Structures en poutres-caissons reliées par des dalles

Autor(en): **Kliminski, S.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **35 (1975)**

PDF erstellt am: **19.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-26935

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Structures en poutres-caissons reliées par des dalles *

Structures of Box-Girders Joint Together by Slabs

Kastenträger-Brücken mit untereinander verbundenen Platten

S. KLIMINSKI
Docteur-Ingénieur
(Entreprises SPIE-BATIGNOLLES France)

Préface

La détermination des contraintes et des déformations dans les profils minces fermés que constituent les poutres-caissons ne relève pas de théories élémentaires; à vouloir simplifier le problème à coups d'hypothèses, difficiles à justifier, on court le risque d'ignorer dans quelle mesure on ne s'écarte pas trop de la réalité. A une époque où les ponts courbes deviennent de plus en plus nombreux, où les parois des poutres-caissons sont de plus en plus minces, il importait que le comportement de telles poutres soit étudié en prenant essentiellement en compte:

— la flexion transversale des parois,
— la contrainte normale longitudinale engendrée par la torsion non uniforme.

C'est le travail qu'a entrepris d'effectuer M. Kliminski, et pour avoir suivi pas à pas son élaboration, j'ai pu me rendre compte de l'effort continu et passionné qu'a dû fournir l'auteur pour arriver à la volumineuse thèse soutenue récemment.

C'est un résumé de ce travail que je suis heureux de présenter ici, convaincu que tous ceux qui sont intéressés par le calcul de telles structures sauront y trouver à la fois des renseignements directement utilisables et matière à réflexion.

P.M. Géry
Professeur à l'Ecole nationale Supérieure des mines et au Conservatoire national des arts et métiers.

* Extraits d'une thèse de doctorat soutenue le 22 septembre 1971, à la Faculté des sciences de Paris, devant le jury composé de MM. les professeurs: R. Siestrunck (Président), R. Vichnievsky, P. Géry, D. Ceylon.

Introduction

Utilisées fréquemment comme structures d'ouvrages d'art, en métal ou béton précontraint, les poutres-caissons sont une source de calculs parfois complexes.

Lorsqu'il s'agit d'ouvrages en béton précontraint, ces poutres-caissons sont maintenant très souvent reliées transversalement par le seul intermédiaire de dalles souples. Actuellement, la résolution de telles structures ainsi définies est conduite, compte tenu de:

— la rigidité à la torsion des poutres-caissons, la torsion étant supposée uniforme;
— la rigidité à la flexion des dalles de liaison.

Pour des systèmes composés de deux poutres-caissons, ces hypothèses de calculs semblent fournir des résultats satisfaisants. Cependant, appliquées à plusieurs poutres-caissons, celles-ci deviennent caduques.

Deux sollicitations importantes sont en effet négligées:

1° La flexion transversale des parois de caissons.

2° La torsion qui engendre une contrainte normale longitudinale.

L'objet de cette recherche est d'analyser le comportement de structures en plusieurs poutres-caissons, qui peuvent être classées, de par leurs dimensions, dans la catégorie des pièces longues en voile mince, en considérant les deux sollicitations précitées comme fondamentales.

Définition du problème

Les sections transversales des structures comprennent n caissons ($n \geqslant 2$). Chaque caisson est symétrique au moins par rapport à son axe vertical. Les caissons sont liés entre eux par des dalles pouvant être de longueur différente. Ainsi, la section transversale a la forme ci-dessous:

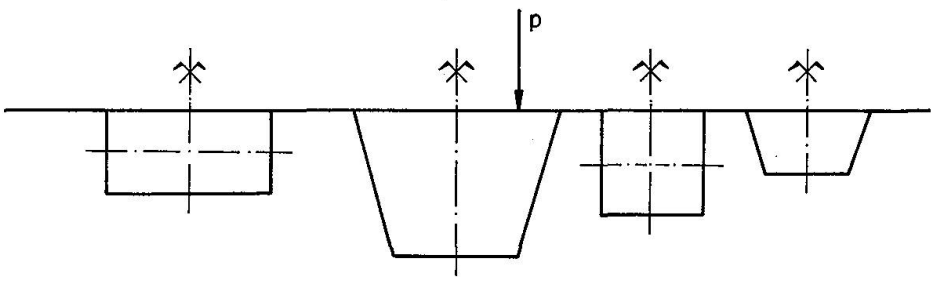

Fig. 1

Les axes longitudinaux des structures d'inertie constante sont rectilignes. Aux deux extrémités de la travée étudiée, les sections transversales sont unies par des diaphragmes. Ceux-ci sont, le plus souvent, inextensibles dans le plan vertical et normal à l'axe longitudinal des structures. Ils sont, par contre, souples à la torsion. Ainsi les sections extrêmes des structures sont parfaitement encastrées à la torsion et chaque poutre-caisson est encastrée élastiquement à la flexion.

La charge appliquée est une charge verticale p, uniformément répartie dans le sens longitudinal, et ponctuelle transversalement (fig. 1).

La position de la charge étant variable transversalement.

Sous une telle charge, la structure est soumise à la flexion et à la torsion.

Si la flexion ne pose pas de problème majeur, la torsion apparaît, en revanche, complexe. En effet, nous avons le phénomène de torsion non uniforme. Les sections transversales sont encastrées à leurs extrémités (gauchissement empêché), et cet encastrement engendre des réactions longitudinales qui sont équilibrées par des contraintes normales.

Nous décomposons la structure, par des coupures effectuées au milieu de chaque dalle de liaison, parallèlement à l'axe longitudinal.

D'une manière générale, nous obtenons ainsi des profils dissymétriques d'un caisson à deux porte-à-faux. La dissymétrie est créée par la longueur différente des porte-à-faux.

Etat des contraintes et déformations – Convention de signes

Soit une tranche de poutre-caisson à deux porte-à-faux, soumise à la compression, flexion et torsion non uniformes.

Les axes Ox et Oy se trouvent dans le plan d'une section transversale, et ce sont ses axes principaux d'inertie (fig. 2).

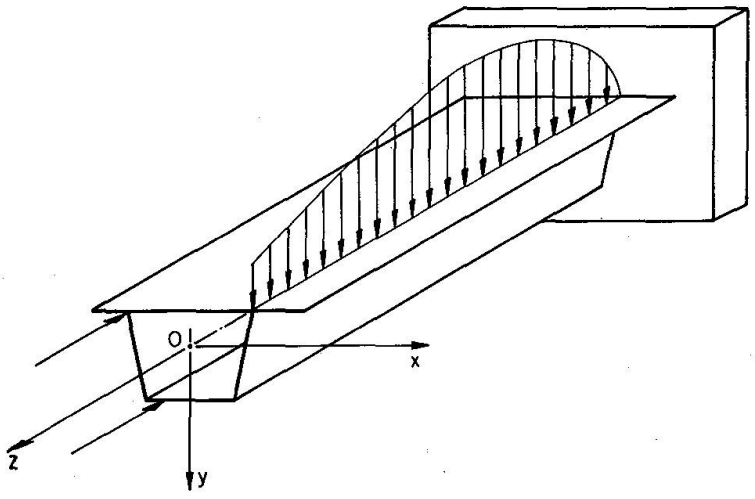

Fig. 2

Suivant les hypothèses de VLASSOV, nous pouvons exprimer l'allongement longitudinal relatif ε, compté positivement suivant la direction de l'axe Oz:

$$\varepsilon = \frac{1-\nu^2}{E}\sigma, \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E_1}$$

et la déformation de distorsion, comptée positivement, contrairement au sens trigonométrique, par:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

Il faut maintenant déterminer les contraintes σ et τ.

Pour les profils ouverts, cette détermination se fait à l'aide des formules suivantes développées par VLASSOV:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x}\cdot y - \frac{M_y}{I_y}\cdot x + \frac{B}{I_\omega}\cdot\omega \tag{1}$$

$$\tau = -\left(\frac{T_y\cdot S_x}{I_x\cdot\delta} + \frac{T_x\cdot S_y}{I_y\cdot\delta} + \frac{M_\omega\cdot S_\omega}{I_\omega\cdot\delta}\right) \tag{2}$$

Le sens des symboles est expliqué en notations.

L'effort normal N est compté positif quand il est dirigé le long de l'axe O_z.

Les moments (M_x) et (M_y) sont positifs quand leurs vecteurs ont les directions des axes O_x et O_y.

