht überschreiten. In allen Fällen wird erzwungen, daß bei extrem steilen Verteilungsfunktionen nicht durch geringfügige Änderungen gefährdende Zustände wegen zu geringer Sicherheit entstehen könnten. Die gleiche Forderung erfüllt Ang (2) auf ähnliche Weise, wenn er vorschlägt, die Funktion  $F(t_2)$  durch eine Funktion  $F^*(t_2^* = t_2 - \gamma_0)$  zu ersetzen, die einen bestimmten Wert  $p_f$  bei  $t_2^* = 1$  einzuhalten hat.

Herauszuheben ist:

- Versagenswahrscheinlichkeit und Sicherheitsbeiwert sind grundsätzlich verschiedene Aussagen über die Beziehung zwischen Beanspruchung und Grenzbeanspruchung einer Konstruktion.
- Beide Größen legen nur einen Punkt in dieser funktionalen Beziehung fest. Sie sind also gleichwertig hinsichtlich der Aussagekraft, die ein Punkt in bezug auf einen funktionellen Zusammenhang haben kann.
- Sollen Versagenswahrscheinlichkeit und klassischer Sicherheitsbeiwert miteinander verglichen oder aufeinander bezogen werden, ist darauf zu achten, daß die betrachteten Elemente unterschiedlich definiert sind und unterschiedlichen Gesamtheiten angehören.
- Die Überführung des einen Wertes in den anderen ist nur unter Zuhilfenahme zusätzlicher Annahmen möglich, deren Berechtigung nachzuweisen ist.
- Werden zwei Punkte der Verteilungsfunktion durch die Bemessungsforderung festgelegt, sind hinsichtlich der Sicherheit homogenere Bauwerke und Bauwerksklassen zu erwarten als wenn nur die Einhaltung eines Punktes verlangt wird.

## 6. Heutige Lastannahmen

Alle Betrachtungen gehen von der Annahme aus, die Beanspruchungswerte und die Grenzbeanspruchungswerte verteilen sich etwa in der in Bild 15 dargestellten Form, die bisherigen Berechnungswerte las-

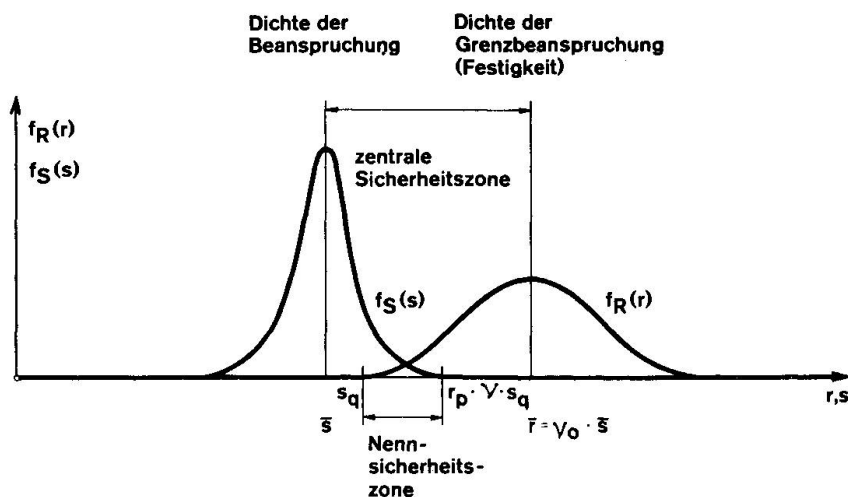
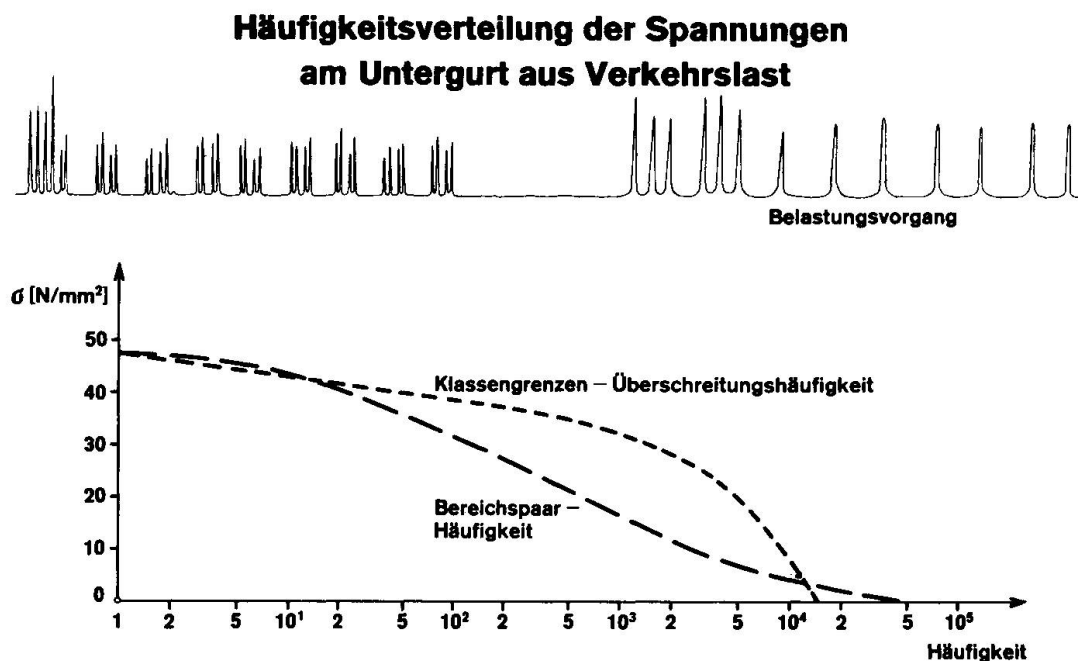


Bild 15

sen sich als Fraktile dieser Verteilungen auffassen, die Verteilungen streuen etwa gleich weit und sie überschneiden sich in Bereichen, in denen die angenommenen oder aus Messungen abgelesenen Dichtefunktionen noch aussagekräftig sind. Ob sich alle diese Annahmen bewahrheiten, muß untersucht werden, bevor verfeinerte Theorien zur Versagenswahrscheinlichkeit berechtigt sind. Leider wird heutzutage weit mehr die Wirkung der äußeren Lasten im Bauwerk selbst erforscht als die Berechtigung der Annahmen und die äußeren Lasten selbst. Aus mehreren Gründen: im Zusammenhang mit der Entwicklung eines neuen Lastenzuges, mit der Frage der Dauerbeanspruchung und der Sicherheitstheorie hat die DB über ein ganzes Jahr hinweg die Beanspruchungen aus der Eisenbahnverkehrslast in verschiedenen Traggliedern einer Fachwerkbrücke gemessen. Als Beanspruchungsereignis wurde einmal das Überschreiten einer Klassengrenze, zum anderen die Bereichspaare definiert, die sich aus wechselnder Belastungsrichtung ableiten lassen.

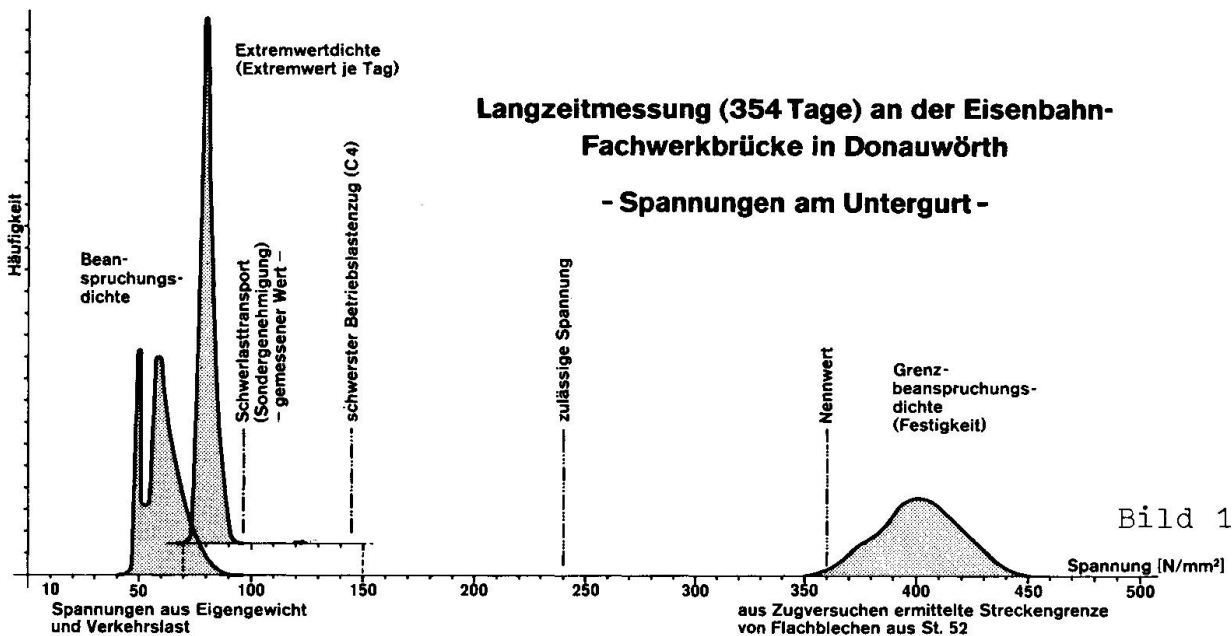
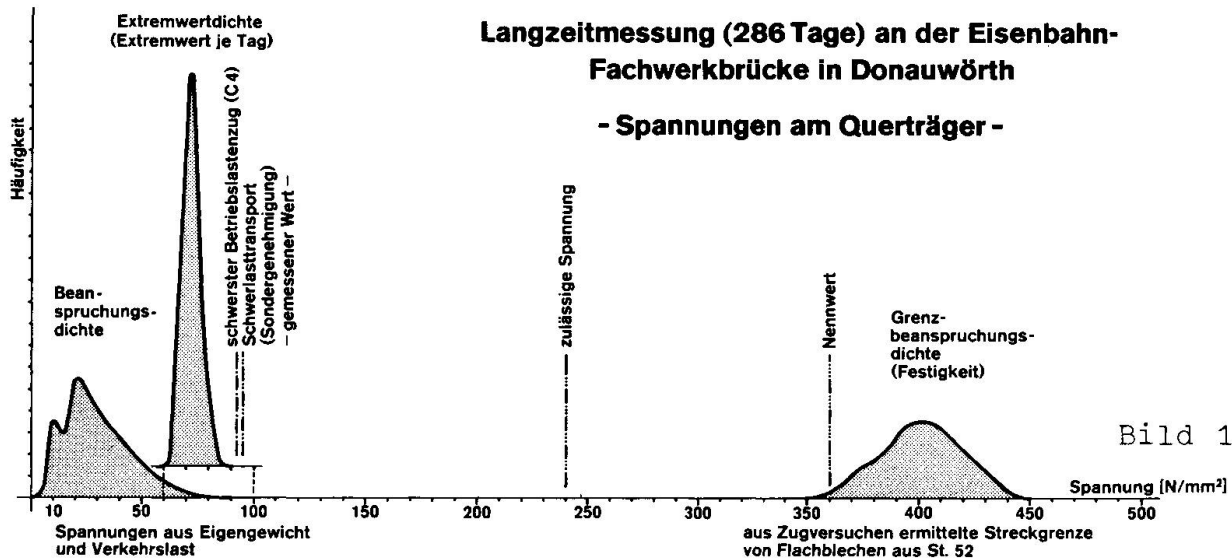
Es wurde der kontinuierliche Beanspruchungshergang hier also nach zwei Zählverfahren ausgewertet, die bei der Untersuchung der Betriebsfestigkeit üblich sind (Bild 16). Die Ereignisse sind Häu-



figkeitsverteilungen nach der Klassengrenzenüberschreitung und nach der Größe der Bereichspaare.

Daraus ergeben sich zwei unterschiedliche Dichte- bzw. Verteilungsfunktionen, wenn von der Menge der Stichprobe zur Gesamtheit mit dem Wert "1" übergegangen wird, die natürlich zu unterschiedlichen Versagenswahrscheinlichkeiten führen. Hier soll nur die Dichte der Klassengrenzüberschreitungen betrachtet werden und in dem zugehörigen Maßstab die angenommene Beanspruchung aus dem Lastenzug  $S$  multipliziert mit dem dynamischen Beiwert eingetragen werden. Die maßstäbliche Darstellung wirft nun in der Tat die Frage auf, ob es berechtigt ist, die Berechnungslast als Fraktilewert der Beanspruchungsverteilung aufzufassen. Dies gilt sowohl für die Beanspru-

chung im Querträger als auch für die Beanspruchung im Untergurt (Bild 17.1 und 17.2).



Im gleichen Maßstab soll auch die Verteilung der Grenzbeanspruchung eingetragen werden. Da die Lastbeanspruchung eigentlich eine zusammengesetzte Beanspruchung aus ständiger Last und Verkehrslast ist, über die anzunehmende Verteilung der ständigen Last aber keine Messungen vorliegen, soll die Verkehrsbeanspruchung um den rechnerischen Wert der Beanspruchung aus ständiger Last vergrößert angenommen werden. Die grundsätzlichen Dinge lassen sich sehr wohl erkennen. Messungen zur Bestimmung der Streuung der Beanspruchungswerte aus ständiger Last sollen baldmöglichst nachgeholt werden. Die Darstellung der so angenommenen Dichtefunktion der Lastbeanspruchung und der Grenzbeanspruchung legt die Frage nahe, ob es gerechtfertigt ist, aus dem Überschneidungsbereich der Dichtefunktionen eine Bemessungsforderung abzuleiten. Der Abstand zu Nennwerten, die in

einem gewissen Verhältnis zu den häufigsten Werten der Beanspruchung oder der Grenzbeanspruchung stehen, das man noch mit dem Augenschein prüfen kann, scheint mir wirklichtsnäher.