On donne au moment de torsion C le signe positif comme sur la fig. 3.

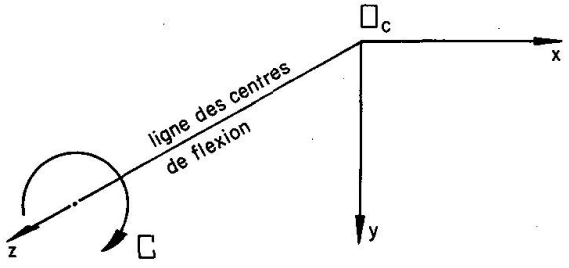

Fig. 3

On voit qu'avec la torsion non uniforme une nouvelle force généralisée apparaît dans les formules: c'est le bimoment B. Contrairement à un moment, le bimoment représente une force statiquement équivalente à zéro.

Le moment de torsion fléchie (M_ω) est lié avec le bimoment par la relation: $M_\omega = \frac{dB}{dz}$.

Pour les profils fermés, on peut déterminer ces contraintes par les formules semblables, développées par OUMANSKY, OURBAN [26], [27], [30] et [33]:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} \cdot y - \frac{M_y}{I_y} \cdot x + \frac{B}{I_{\hat{\omega}}} \cdot \hat{\omega} \tag{3}$$

$$\tau = \frac{C}{\Omega \cdot \delta} - \left(\frac{T_y \cdot \hat{S}_x}{I_x \cdot \delta} + \frac{T_x \cdot \hat{S}_y}{I_y \cdot \delta} + \frac{M_{\hat{\omega}} \cdot S_{\hat{\omega}}}{I_{\hat{\omega}} \cdot \delta} \right) \tag{4}$$

La différence entre ces formules et celles des profils ouverts porte sur les caractéristiques géométriques. En outre, dans la formule de contraintes tangentielles, on rencontre un terme supplémentaire, qui exprime la torsion uniforme. Il apparaît cependant que, dans le cas du profil étudié pour le calcul des contraintes, on ne peut utiliser aucune de ces formules, parce que:

1° Le profil en question est découpé dans une section transversale continue.

2° Le profil est composé, car il est constitué en même temps par un profil fermé et deux profils ouverts.

Nous déterminons les contraintes pour un tel profil, compte tenu de la ressemblance des formules (1), (2) avec (3) et (4).

Il est à remarquer que, dans les nouvelles formules, certains termes vont disparaître. Soit une poutre-caisson à deux porte-à-faux, dont la section transversale est découpée dans une section continue. L'effet des coupures est remplacé par (q) et (m), comme sur la fig. 4. (Nous négligeons les glissements longitudinaux au droit des coupures.)

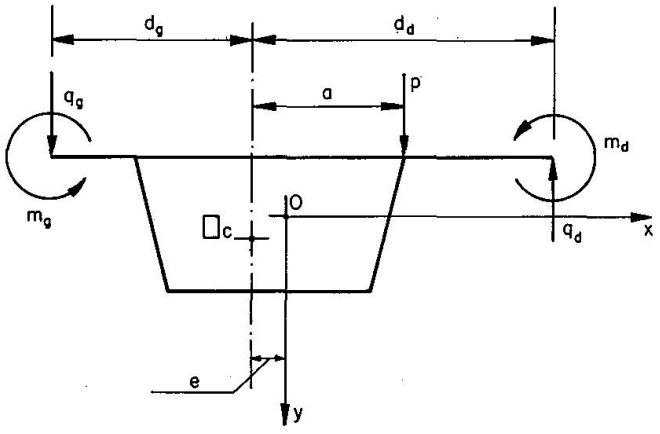

Fig. 4

Considérons les axes $O\,x\,y$ comme les axes principaux d'inertie. En effet, nous pouvons admettre, avec une bonne approximation, que ces axes sont verticaux et horizontaux. La dissymétrie de la section est provoquée seulement par la longueur différente des porte-à-faux. Or, l'application numérique montre que dans ce cas les axes principaux d'inertie sont quasiment verticaux et longitudinaux. Ceci confirme l'étude de M. RENARD [20], dans laquelle la différence de longueur des porte-à-faux atteint 3 m, ce qui est d'ailleurs difficilement réalisable en pratique.

Les formules relatives aux contraintes du profil étudié, avec les nouvelles notations sectorielles, prennent la forme suivante:

$$\sigma = \frac{M}{I} \cdot y + \frac{B}{I_{[\omega]}} \cdot [\omega] \tag{5}$$

$$\tau = \frac{C}{\Omega \cdot \delta} - \frac{T \cdot \hat{S}_x}{I_x \cdot \delta} - \frac{M_{[\omega]} \cdot \Gamma}{I_{[\omega]} \cdot \delta} \tag{6}$$

Dans ces formules $[\omega]$, $I_{[\omega]}$, $\hat{S}_x$ et Γ dépendent de la section transversale. B et $M_{[\omega]}$, par contre, dépendent de la longueur, et se déterminent de l'équation de torsion non uniforme.

Avant de définir ces grandeurs, nous analysons l'hyperstaticité des structures.

Inconnues hyperstatiques

Soit un système plan à (n) caissons reliés par des dalles, soumis aux forces extérieures quelconques.

Un tel système est à la fois hyperstatique intérieur et extérieur. En effet, chaque caisson représente un portique fermé, trois fois hyperstatique – l'hyperstaticité intérieure.

Pour lever totalement l'hyperstaticité du système, il faut pratiquer des coupures dans chaque dalle de liaison. On crée, ainsi, trois inconnues hyperstatiques par coupure – l'hyperstaticité extérieure. Chaque coupure implique l'introduction de trois inconnues hyperstatiques, qui sont:

— effort tranchant q, $-q$;
— effort normal N, $-N$;
— moment fléchissant m, $-m$.

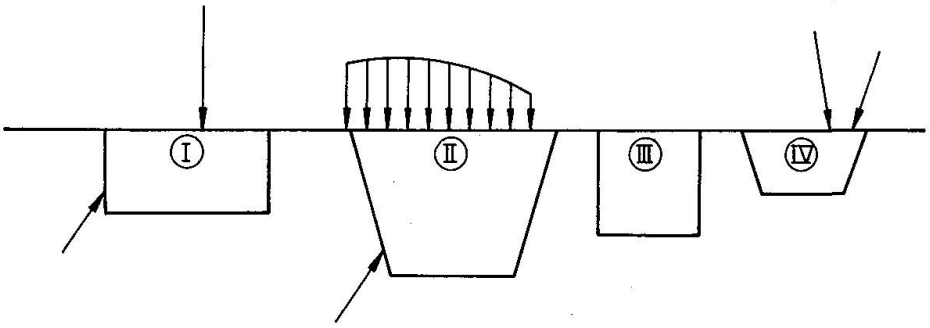

Fig. 5

Le système de la fig. 5 aura les inconnues hyperstatiques représentées sur la fig. 6.

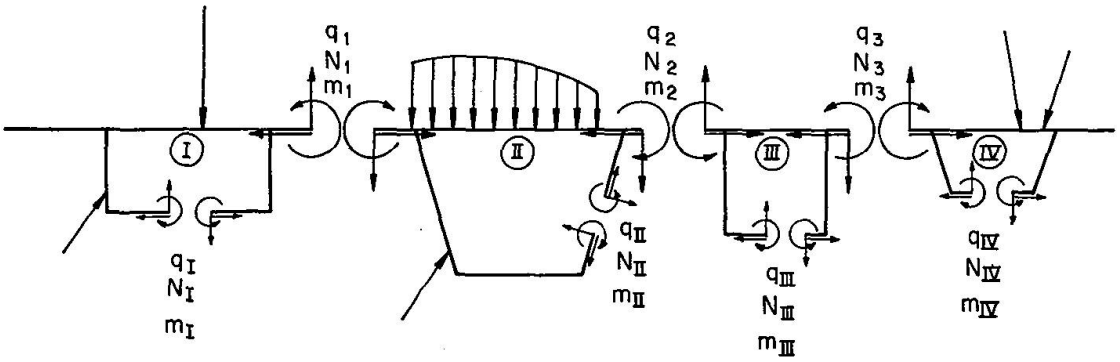

Fig. 6

Le degré d'hyperstaticité total du système peut être exprimé par la formule: $3n + 3(n - 1)$, n étant le nombre des caissons.