Um Näheres über die Gesetzmäßigkeit der Eisenbahnverkehrslast zu erfahren, wurden Messungen, die über ein ganzes Jahr hinweg geführt wurden, nach Extremwerten ausgewertet. Eine Auswertung nach dem Höchstwert je Zug führte zu keinem Erfolg, da sich keine Extremwertverteilung einstellte. Anders die Verteilung der Extremwerte je Tag. Diese gehorchen mit selten zu beobachtender Meßgenauigkeit einer Extremwertverteilung, die wie Buxbaum (3) gezeigt hat, durch eine Gaußverteilung anzunähern ist (Bild 18). Es ist sehr

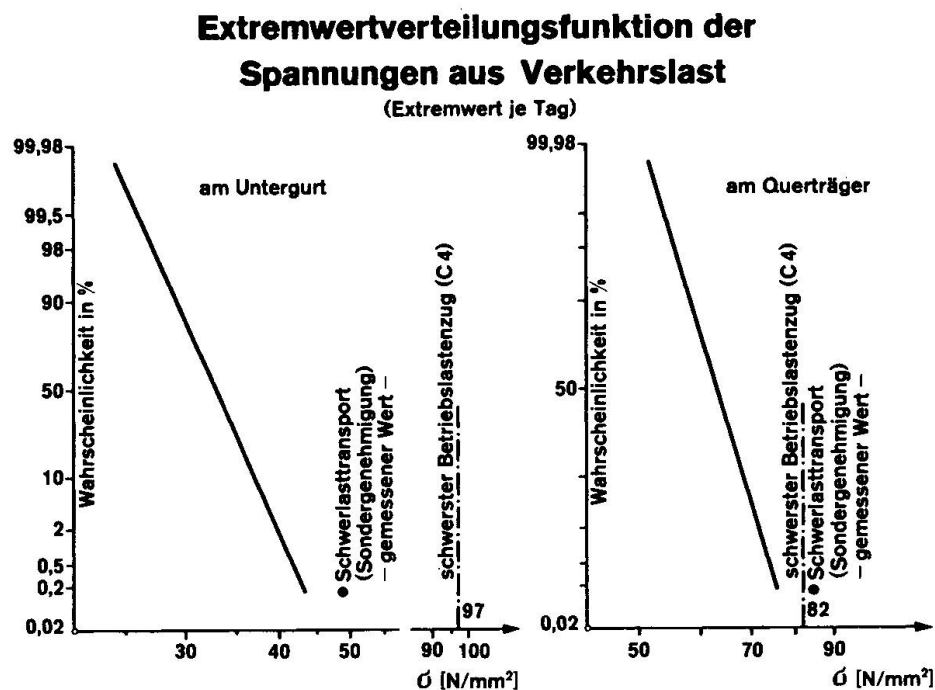


Bild 18

interessant, daß auch die Eisenbahnverkehrslasten, die durch eine Limitierung der Achslast und des Metergewichtes gekennzeichnet sind, sich nicht approximativ einem Grenzwert nähern, sondern einer Extremwertverteilung genügen, die mit Vertrauen auf Zeiten, die für die Lebensdauer einer Brücke angesetzt werden müssen, extrapoliert werden darf. Dies wurde gemessen für Bauteile mit relativ kurzer Einflußlinie wie bei den Querträgern, wie für den Untergurt, für den eine fünfmal so lange Einflußlinie maßgebend ist. Die Gesetzmäßigkeit ist so streng, daß man ermutigt wird, zur grundsätzlichen Untersuchung der Verhältnisse auf anderen Strecken und in weiteren Bauteilen oder anderen Brückensystemen auch mit kürzeren Meßzeiträumen die Extrapolation zu wagen.

Es stellt sich nun wiederum die Frage, ob die Beanspruchung aus dem Berechnungslastenzug als Fraktile der Extremwertverteilung angesehen werden darf. Die Untersuchung zeigt, daß beim Querträger wie beim Untergurt dieser Wert soweit aus der Verteilung herausfällt, daß er nicht als zugehörig angesehen werden kann. Neben dem Berechnungswert gibt es einen Lastwert, der im täglichen Betrieb ohne besondere Vorkehrungen erreicht werden darf. Dieser zugelassene Wert

ergibt sich aus einer zugelassenen Meterlast und einer zugelassenen Achslast. Die Beanspruchungswerte haben bei dem Querträger eine Wiederholungsperiode von 28 Jahren und können somit als zu der Verteilung gehörend angesehen werden, beim Untergurt beträgt die Wiederholungsperiode 280 000 Jahre, dieser Wert kann also nicht der Extremwertverteilung zugerechnet werden. Gerade umgekehrt erweist sich die zufällig gemessene Beanspruchung aus einem Schwertransport, der im Querträger eine Wiederholungsperiode von 2 800 Jahren und im Untergurt eine von 140 Jahren zuzuordnen ist.

Auch im Hinblick auf die Extremwertverteilungen ist festzustellen, daß der Berechnungslastenzug in keiner Beziehung zu den wirklichen Beanspruchungen aus den normal verkehrenden Zügen steht. Es bleibt zu untersuchen, ob dies für andere Strecken, für andere Bauwerkstypen und für die Gesamtheit der verkehrenden Schwertransporte auch gilt. Unter Umständen sind neue Vorstellungen über die Eigenschaften der Bemessungslast zu entwickeln.

Deutlich wird durch diese Untersuchung jedoch, daß die Sicherheit gegen mechanisches Versagen bei dem Konstruieren von Bauwerken in den meisten Fällen wohl nicht bemessungsbestimmend ist, sondern daß Sicherheit gegen zukünftige Nutzungseinschränkung, die zu erheblichen Sprungkosten führen kann, Sicherheit gegen den Bestand bedrohende Einflüsse wie Korrosion und Abnutzung, Fertigungsforderungen und architektonische Gestaltung das Konstruieren bestimmen, wobei der Sicherheit gegen mechanisches Versagen selbstverständlich genügt werden muß. Der Nachweis hierfür ist meist einfacher zu erbringen, als es die neuen Überlegungen nahelegen. Nicht verkannt werden die Fälle, in denen tatsächlich nach der Sicherheit gegen mechanisches Versagen dimensioniert wird, vor allem bei der Montage und bei Bauwerken mit extremen Abmessungen. Hier muß sicher in Zukunft schärfer unterschieden werden.

Es ist sehr wohl möglich, auch mit Extremwertverteilungen der Verkehrslast Versagenswahrscheinlichkeiten zu formulieren, es scheint mir dies sogar sinnvoller als mit der Gesamtverteilung, zu beachten ist nur, daß beide Wahrscheinlichkeiten nicht das Gleiche aussagen. Zu wünschen wäre, wenn auch für Grenzbeanspruchungen Extremwertdichten definiert werden könnten, nur scheint mir hier die Gruppierung, aus der der Extremwert gewonnen werden sollte, nicht so eindeutig festzuliegen wie bei der Verkehrsbelastung, wo sich der Tag, der Monat und das Jahr als natürliche Zusammenfassung anbieten.

Die Darstellungen zeigen auf alle Fälle, daß wir unsere Vorstellungen von den Streuungen der Beanspruchungen und von den Grenzbeanspruchungen aufgrund von Messungen untermauern müssen. Wie zu erkennen, streuen die Meßdaten für die Streckgrenze des Stahles weit mehr als die Extremwerte der Eisenbahnverkehrslast. Es ist zu befürchten, daß auch die Beanspruchungen aus ständiger Last mehr streuen, als meist angenommen wird.

Es ist zusammenzufassen:

- a) Es ist fragwürdig, ob die heutige Berechnungslast als Fraktile der tatsächlichen Belastungsgesamtheit aufgefaßt werden darf und ob mit dieser Auffassung hinsichtlich des Sicherheitsverständnisses etwas gewonnen ist.

- b) Die Erforschung der tatsächlichen Beanspruchungen aus den wirkenden Belastungen ist vordringlich gegenüber der Erforschung der Beanspruchung aus angenommenen Belastungen.

## 7. Mehrdimensionale Probleme und Grenzen der Wahrscheinlichkeitstheorie

Bisher wurden alle Betrachtungen unter der Voraussetzung eindimensionaler Beanspruchungsgrößen gemacht. Dies ist durch die eindimensionale Bemessungsvorschrift, eine zulässige Spannung einzuhalten, auf den ersten Blick nicht ungewöhnlich. Hier werden aber zwei- und mehrdimensionale Probleme durch deterministische Gesetzmäßigkeiten auf eindimensionale zurückgeführt, wobei dies nicht immer ohne Schwierigkeiten abgeht, wenn Beanspruchungen überlagert werden, die exakt genommen nicht zum gleichen Lastfall gehören. Grundsätzlich anders liegen die Verhältnisse, wenn man die Versagenswahrscheinlichkeit zu bestimmen

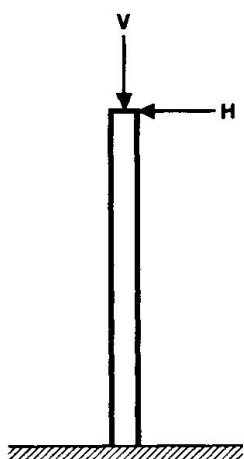


Bild 19

hat und ohne deterministische Gesetzmäßigkeiten auskommen will. Dies soll an einem sehr einfachen Bauwerk, einem eingespannten Stab, der am Kopf durch vertikale und horizontale Kräfte beansprucht wird, gezeigt werden (Bild 19). Es ist leicht einzusehen, daß die Kräfte der beiden Beanspruchungsrichtungen voneinander unabhängig und zufällig sein können. Die Lastbeanspruchung ist dann als eine zweidimensionale zufällige Veränderliche aufzufassen, die durch den Höhenschichtenplan ihrer Dichte leicht zu veranschaulichen ist (Bild 6.1, 6.2 und 20.1, 20.2). In nicht mehr ganz so anschaulicher Weise