Pour quatre caissons, par exemple (fig. 5 et fig. 6), le degré d'hyperstaticité est: $3 \times 4 + 3 \times (4 - 1) = 12 + 9 = 21$, car $n = 4$. Il y a 12 inconnues hyperstatiques intérieures et 9 inconnues hyperstatiques extérieures.

Pour un seul caisson ($n = 1$), nous avons:
$3 \times 1 + 3 \times (1 - 1) = 3$. En effet, le système ne possède que trois inconnues hyperstatiques intérieures.

Dans les cas courants, les structures en question sont soumises aux charges verticales seules. Ceci réduit le nombre total des inconnues hyperstatiques. A chaque coupure de la dalle de liaison, l'effort normal N devient nul.

Le degré d'hyperstaticité du système s'exprime par la formule suivante:
$3n + 2(n - 1)$, où (n) est également le nombre de caissons.

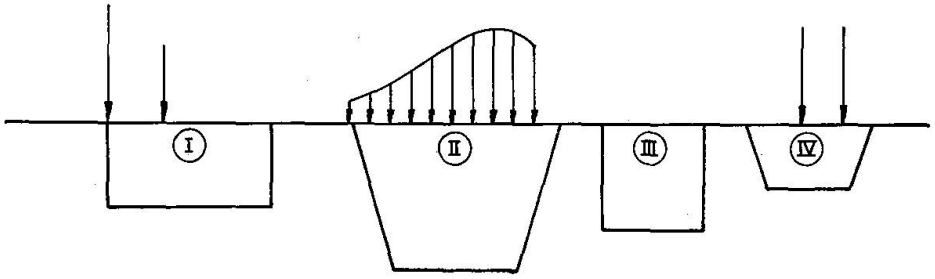

Fig. 7

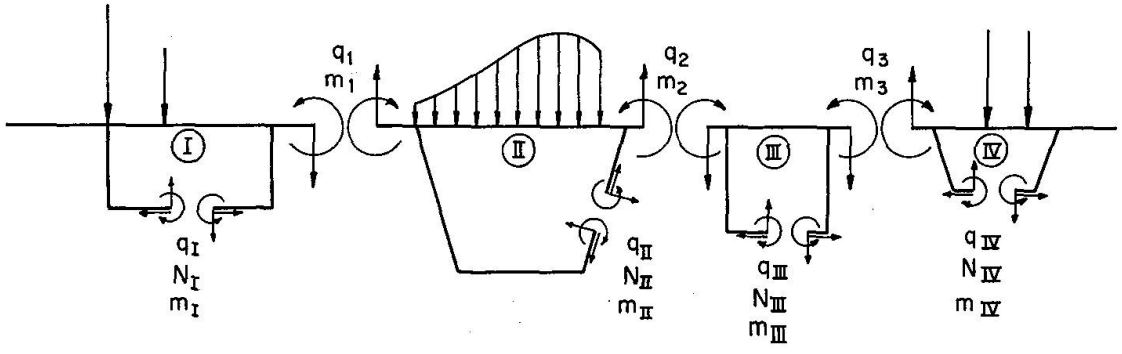

Fig. 8

Pour le système de la fig. 7, le nombre d'inconnues hyperstatiques est: $3 \times 4 + 2(4-1) = 18$, car $n = 4$. Il y a toujours 12 inconnues hyperstatiques intérieures et 6 inconnues hyperstatiques extérieures.

Les structures le plus souvent rencontrées ont les sections transversales symétriques, et de cette symétrie découle une simplification importante:

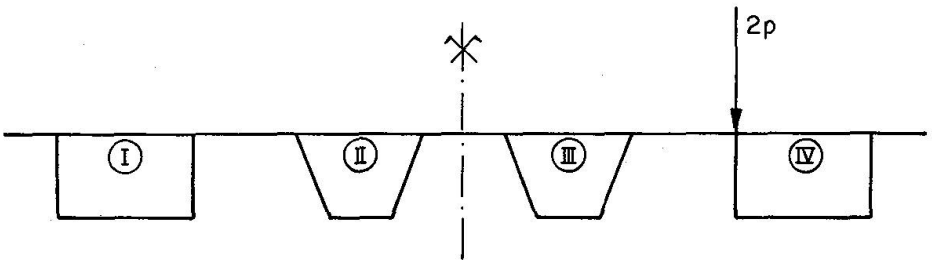

Fig. 9

En effet, nous pouvons décomposer la charge extérieure selon le procédé de la symétrie et de l'antisymétrie. Ceci réduit le nombre d'inconnues hyperstatiques (fig. 10 et 11).

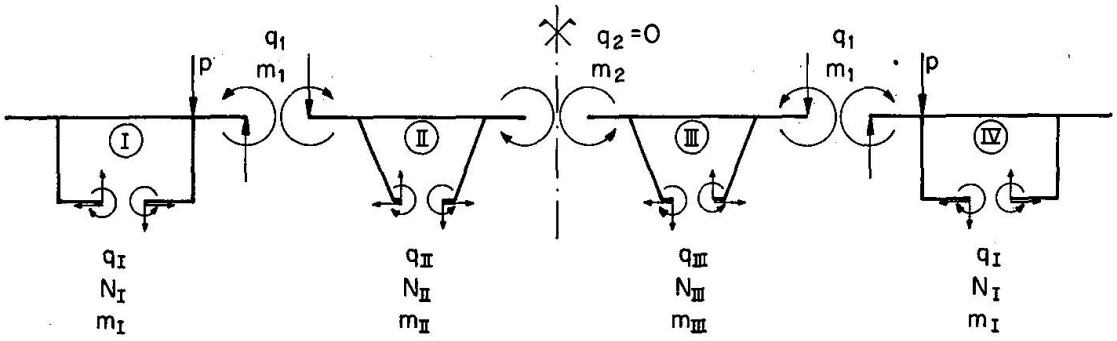

Fig. 10. Chargement symétrique.

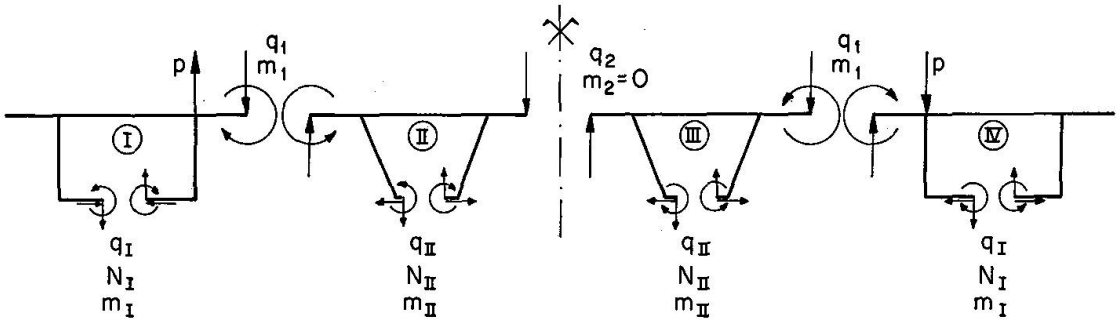

Fig. 11. Chargement antisymétrique.

Jusqu'à présent, nous avons analysé l'hyperstaticité des systèmes plans (sections transversales des structures). Il apparaît cependant que les structures étudiées forment des systèmes spatiaux. En conséquence, toutes les inconnues hyperstatiques ne sont

pas des nombres mais des fonctions de la longueur (z). Pour simplifier le problème nous séparons les inconnues intérieures et extérieures.

Résumons la marche à suivre en nous reportant au caisson ① de la fig. 10.

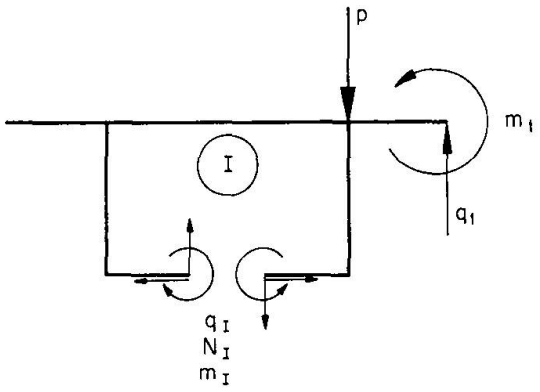

Fig. 12

On détermine d'abord les inconnues hyperstatiques intérieures (q_I), (N_I) et (m_I), dues aux charges extérieures; les inconnues (q_1) et (m_1) étant considérées aussi comme les charges extérieures.