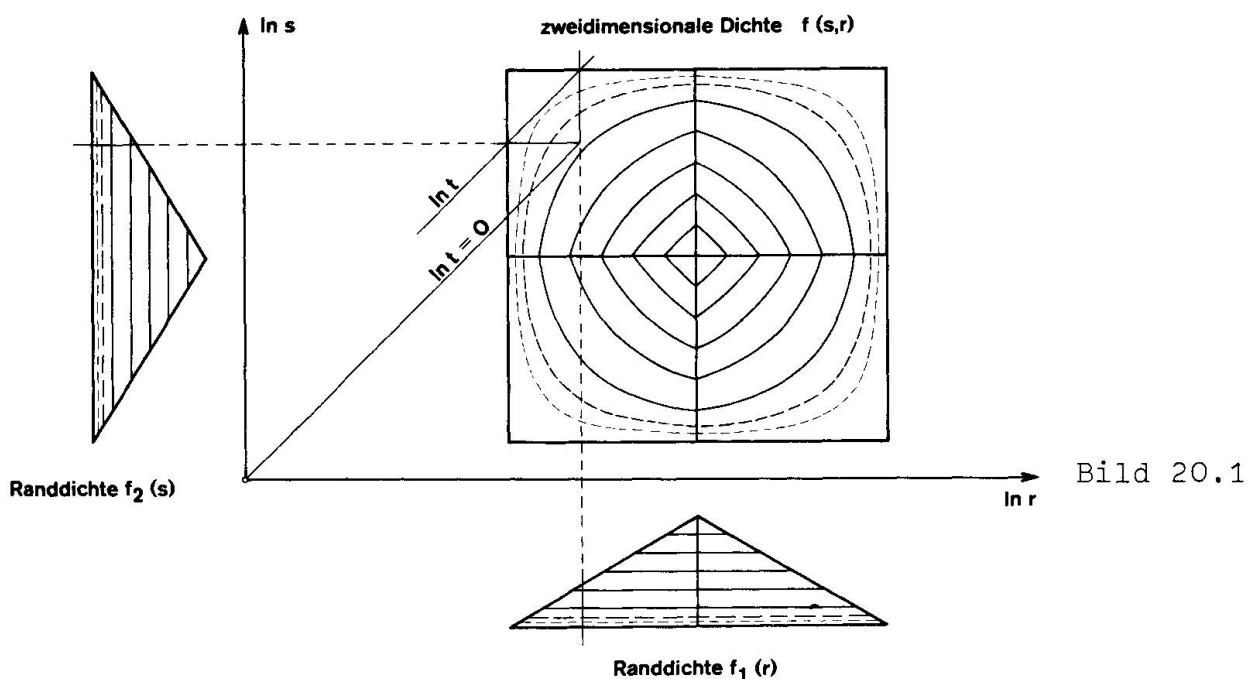


Bild 20.1

### Zweidimensionale Dichte $f(s,r)$ bei dreieckförmigen Randdichten $f_1(r)$ und $f_2(s)$

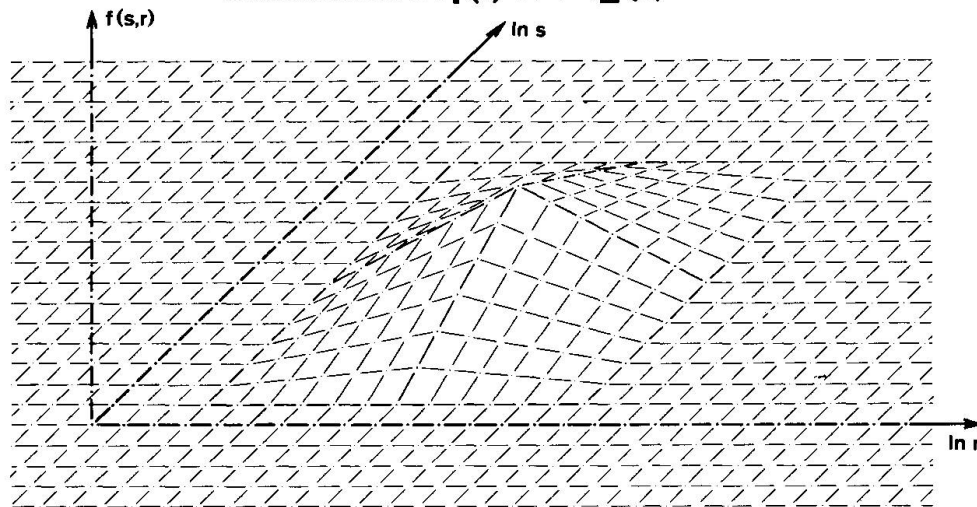


Bild 20.2

läßt sich auch eine Beanspruchung vorstellen, die mehr als zwei Dimensionen hat. Die schon genannten Schwierigkeiten, den kontinuierlichen Belastungsvorgang in eine Folge zufälliger Belastungsereignisse aufzugliedern, sollen hier nicht weiter erörtert werden. Es wird vorausgesetzt, daß jedem Belastungsereignis ein zufälliger Wert in jeder Dimension zugeordnet werden kann. So könnte man bei dem hier betrachteten Beispiel der eingespannten Säule jede Minute in dem Beobachtungszeitraum die Größe  $V$  und  $H$  messen und in einem zweidimensional gekastelten Gitternetz zählen und aus den so erhaltenen Werten die Höhenlinien einer Dichtefunktion bestimmen, wenn Zusatzüberlegungen den Übergang von der statistischen Stichprobe zu der wahrscheinlichkeitstheoretischen Dichtefunktion und von der diskreten Dichtefunktion zur stetigen Dichtefunktion rechtfertigen. Wenn die Größen  $V$  und  $H$  voneinander unabhängig sind, kann die zweidimensionale Dichte auch von den gemessenen Randverteilungen her bestimmt werden, wenn nicht, muß sie direkt bestimmt werden. Auch bei Unabhängigkeit ist es nicht möglich, von Extremwertverteilungen der Randvariablen auf eine zweidimensionale Extremwertverteilung zu schließen, da die Extremwerte der Randvariablen nicht unbedingt zusammengehören müssen. Zweidimensionale Extremwertverteilungen sind daher nur direkt über die zweidimensionale zufällige Veränderliche zu ermitteln, indem die Extremwertdichte aus den extremen Werten der einzelnen Klassenmengen aufgebaut wird. Hierzu ist es jedoch noch nötig, das "Extreme" eines zwei- oder mehrdimensionalen Wertes gegenüber den anderen zwei- oder mehrdimensionalen Werten der Wertemenge der Klasse zu definieren. Dies kann durch unterschiedliche Bedingungen geschehen, z. B.  $H + V = \max$ ,  $H^2 + V^2 = \max$ , oder auch  $H = \max$ ,  $V = \max$ . Damit zeigt sich, daß zweidimensionale Extremwertverteilungen sehr willkürlich definiert werden können. Man würde sie sicher mit Rücksicht auf die zu erwartende Grenzbeanspruchungsgesetzmäßigkeit definieren. Damit käme wieder eine stark deterministische Komponente in die Betrachtung der Versagenswahrscheinlichkeit, so daß hier auf zweidimensionale Extremwertbetrachtungen verzichtet werden soll und von der zweidimensionalen Dichte aller Ereignisse ausgegangen wird, obgleich dies für die Praxis, wie am eindimensionalen Beispiel gezeigt wurde, sicher nicht günstig ist.

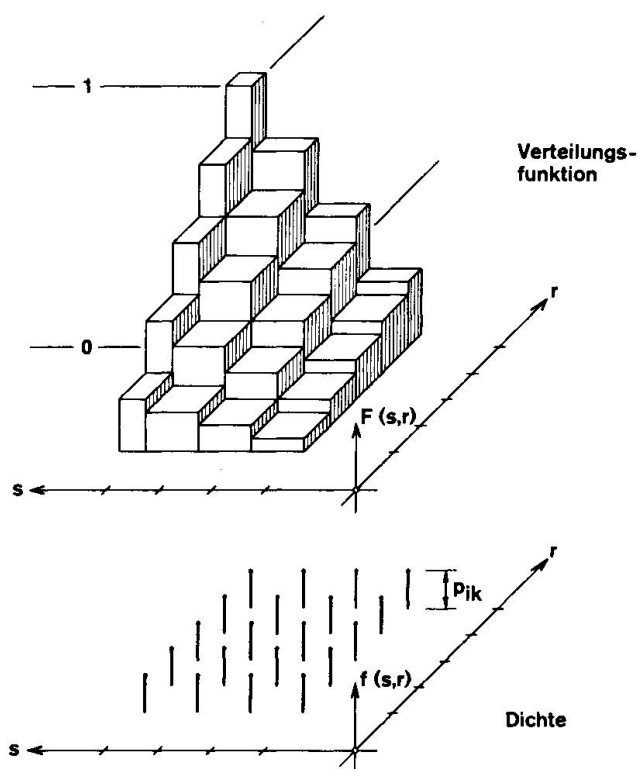


Bild 21.1

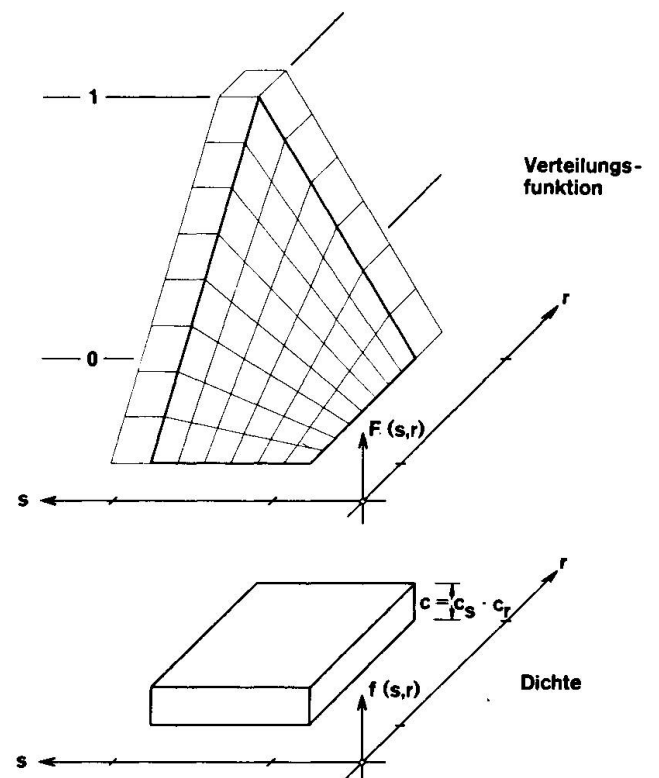


Bild 21.2

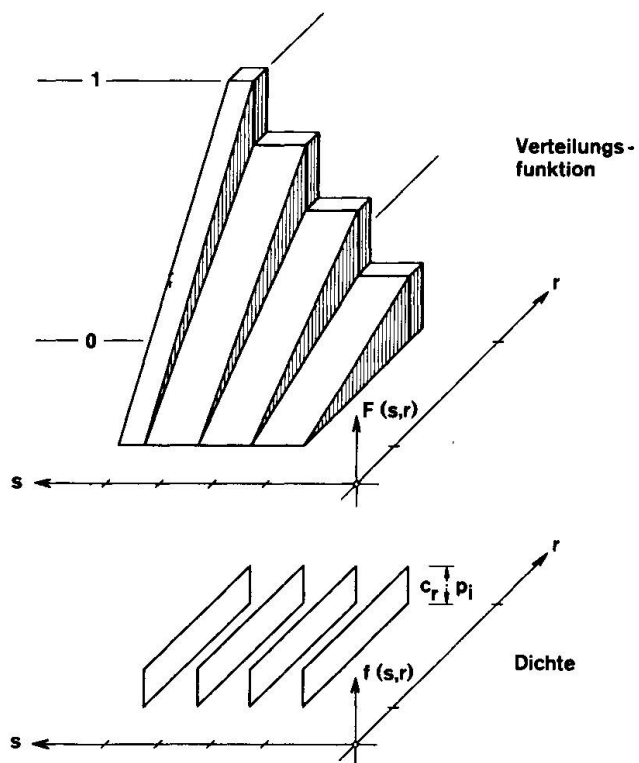


Bild 21.3

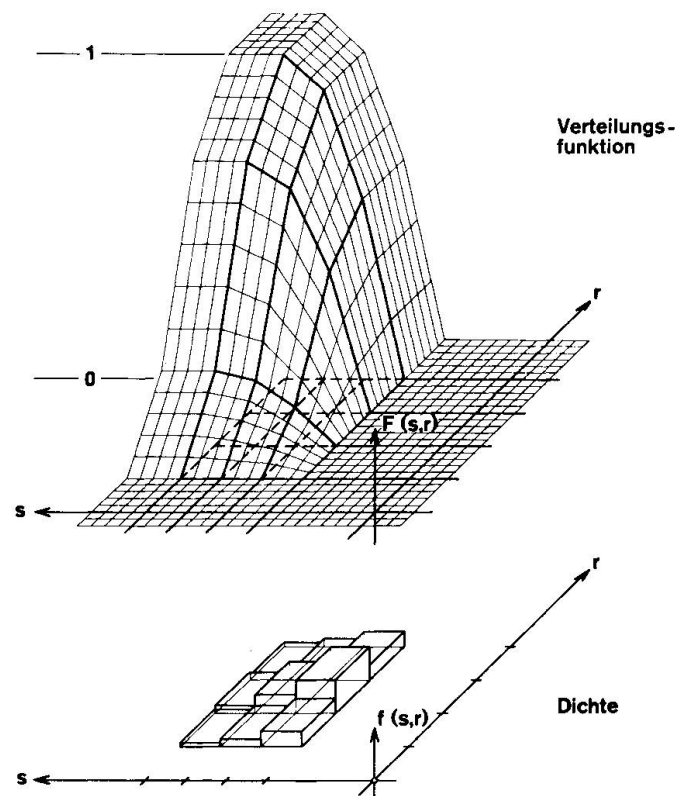


Bild 21.4

**Zweidimensionale Dichte der Grenzbeanspruchung (Festigkeit) bei schlagartigem Versagen unter einer bestimmten Lastkombination  $L(M,N)$**

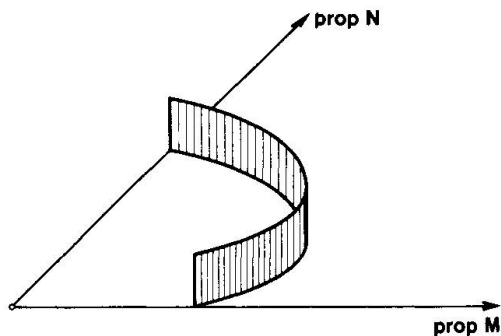


Bild 22

**Grundriß der zweidimensionalen Dichte  $f(M,N)$  bei schlagartigem Versagen unter bestimmten Lastkombinationen  $L(M,N)$  von eingespannten Stäben mit unterschiedlichen Versagensmechanismen**

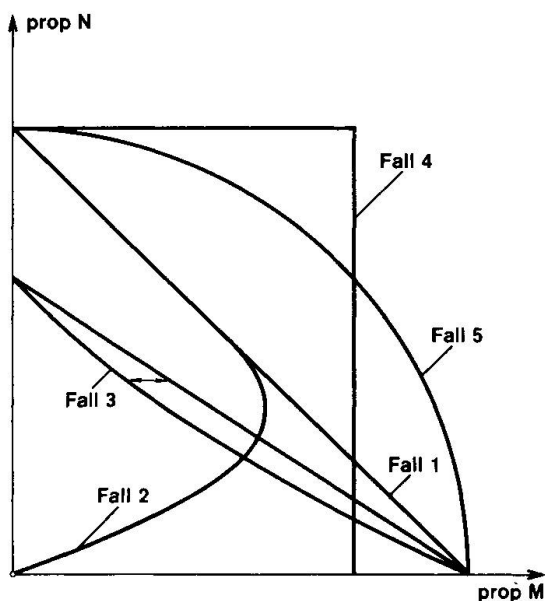


Bild 23

Wenn es so dem Grundsatz nach keine Schwierigkeiten macht, sich die Beanspruchungsdichte als zweidimensionale Größe in dem betrachteten Beispiel vorzustellen, stellt sich nun die Frage nach der Darstellung der Dichte der Grenzbeanspruchung. Für den Ingenieur ist es sicher nützlich, von einer graphischen Darstellung auszugehen, da es ihm dann oft leichter gelingt, die abstrakten mathematischen Formeln in ihren Zusammenhängen zu erkennen. Die Begrenztheit dieser Methode und die Gefahr von Fehlschlüssen wird dabei ebenso wenig verkannt, wie ihr Vorteil Größenordnungen, Genauigkeitsforderungen und Variationsverhalten zu überblicken, geschätzt wird. Es sollen daher nochmals einige zweidimensionale Dichtefunktionen dargestellt werden, um die unterschiedlichen Möglichkeiten zu erkennen. Gleichzeitig werden die zugehörigen Verteilungsfunktionen mit angegeben (Bild 21.1 bis 21.4).

Hieraus wird deutlich, wie sich die zweidimensionale Dichte der Grenzbeanspruchung in unserem Beispiel darstellen läßt. Am einfachsten ist dies der Fall, wenn man schlagartiges Versagen bei bestimmten Lastkombinationen annimmt. Die Dichte stellt sich dann als Band mit dem Rauminhalt "1" und konstanter Höhe dar (Bild 22). Sie ist nur im positiven Quadranten definiert. Die Spur im Grundriß hängt aber sehr von dem Versagensmechanismus des Stabes ab (Bild 23).