Afin de pouvoir considérer le caisson comme un système plan, il faut déterminer les forces axiales qui apparaissent dans les parois. Ces forces proviennent de la différence des cisaillements sur deux faces d'une tranche élémentaire (dz) (fig. 13), et la tranche unitaire se comporte comme un portique élastique.

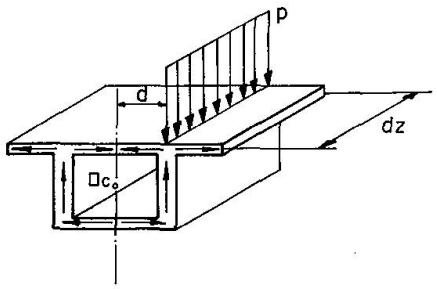

Fig. 13.

Les cisaillements en question sont définis par la formule (6), dans laquelle le dernier terme exprime les cisaillements provenant de la torsion non uniforme. Nous négligeons ce terme dans le calcul des inconnues hyperstatiques.

Si l'on voulait tenir compte de ces cisaillements, il faudrait définir le moment de torsion fléchie. Celui-ci ne peut pas être déterminé autrement que par la résolution de l'équation de torsion non uniforme. Comme le moment extérieur de torsion (c) dépend de valeurs $(q)_1$ et $(m)_1$, il se trouve que l'on aurait pour une équation trois inconnues:

$$(\Theta), (q)_1 \text{ et } (m)_1$$

Il est donc impossible de déterminer par cette équation le moment de torsion fléchie, indispensable à la définition de telles contraintes.

Ensuite nous rendons le système isostatique. Nous avons donc trois états unitaires dus aux charges extérieures (fig. 14).

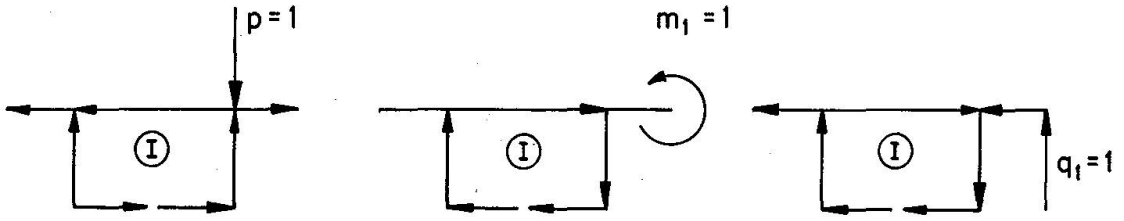

Fig. 14

A chacun de ces trois états sont associés trois états unitaires relatifs aux inconnues q_I, N_I et m_I (fig. 15).

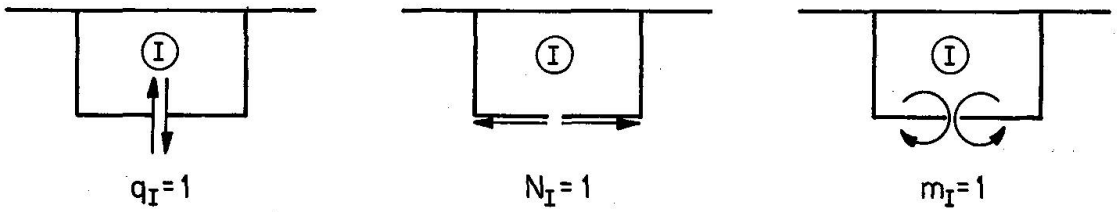

Fig. 15

Les inconnues recherchées (q_I), (N_I) et (m_I) se déterminent à partir d'un système de trois équations linéaires, dont la forme matricielle est:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_I \\ N_I \\ m_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{1P} \\ A_{2P} \\ A_{2P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matrice (a_{ij}) est indépendante du système des forces extérieures, et elle est symétrique $(a_{i\,j} = a_{j\,i})$. Les coefficients $(a_{i\,j})$ et $(A_{\,iP})$ se calculent habituellement par les intégrales de MOHR.

Les moments fléchissants réels dans les parois sont à multiplier par les valeurs réelles de (p), (m_1) et (q_1). Ces deux derniers étant les inconnues hyperstatiques extérieures à déterminer.

Déterminons d'abord les inconnues hyperstatiques extérieures pour une travée isostatique.

La poutre est soumise à la charge extérieure (p), d'excentricité constante (d) (fig. 16).

Puisque la poutre est isolée, il faut rétablir la continuité transversale de la structure en appliquant, le long de la coupure, des inconnues hyperstatiques $q_{(z)}$ et $m_{(z)}$.

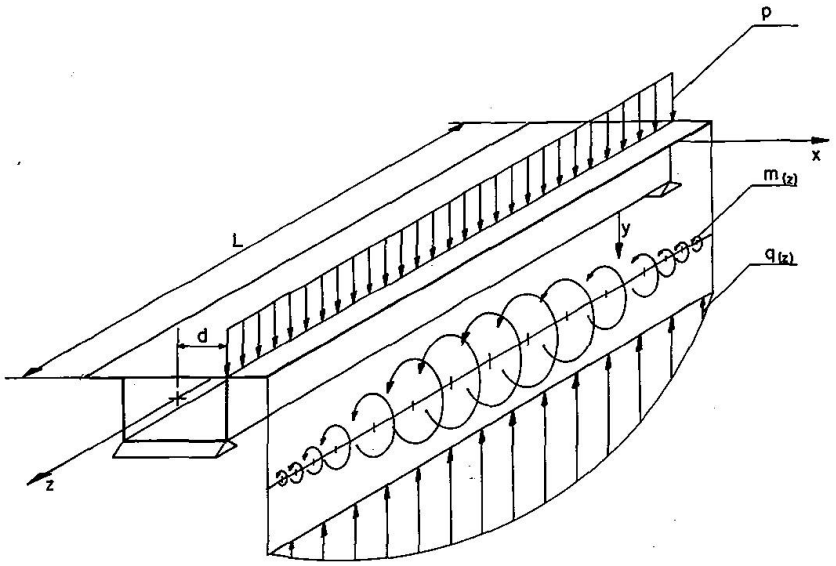

Fig. 16

Nous développons la charge extérieure (p) et les fonctions $q_{(z)}$ et $m_{(z)}$, en séries de FOURIER:

$$p = \sum_{n=1}^{n=\infty} p_n \cdot \sin \frac{(2n-1)\pi z}{L} \text{ avec } p_n = \frac{4p}{\pi} \frac{1}{(2n-1)}$$

$$q_{(z)} = \sum_{n=1}^{n=\infty} q_n \cdot \sin \frac{(2n-1)\pi z}{L} \text{ avec } q_n = \text{inconnue}$$

$$m_{(z)} = \sum_{n=1}^{n=\infty} m_n \cdot \sin \frac{(2n-1)\pi z}{L} \text{ avec } m_n = \text{inconnue}$$

Pour écrire que les déplacements sont nuls, au droit de la coupure, il faut considérer une force et un couple auxiliaire qui correspondent à $q_{(z)}$ et $m_{(z)}$.

La somme des travaux de la force ou du couple auxiliaire unités, dans les déplacements dus aux inconnues $q_{(z)}$ et $m_{(z)}$, et à la charge extérieure, doit être nulle. Ceci se traduit par un système d'équations linéaires (autant d'équations que d'inconnues) que nous pouvons exprimer sous forme matricielle:

$$[a] \cdot [x] + [A] = [0]$$

La matrice $[a]$ se compose de quantités $(a_{i\,j})$ qui représentent le travail de la force auxiliaire $_{(i)}$ dans les déplacements dus à une force unitaire $_{(j)}$, relative à l'inconnue hyperstatique $_{(j)}$. Cette matrice ne dépend pas du système des forces extérieures. Elle est symétrique $(a_{ij}) = (a_{ji})$.

La matrice $[x]$ est une matrice colonne des inconnues (q_1); (m_1); (q_2); (m_2), etc.

La matrice $[A]$ est une matrice colonne des quantités (A_{iP}), qui représentent le travail de la force auxiliaire $_{(i)}$ dans les déplacements dus aux forces extérieures $_{(P)}$.

Les quantités (a_{ij}) sont des sommes de trois termes:

$$a_{ij} = (a_{ij})_1 + (a_{ij})_2 + (a_{ij})_3$$

$(a_{i\ j})_1$ provient de la flexion longitudinale verticale.

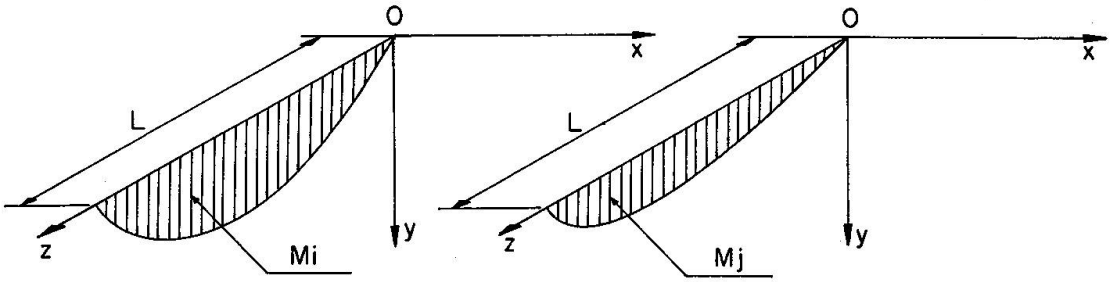

diagramme des Mi diagramme des Mj

Fig. 17

$$(a_{ij})_1 = \int_o^L \frac{M_i \cdot M_j}{EI}\, dz \tag{7}$$

$(a_{ij})_2$ représente le travail de torsion uniforme.

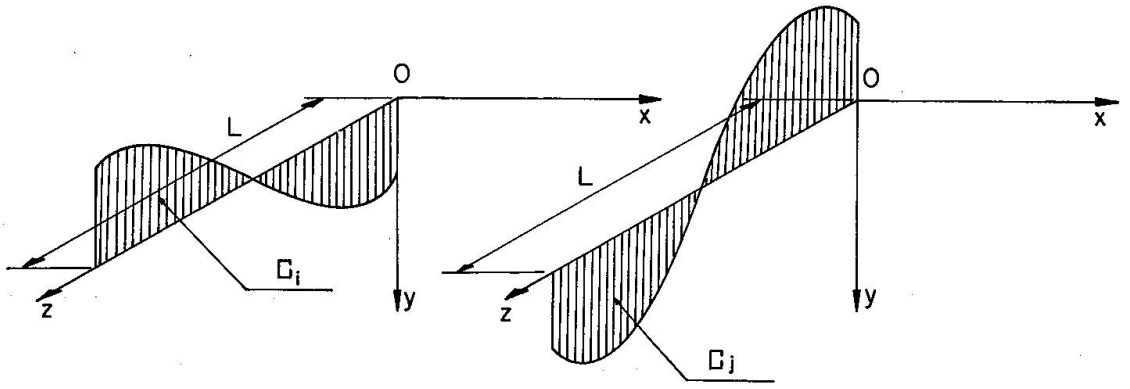

diagramme des Ci diagramme des Cj

Fig. 18

$$(a_{ij})_2 = \int_o^L \frac{C_i \cdot C_j}{GI_d}\, dz \tag{8}$$

$(a_{i\ j})_3$ représente le travail de flexion transversale qui provient de la déformation des dalles de liaison et des parois des caissons. Nous avons dans ce cas l'intégrale double étendue au contour $_{(s)}$ de la section, et à la longueur $_{(L)}$ de la travée.

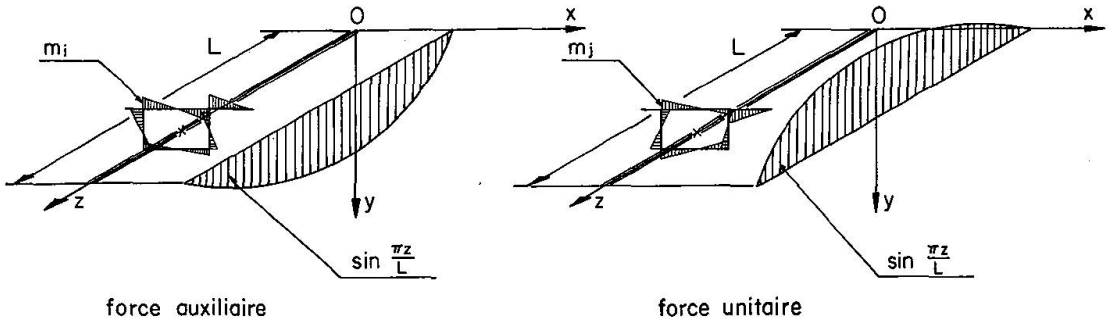

Fig. 19

$$(a_{ij})_3 = \int_0^L \int_s \frac{m_i \cdot m_j}{E I_{(s)}} ds\, dz \tag{9}$$

dans laquelle $I(s)$ concerne l'inertie des parois.

De même chaque (A_{iP}) est la somme de trois termes:

$$A_{iP} = (A_{iP})_1 + (A_{iP})_2 + (A_{iP})_3$$

Le calcul de chaque terme se fait de la même façon que celui des (a_{ij}). Les diagrammes de moments relatifs à la force auxiliaire sont les mêmes; les diagrammes de moments dus à la force unitaire sont remplacés par les diagrammes des moments dus aux forces extérieures.

Les intégrales (7), (8), (9) concernent toute la section de la structure.

Un ou plusieurs $(a_{ij})_n$ ou $(A_{iP})_n$ peuvent être nuls, en raison de la symétrie de la section transversale et de la symétrie des charges.

Pour une travée encastrée élastiquement à la flexion à ses deux extrémités, le problème consiste à rechercher les fonctions $q_{(z)}$ et $m_{(z)}$ correspondant à des moments d'encastrement.

On procède de la même façon que dans le cas de la travée isostatique. La charge extérieure étant le moment d'encastrement appliqué aux abouts de la travée.

On détermine enfin les inconnues (q) et (m) comme la somme de deux effets: celui de la charge (p) et celui des moments d'encastrement.

Un tel calcul permet de déterminer les valeurs des inconnues q et m, au milieu de la travée (les coefficients inconnus q_n et m_n se déduisent du coefficient p_n qui caractérise la charge extérieure).

Par contre, nous ne connaissons pas l'équation de la courbe suivant laquelle sont réparties les inconnues $q_{(z)}$ et $m_{(z)}$ le long de la travée. Nous savons que les courbes sont symétriques par rapport au milieu de la travée ($p = C_{te}$), et obtiennent zéro aux extrémités (fig. 20).

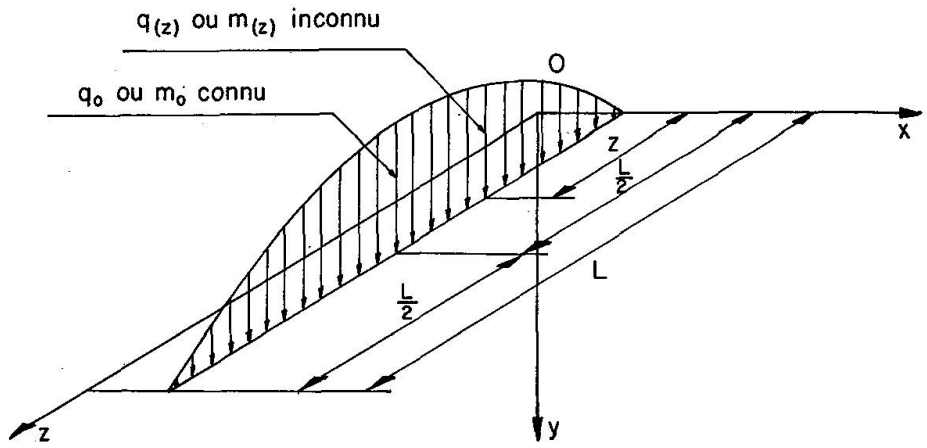

Fig. 20

Nous supposons que les fonctions inconnues sont réparties, soit suivant une loi sinusoïdale, soit suivant une parabole du deuxième degré. Seules l'application numérique et la vérification expérimentale peuvent démontrer quelle est la fonction qui répond le mieux à ce problème.

Hypothèses de la torsion

Pour la détermination des inconnues hyperstatiques, nous avons été obligés de simplifier le problème en considérant la torsion comme uniforme, mais à partir de maintenant nous adoptons les hypothèses de OUMANSKY et BENSCOTER. Ces auteurs ont défini une «fonction de gauchissement».