1. Handelt es sich um einen stählernen eingespannten Stab, so wird er versagen, wenn die Grenzspannung aus Normalkraft und Moment überschritten wird. Die Spur der Dichte der Grenzbeanspruchung ist eine Linie  $a \cdot N + b \cdot V = \text{const.}$ , worin  $a$  und  $b$  Proportionalitätsfaktoren sind, die so bestimmt werden können, daß die Linie als "Fall 1" bezeichnet werden kann, die die Abszisse und Ordinate unter  $-45^\circ$  schneidet.
2. Ist der Stab sehr schlank, so führt das Überschreiten der kritischen Knickbeanspruchung zum Versagen, und es gibt eine Spur wie sie als "Fall 2" eingezeichnet ist. Je nachdem mit welchen Wirkungen aus der Verformung zu rechnen ist, weicht diese Spur von der Geraden ab.
3. Ist der Stab aus einem spröden Baustoff, der keine Zugspannungen aufnehmen kann, so wird das Versagen durch die gerissene Zugzone beeinflusst. Die Spur verläuft wie als "Fall 3" dargestellt. Handelt es sich um einen armierten Beton, stellt sich eine Spur zwischen der des Falles 1 und der des Falles 3 ein.
4. Ist der Stab so eingespannt, daß Normalkraft und Moment unabhängig voneinander aufgenommen werden, liegt ein Versagensmechanismus vor, der durch die Spur des Falles 4 gekennzeichnet wird (Bild 24).

**Eingespannter Stab bei dem Normalkraft und Moment  
unabhängig voneinander aufgenommen werden**

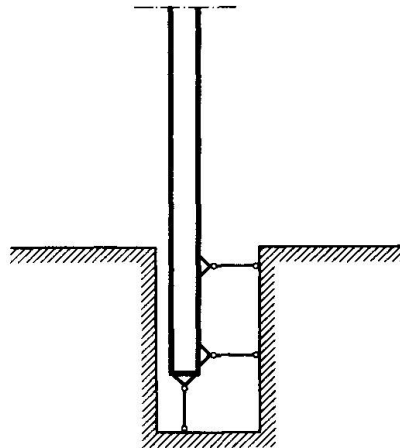


Bild 24

5. Letztlich ist ein Versagen denkbar, das durch die Konstanz der Quadrate der beiden Komponenten aufgezeigt wird, hier ergibt sich die Spur des Falles 5.

Gemischte Fälle oder Übergangssituationen sind denkbar und würden sich durch entsprechende Spuren im positiven zweidimensionalen Quadranten darstellen lassen. Ebenso bereitet es keine grundsätzlichen Schwierigkeiten, statt des abrupten Umspringens der Versagenswahrscheinlichkeit von 0 auf 1 längs einer Linie sich einen Bereich mit unterschiedlicher Dichte als kennzeichnend für die Grenzbeanspruchung vorzustellen. Vorteilhaft ist es auch, hier von einem gekastelten Gradnetz auszugehen, und in ihm die Häufigkeit der experimentell ermittelten Wertepaare, bei denen Versagen am Prototyp

beobachtet wurde, zu zählen. Vorausgesetzt wird dabei, daß der Weg, auf dem dieses Wertepaar erreicht wurde, auf das Versagen selbst keinen Einfluß hat. Dies ist für eine Reihe von praktisch bedeutenden Bauformen und Versagensmechanismen sicher mit der hier erforderlichen Genauigkeit gegeben. Somit kann dann auch der Übergang von der Häufigkeit aus den Stichprobenwerten zur Wahrscheinlichkeitsdichte und von der diskreten Dichte zur stetigen Dichtefunktion gefunden werden. Die Versagenswahrscheinlichkeit ist nun aber nicht mehr als Kopplungsintegral zwischen einer mehrdimensionalen Dichtefunktion und einer mehrdimensionalen Verteilungsfunktion definiert.

Es ist daher auch nicht mehr möglich, parallel zu dem eindimensionalen Fall die zweidimensionale Beanspruchungsdichte und die zweidimensionale Grenzbeanspruchungsdichte zu einer vierdimensionalen zufälligen Veränderlichen zusammenzufassen, von der durch eine wandernde mehrdimensionalen Fläche ein Bereich abgegrenzt wird, dessen Integral die Beziehungen zwischen Bauwerk und Belastung darstellt und die Versagenswahrscheinlichkeit ablesen läßt.

Trotzdem läßt sich aus der zweidimensionalen Beanspruchungsdichte und der zweidimensionalen Grenzbeanspruchungsverteilungsfunktion die Versagenswahrscheinlichkeit berechnen und entsprechend dem eindimensionalen Problem auch veranschaulichen.

Diese Darstellung macht aber die Problematik deutlich, die durch die Beschränkung auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung gegeben ist, bei der nur zufällige Ereignisse behandelt werden und keine Aussagen über den vorangegangenen oder folgenden Zustand möglich sind. So ist es in einem "Fall 3" für die wirkliche Versagenswahrscheinlichkeit durchaus von Bedeutung, ob ein System, das sich im Zustand A befindet, in dem nächsten Zeitpunkt im Zustand B, C oder D befindet. Die Richtung des Belastungsverlaufes entscheidet über die Versagenswahrscheinlichkeit (Bild 25). Während beim eindimen-

**Grundriß der zweidimensionalen Dichte  
f(M,N) bei schlagartigem Versagen  
unter einer bestimmten Lastkombination  
L(M,N)**

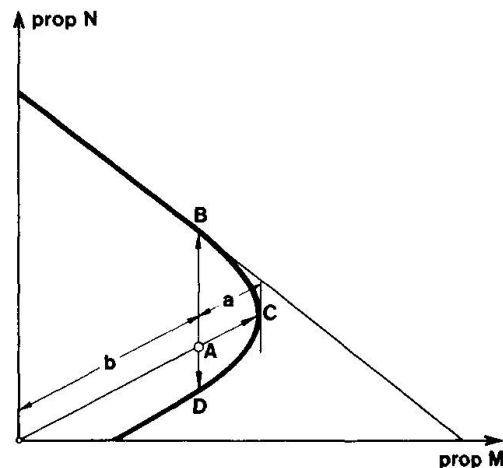


Bild 25

sionalen Problem die Belastungen, trotz der angedeuteten Zählprobleme, noch als "Ereignisse" gedeutet werden konnten, die mit den Grenzbeanspruchungswerten derart in Beziehung gebracht werden konnten, daß mit größer werdenden Belastungswerten größere Versagenswahrscheinlichkeit einhergeht, ist im zwei- und mehrdimensionalen Problem die Möglichkeit gegeben, daß ein Absinken der Größe einer Komponente zu einer Vergrößerung der Versagenswahrscheinlichkeit führen kann. Eine befriedigende Lösung dieses Problemes ist nicht mehr mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung, sondern nur mit der stochastischen Theorie zu erwarten. Dies ist bedauerlich; einerseits ist die Theorie zufälliger Funktionen sehr viel schwieriger zu behandeln als die Wahrscheinlichkeitsrechnung und andererseits interessieren gerade mehrdimensionale Probleme besonders, da die Addition extremer Werte der Komponenten zu unbefriedigenden Bemessungsregeln führen, dies umso mehr, je mehr Komponenten untersucht und als Möglichkeit ins Blickfeld gerückt werden. Ob durch Wahrscheinlichkeitsrechnungen Näherungen stochastischer Probleme gewonnen werden können, müßte an einfachen stochastischen Modellen untersucht werden.

Für diese Untersuchungen bieten sich Markoff'sche Ketten an, die sich relativ übersichtlich an die vom Ingenieur gewollten Gesetzmäßigkeiten anpassen lassen, und die sich gut mit der elektronischen Datenverarbeitung beherrschen lassen.

Es muß zusammengefaßt werden:

- a) Die wirkliche Versagenswahrscheinlichkeit, auch wenn nur zufällige Gegebenheiten berücksichtigt werden sollen, ist nur durch Überlagerung stochastischer Prozesse zu gewinnen.
- b) Besonders die Belastung ist als zufällige Funktion aufzufassen, während es berechtigt ist, die Grenzbelastung als zufälliges Ereignis anzusehen.
- c) Die Notwendigkeit, die Versagenswahrscheinlichkeit aus einem stochastischen Prozeß abzuleiten, ergibt sich sowohl aus der zeitlichen Abhängigkeit als auch bei mehrdimensionaler Beanspruchung.
- d) Es bleibt zu untersuchen, wie weit die Ergebnisse wahrscheinlichkeitstheoretischer Modelle als Näherung betrachtet werden können und wie die Wahrscheinlichkeitsrechnung in Teilbereichen zu einem besseren Verständnis der Sicherheit führen kann.

## 8. Folgerungen für die Praxis

Nach den vorstehenden Betrachtungen stellt sich die Frage, welchen Nutzen die Praxis von einer neuen Sicherheitstheorie erwarten darf. Es ist sicher, daß im Bauwesen die unmittelbare und vollständige Sicherheitsbetrachtung, auch wenn die angedeuteten Zweifel geklärt sein sollten, die außerordentlich seltene Ausnahme sein wird. Der Grund ist, die nötigen statistischen Daten werden fehlen, der Aufwand für die Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit wird zu groß sein, der zu erwartende Gewinn wird zu klein sein, mit einem Wort, es lohnt sich nicht, die Theorie zu weit zu treiben. Ganz anders sieht die Situation für die Normenarbeit aus. Hier ist zu erwarten, daß durch die Betrachtungen ein gewisser Anstoß zur Bemühung um eine objektive Sicherheitsbetrachtung gegeben wird. Dabei

wäre schon viel gewonnen, wenn sich der Ingenieur mehr als bisher Gedanken über die Fehlerhaftigkeit seiner Zahlen machen würde und wenn bei Zahlenangaben die Streuungen mit genannt würden, selbst wenn sie geschätzt würden. Auch grobe Gesetzmäßigkeiten über die Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Auftretens bestimmter Situationen würde den Sinn für das Zufallsgeschehen schärfen und die Problematik sinnvoll in das Bauwesen einführen mit dem Erfolg, überspitzte Verfeinerungen und falsches Verwissenschaftlichen zu entlarven. Darüber hinaus ist in Teilbereichen eine sinnvollere Festlegung von Global- oder Teilsicherheitskoeffizienten als bisher anzunehmen. Nicht zuletzt ist die Chance gegeben, da die Sicherheitstheorie auf der ganzen Welt erörtert wird, daß eine internationale Einheitlichkeit entsteht in der Auffassung und Methode der Bauwerksbemessung, die mit dazu beiträgt

- a) gemeinsame Baustoffmärkte zu verwirklichen;
- b) Bauwerke über nationale Grenzen hinweg zu verkaufen;
- c) Ingenieurleistungen international anzubieten  
und
- d) die Freizügigkeit der Niederlassung für Bauingenieure zu erreichen.

Hierzu ist jedoch notwendig, im Bereich der Sicherheitstheorie international einheitliche Auffassungen und Methoden zu vereinbaren, da eine eindeutige wissenschaftliche Lösung wie gezeigt nicht zu erwarten ist.

Damit stellt sich das Problem der Vereinheitlichung, es muß als Prozeß gesehen werden, der mehrere Phasen zu durchlaufen hat. Auf alle Fälle ist die wachsende Einheitlichkeit der Betrachtung höher zu werten als die Beseitigung letzter wissenschaftlicher Zweifel und Ungenauigkeiten. Umgekehrt darf nicht übersehen werden, daß die Sicherheit gegen mechanisches Versagen in vielen Fällen des Bauwesens nicht die Basis der Bemessung ist, sie muß zwar immer gegeben sein, wird aber oft durch andere Forderungen überboten. In diesen Fällen genügt eine Grenzwertbetrachtung, die nicht nach der wirklichen Versagenswahrscheinlichkeit fragt, sondern sie jenseits einer Grenze garantiert. Dies muß mit einfachen Mitteln möglich bleiben.

Der Wert der Sicherheitstheorie für die Praxis muß überspitzt darin gesehen werden

- a) bessere Faustformeln als bisher für die alltägliche Praxis der Bauwerksbemessung zu begründen;
- b) größere internationale Einheitlichkeit zu ermöglichen, die weitreichende wirtschaftliche Folgen haben wird.

Ich habe versucht, einige Aspekte des Problems "Sicherheitstheorie" aufzuzeigen. Weitere wären hinzuzufügen. Damit sollte eine Ausgangssituation umrissen werden; es liefe auf ein Mißverständnis hinaus, wenn die Betrachtungen gegen eine neue und intensivere Sicherheitstheorie ausgelegt und verstanden würden. Sie sollten im Gegenteil mit ein Stein im Gebäude der neuen Vorstellungen sein, allerdings sollte auch Illusionen abgeschworen werden, die von dem beschwerlichen Weg ablenken könnten, der hier dem wissenschaftlich wie praktisch arbeitenden Bauingenieur aufgegeben ist.

### Literaturverzeichnis

- (1) Fisz M.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, VEB Berlin 1962
- (2) Ang A. H.-S. and Amin M.: Safety factors and probability in structural design, Journal of the Structural Division, 1969, Proceedings of the ASCE
- (3) Buxbaum O.: Verfahren zur Ermittlung von Bemessungslasten schwingbruchgefährdeter Bauteile aus Extremwerten von Häufigkeitsverteilungen, Konstruktion 20 (1968) Nr. 11 Seite 425 - 430

### ZUSAMMENFASSUNG

Es werden einige Gedanken zur Frage der Bauwerkssicherheit vorgetragen, die seit zehn bis zwanzig Jahren neu bedacht und weltweit diskutiert wird. Die Auseinandersetzung kreist um die Begriffe "Sicherheit" und "Versagenswahrscheinlichkeit" im Bauwesen. Dieser Beitrag setzt sich aus mehreren Punkten zusammen, die zum Teil nur lose miteinander verknüpft sind.

### SUMMARY

The paper explains some ideas concerning the safety of structures which since ten until twenty years are reconsidered and worldwide discussed. The explanation hinges on the notions "Safety" and "Probability of failure" in structural engineering. This contribution is composed of several points partly linked loosely together.

### RESUME

On expose quelques idées associées au problème de la sécurité des constructions qui depuis dix à vingt ans est réconsidéré et discuté à l'échelle du monde. La discussion tourne autour des définitions "Sécurité" et "Probabilité de ruine" des structures. La présente contribution est composée de plusieurs points qui partiellement ne sont liés entre eux que librement.