Les hypothèses se définissent ainsi:

1° Le contour de la section transversale est considéré comme indéformable. Pour les constructions en métal, cette indéformabilité est assurée par les raidisseurs transversaux. On adopte cette hypothèse également même pour les pièces sans raidisseur qui ont des parois plus épaisses: les profilés laminés, par exemple [16], [26] et [33].

Dans les constructions en béton précontraint, la section est constituée de voiles relativement épais. Les intersections des âmes et des hourdis sont renforcées par des goussets dans lesquels on loge des câbles. Ceci assure l'indéformabilité du contour même en cas de constructions peu entretoisées.

2° Les contraintes normales longitudinales dues à la torsion non uniforme sont réparties dans la section de la même façon que le gauchissement dans le cas de torsion uniforme.

3° Les contraintes de cisaillement sont uniformément distribuées sur toute l'épaisseur de la paroi. Cette hypothèse concerne les pièces longues à parois minces, dont les dimensions sont telles que:

$$\frac{\delta}{a} \leqslant 0{,}1, \quad \frac{a}{L} \leqslant 0{,}1$$

δ: épaisseur de la paroi
a: hauteur de la paroi
L: longueur de la barre.

Pour les constructions précontraintes, on néglige l'effet des câbles sur la rigidité à la torsion. Selon VLASSOV [32], pour les pièces précontraintes au lieu de GI_d relative aux sections non précontraintes, il faudrait prendre:

$$GI_d - R \cdot \Xi$$

où:

I_d = le moment d'inertie relatif à la torsion uniforme,

R = la résultante des forces de précontrainte,

Ξ = l'expression qui dépend de la géométrie de la section et de la position du point d'application de R.

Ce problème, à notre connaissance, n'a été traité que par VLASSOV pour une barre de section ouverte dans laquelle le tracé du câble est rectiligne. Il faut cependant remarquer que, lorsque la section est composée d'éléments fermés et ouverts, l'effet de câbles est moindre.

Rappel des caractéristiques géométriques sectorielles

Comme nous l'avons déjà remarqué, les caractéristiques sectorielles définissent le gauchissement des sections. Nous rappelons la définition de ces caractéristiques. Elles correspondent, dans leur appellation, à celles qui sont données par les principaux auteurs ayant pris part à l'élaboration de la thérie classique des barres à parois minces. Parmi ces auteurs, on peut citer particulièrement VLASSOV et WAGNER.

Profils ouverts

— Surface sectorielle $[L]^2$, appelée aussi coordonnée sectorielle.

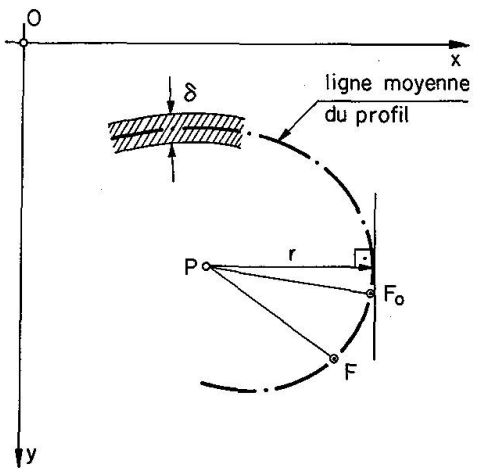

Fig. 21

Soit: P = un pôle arbitraire,
PF_o = rayon initial,
PF = rayon mobile.

Conformément à la fig. 21, la surface sectorielle est définie par l'intégrale:

$$\omega = \int_o^s r\,ds$$

La surface sectorielle est comptée comme positive, si le rayon mobile PF qui l'engendre tourne dans le sens trigonométrique vu selon Oz.

— *Moment statique sectoriel* $[L]^4$; il est donné par: $S_\omega = \int_A \omega\,dA$.
— *Moments linéaires sectoriels* $[L]^5$; ils sont donnés par les intégrales: $S_{\omega y} = \int_A x\,\omega\,dA$, $S_{\omega x} = \int_A y\,\omega\,dA$.
— *Moment d'inertie sectoriel* $[L]^6$; *il s'exprime par l'intégrale:* $I_\omega = \int_A \omega^2\,dA$

Profils fermés

Les caractéristiques sectorielles des profils fermés ont été établies par les auteurs russes [26], [27], [30] et [33] et ont pour but d'élargir la théorie de VLASSOV concernant les profils ouverts.

— *Surface sectorielle des profils fermés:* appelée aussi surface de gauchissement. Elle s'établit par l'analyse d'un profil fermé soumis à la torsion uniforme (le gauchissement est libre) et s'exprime par l'expression:

$$\hat{\omega} = \omega - \Omega \frac{\int_o^s \frac{ds}{G\delta}}{\oint \frac{ds}{G\delta}}$$

Les autres caractéristiques ont la même forme que celles des profils ouverts.

Centre de flexion

La surface sectorielle des profils ouverts et fermés que l'on trouve dans les formules (1) et (3) est calculée par rapport au *centre de flexion,* également appelé *centre de cisaillement.*

La position du centre de flexion dépend uniquement des caractéristiques géométriques de la section transversale, et sa détermination, pour les profils ouverts ou fermés, se fait aisément à partir d'un pôle arbitraire P (fig. 22).

$$\begin{aligned} b_x - a_x &= -\frac{1}{I_x}\int_A y\,\omega_P\,dA \\ b_y - a_y &= \frac{1}{I_y}\int_A x\,\omega_P\,dA \end{aligned} \tag{10}$$

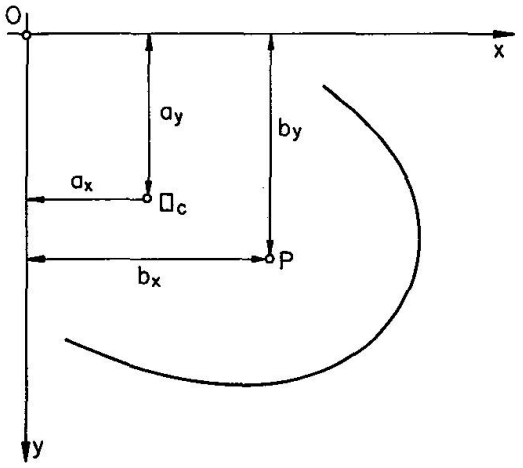

Fig. 22

Caractéristiques sectorielles des profils composés d'éléments fermés et ouverts

Pour définir les caractéristiques sectorielles des profils composés d'éléments fermés et ouverts, il faut définir la surface sectorielle qui se compose dans ce cas de trois paramètres:

— de la surface sectorielle du profil fermé $\hat{\omega}$, et

— des surfaces sectorielles de profils ouverts ω.

Considérons le profil étudié comme indépendant (les extrémités des porte-à-faux sont définies par les coupures).

Nous prenons en compte l'égalité de gauchissement suivant les arêtes $I - I'$ et $II - II'$ (fig. 23) pour le caisson et les porte-à-faux.

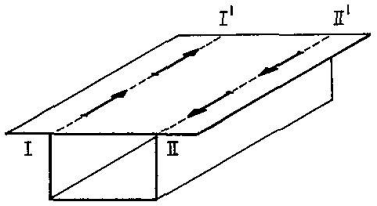

Fig. 23

Notons qu'un raisonnement semblable est fait pour l'étude de la torsion d'une coque de navire ayant une structure composée. La coque est soumise à la torsion par une vague biaise rencontrée par le navire [22], [27].

La torsion étant non uniforme, conformément aux hypothèses, le gauchissement doit être exprimé par la fonction de gauchissement:

$$\zeta = -[\omega] \cdot \frac{d\vartheta}{dz} \tag{11}$$

On voit que le gauchissement de la section est proportionnel à la surface sectorielle. Pour qu'il y ait l'égalité de gauchissement à la naissance des porte-à-faux, il faut que les surfaces sectorielles calculées pour les parties fermées et

ouvertes soient égales aux points I et II (fig. 23). Cette condition nous conduit à exprimer la surface sectorielle des parties ouvertes par:

$$|\omega| = \int_o^s r ds + D_o$$

Les autres caractéristiques sectorielles qui concernent les profils composés se calculent à partir de la surface sectorielle. Celle-ci se compose de $\hat{\omega}$ et de la nouvelle valeur pour la partie ouverte déterminée ci-dessus $|\omega|$. Nous avons donné leurs symboles en notations.

Déterminons maintenant la position du point sectoriel nul, et celle du centre de flexion.

Connaissant le gauchissement, on peut écrire pour la contrainte normale:

$$\sigma = E_1 \cdot \frac{d\zeta}{dz}$$

et, compte tenu de (11), nous avons:

$$\sigma = -[\omega] \cdot \frac{d^2\vartheta}{dz^2} \cdot E_1 \tag{12}$$

La barre est soumise uniquement à un moment de torsion, la contrainte σ doit donc satisfaire aux équations d'équilibre:

$$\left.\begin{aligned} N &= \int_A \sigma dA = 0 \\ M_y &= \int_A \sigma x dA = 0 \\ M_x &= \int_A \sigma y s A = 0 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

En introduisant (12) dans les équations (13), on trouve:

$$\boxed{\begin{aligned} &\int_A [\omega] dA = 0 \\ &\int_A [\omega] x dA = 0 \\ &\int_A [\omega] y dA = 0 \end{aligned}} \tag{14}$$

Le problème est ramené à celui des profils ouverts. Les équations (14) permettent de trouver le point où le gauchissement est nul, et les coordonnées du centre de flexion s'expriment par les formules [10].

Cisaillements d'«effort tranchant» et de «torsion»

On détermine les caractéristiques $\hat{S}_x$ et Γ, indispensables pour la définition des contraintes tangentielles, par l'analyse des contraintes dues à l'effort tranchant et à la torsion.

Soit une tranche de poutre-caisson à deux porte-à-faux, fléchie dans un plan parallèle au plan (O_y, O_z) par un moment (M) (fig. 24). Déterminons les cisaillements d'«effort tranchant» (T) provenant de cette flexion.

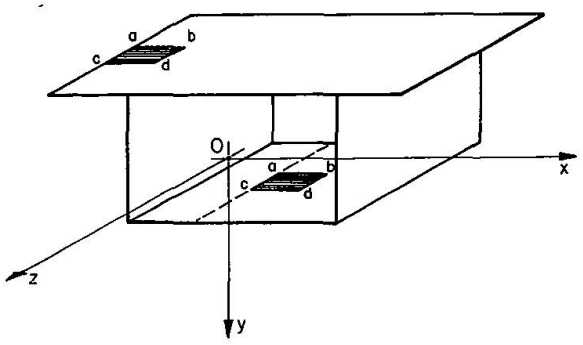

Fig. 24

Soit *abcd* l'élément découpé dans la paroi en deux endroits différents (fig. 25).

1° Le côté *ac* est confondu avec le bord de l'un des porte-à-faux.

2° L'élément est situé dans un des plans de la poutre-caisson (*ac* restant // à l'axe *Oz*).

Partant du point *a*, nous déterminons les flux de cisaillements pour un point couvrant *b*.

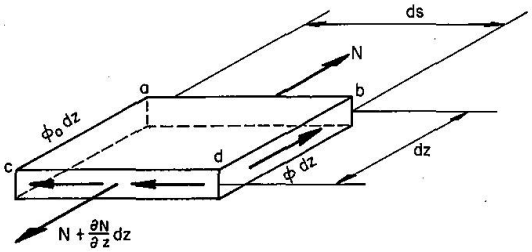

Fig. 25

L'équilibre de l'élément *abcd* implique que:

$$\frac{\partial N}{\partial z} = \phi - \phi_o \rightarrow \phi = \frac{\delta N}{\delta z} + \phi_o$$

D'autre part, en prenant l'équation due à NAVIER, nous obtenons pour le flux de cisaillement:

$$\phi = \frac{T \cdot S_x}{I_x} + \phi_o \tag{15}$$

Le long des bords libres des porte-à-faux, les tensions tangentielles sont nulles $(\Phi_o = 0)$, nous avons:

$$\boxed{\Phi = \frac{T \cdot S_x}{I_x}} \tag{16}$$

Le caisson, par contre, est un profil fermé et il faut déterminer le flux supplémentaire constant Φ_o. Pour calculer ce flux, on pratique une coupure passant par le côté *ac* de l'élément *abcd*.

Considérons le point (P) de position quelconque comme le centre de flexion d'un profil fermé (fig. 26).

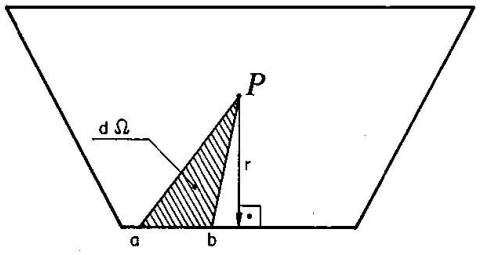

Fig. 26

Le moment de torsion autour de l'axe parallèle à Oz, et passant par P, est tel que:

$$C = \oint \Phi r\, ds \tag{17}$$

Compte tenu de la relation (15), la relation (17) devient:

$$C = \oint \frac{T \cdot S_x}{I_x} r\, ds + \oint \Phi_o r\, ds$$

d'où:

$$\Phi_o = \frac{C}{\oint r\, ds} - \frac{\dfrac{T}{I_x} \oint S_x r\, ds}{\oint r\, ds} \tag{18}$$

Puisque le plan de sollicitation passe par P, $C = 0$, et l'expression (18) devient:

$$\Phi_o = -\frac{1}{\Omega} \cdot \frac{T}{I_x} \cdot \oint S_x r\, ds$$

et l'équation (15) s'écrit:

$$\Phi = \frac{T}{I_x} \cdot \left(S_x - \frac{1}{\Omega} \oint S_x r\, ds \right)$$

Celle-ci peut être exprimée sous la forme suivante:

$$\boxed{\Phi = \frac{T \cdot \hat{S}_x}{I_x}} \tag{19}$$

dans laquelle le moment statique pour les profils fermés est:

$$\boxed{\hat{S}_x = S_x - \frac{1}{\Omega} \cdot \oint S_x r\, ds} \tag{20}$$

A l'aide des formules (16), (19) et (20), nous pouvons déterminer les cisaillements dus à l'effort tranchant en tout point de la paroi du profil étudié.

Remarque: Pour la détermination des cisaillements d'«effort tranchant», dans un profil composé, les principes de la résistance des matériaux classiques, sont encore applicables. En effet, dans la partie fermée du profil, dans laquelle on a pratiqué une coupure, les cisaillements sont entièrement déterminés par la statique. Cela signifie que le système est isostatique du point de vue de ses liaisons internes, et il est strictement complet.

D'autre part, le profil ainsi composé est hyperstatique, car à l'aide d'une coupure nous avons déterminé le profil d'abord ouvert, et ensuite fermé.

Cette hyperstaticité est du premier degré.

L'examen d'une tranche de poutre-caisson à deux porte-à-faux encastrée à une extrémité, et soumise à un moment de torsion à l'autre extrémité, conduit à la définition de cisaillements de «torsion» et de la valeur sectorielle Γ.

Ecrivant l'équation d'équilibre de l'élément *abcd* découpé en deux endroits, comme dans le cas précédent, et compte tenu de l'expression (12), nous avons:

Pour les porte-à-faux:

$$\tau = \vartheta^{III} \cdot E_1 \cdot \frac{1}{\delta} \cdot S_{[\omega]}$$

Pour le caisson:

$$\tau = \frac{C}{\Omega \cdot \delta} + \vartheta^{III} \cdot \frac{E_1}{\delta} \cdot \Gamma$$

où:

$$\Gamma = S_{[\omega]} - \frac{1}{\Omega} \cdot \oint S_{[\omega]} r \, ds$$

Remarque: Pour la partie fermée du profil, les contraintes de cisaillement se composent de celles de la torsion uniforme et de celles provenant de la torsion non uniforme. Ces dernières dépendent de la dérivée troisième de la fonction de gauchissement ϑ et sont réparties de la même façon que la caractéristique sectorielle Γ.

La valeur Γ concerne le contour entier du profil (parties fermées et ouvertes), bien qu'elle provienne de l'intégration des déplacements le long de la partie fermée seulement. Ceci provient de la valeur $[\omega]$, dont l'intégrale est étendue sur le contour entier.

Equation différentielle de torsion non uniforme

Pour connaître l'état de contraintes et de déformations dans une pièce soumise à la torsion non uniforme, il est indispensable de définir le bimoment et le moment de torsion fléchie. Ces deux grandeurs liées à l'angle de torsion et à la fonction de gauchissement se déterminent à partir de l'équation différentielle de torsion non uniforme.

Pour la première fois, le problème de torsion non uniforme a été mis en équation par TIMOSHENKO (1905), dans le cas particulier d'une poutre en «I». Plus tard (1926), WEBER a complété cette équation pour la même section, mais asymétrique. Ce sont WAGNER (1929) et VLASSOV qui ont généralisé l'équation. Ils l'ont rendue valable pour toutes les sections ouvertes, en lui donnant la forme:

avec:
$$\left.\begin{aligned} \Theta^{IV} - k^2\,\Theta^{II} &= \eta \cdot c \\ k^2 = \frac{GI_s}{E_1 I_\omega},\quad \eta &= -\frac{1}{E_1 I_\omega} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Pour les sections fermées, ce sont les problèmes d'aviation qui ont principalement développé la théorie de torsion. Dans une première théorie technique de torsion des profils fermés, on a appliqué l'équation (21). Les modifications ont porté seulement sur les caractéristiques sectorielles (voir exemple: l'étude de BORNSCHEUR [4]).

Les études de OUMANSKY [30], et BENSCOTTER [10] sont plus exactes. Ces auteurs introduisent dans l'équation une deuxième fonction – fonction de gauchissement ϑ. La nouvelle équation a la forme:

avec:
$$\left.\begin{aligned} \Theta^{IV} - k^2\,\Theta^{II} &= \eta \cdot c \\ k^2 = \frac{GId}{E_1 I_{\hat{\omega}}}\cdot\mu,\quad \eta &= -\frac{1}{E_1 I_{\hat{\omega}}}\cdot\mu \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

on voit que les termes k^2 et η sont multipliés par le coefficient de gauchissement μ.

En ce qui concerne les profils composés d'éléments fermés et ouverts, on connaît l'équation établie par rapport à la fonction de gauchissement [10]. Il est sans doute préférable d'étudier ces profils de la même façon que les profils ouverts et fermés, c'est-à-dire à l'aide d'une équation semblable à celle (21) ou (22).

Nous établissons maintenant une telle équation, ou plus précisément nous transformons les termes k et η, en analysant la répartition des contraintes dans toutes les parties du profil composé.

Conformément aux hypothèses, nous introduisons en plus de Θ une nouvelle fonction: ϑ.

Pour deux inconnues, deux équations sont indispensables.

— La première se déduit de la condition de continuité des déplacements longitudinaux, le long du contour de la partie fermée:

$$\oint \frac{\partial u}{\partial s} ds = 0$$

et elle s'exprime:

$$\vartheta^{IV} \cdot \frac{E_1}{G} \cdot \oint \frac{\Gamma}{\delta} ds - \Theta^{II} \cdot \Omega = -c \cdot \frac{1}{G\Omega} \cdot \oint \frac{ds}{\delta} \tag{23}$$

— La deuxième équation provient de l'équilibre du moment de torsion C par les contraintes $\int_A \tau \cdot \delta \cdot r\,ds$:

$$\Theta^I - \mu \cdot \vartheta^I = \frac{C}{G I_o} \tag{24}$$

Dans cette équation $\mu = (1 - \frac{I_d}{I_o})$ étant le coefficient de gauchissement, avec:

$I_d = \dfrac{\Omega^2}{\oint \frac{ds}{\delta}}$ qui caractérise la torsion uniforme des profils fermés, et

$I_o = \int_A r^2\,\delta\,ds$ qui concerne toute la section du profil composé (parties fermées et ouvertes).

En dérivant trois fois (24), nous avons la relation entre les deux fonctions:

$$\vartheta^{IV} = \frac{\Theta^{IV}}{\mu} \tag{25}$$

Introduisons (25) dans (23); nous avons ainsi l'équation différentielle recherchée par rapport à l'angle de torsion:

$$\Theta^{IV} - k^2\,\Theta^{II} = \eta \cdot c$$

dans laquelle:

$$k^2 = \frac{\mu \cdot G}{E_1} \cdot \frac{\Omega}{\oint_\Gamma \frac{ds}{\delta}}, \quad \eta = -\frac{\mu}{E_1} \cdot \frac{\oint \frac{ds}{\delta}}{\Omega \oint_\Gamma \frac{ds}{\delta}} \tag{26}$$

Pour vérifier l'équation établie, nous l'avons appliquée au profil fermé, en remarquant que, pour un tel profil $\Gamma = S_{\hat{\omega}} - \frac{1}{\Omega} \cdot \oint S_{\hat{\omega}}\,r\,ds$. Ainsi nous avons obtenu l'équation (22). L'équation (26) avec ses termes k et η est donc correcte.

Résolution de l'équation de torsion non uniforme

Pour la résolution de l'équation (26), nous utilisons la méthode des *paramètres initiaux*, appliquée par VLASSOV au calcul des voiles à profils ouverts [32].

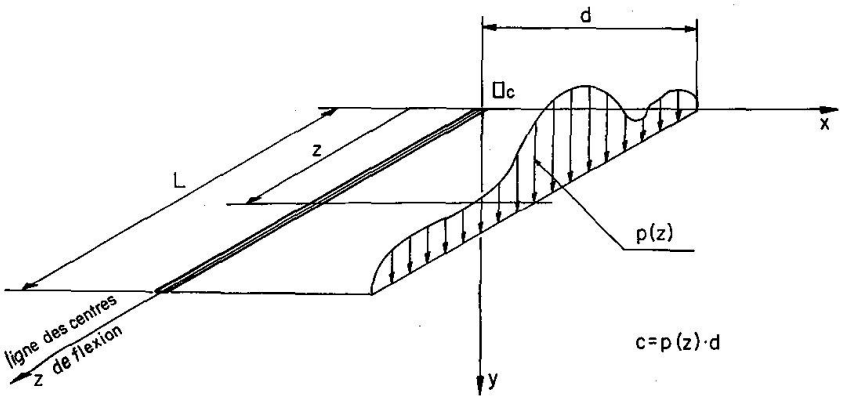

Fig. 27

La matrice définissant les quatre facteurs fondamentaux pour une charge continue à répartition quelconque et d'excentricité constante (fig. 27) s'écrit:

	Θ_o	Θ_o^I	$-B_o \frac{\oint \Gamma \frac{ds}{\delta}}{G\Omega I_{[\omega]}}$	$-C_o \cdot \frac{1}{GI_d}$	$-\frac{1}{GI_d}$
$\Theta_{(z)}$	1	$\frac{Sh\,kz}{k}$	$Ch\,kz-1$	$\frac{Sh\,kz}{k}-z$	$\frac{1}{k}\int_o^z c(kz-Sh\,kz)dz$
$\Theta^I_{(z)}$	0	$Ch\,kz$	$k\,Sh\,kz$	$Ch\,kz-1$	$\int_o^z c(1-Ch\,kz)dz$
$\Theta^{II}_{(z)}$	0	$k\,Sh\,kz$	$k^2\,Ch\,kz$	$k\,Sh\,kz$	$-k\int_o^z c\cdot Sh\,kz\,dz$
$\Theta^{III}_{(z)}$	0	$k^2\,Ch\,kz$	$k^3\,Sh\,kz$	$k^2\,Ch\,kz$	$-k^2\int_o^z c\cdot Ch\,kz\,dz$

Les paramètres initiaux Θ_o, Θ_o^I, B_o et C_o s'expriment par les constantes d'intégration de l'équation différentielle, et doivent donc être déterminés par les conditions aux limites, imposées aux extrémités de la pièce ($z=0$ et $z=L$).

Les sections extrêmes sont encastrées à la torsion ($\Theta=0$), et elles restent planes ($B\neq 0$), donc pour $z=0$ et $z=L$ $\Theta=\Theta^I=0$.

Nous obtenons dans une section $z=C^{te}$, pour les cas de charge étudiés, les formules suivantes:

a) *Moment de torsion uniformément réparti*, $c=p.d$ (fig. 27):

$$\Theta_{(z)}=\frac{pdL}{2kGI_d}\cdot\left[\frac{kz(L-z)}{L}-\frac{2\,Sh\frac{k(L-z)}{2}\cdot Sh\frac{kz}{2}}{Sh\frac{kL}{2}}\right]$$

$$\Theta^I_{(z)}=\frac{pdL}{2GI_d}\cdot\left[\frac{L-2z}{L}-\frac{Sh\,k\left(\frac{L}{2}-z\right)}{Sh\frac{kL}{2}}\right]$$

$$\Theta^{II}_{(z)}=\frac{pdkL}{2GI_d}\cdot\left[\frac{Ch\,k\left(\frac{L}{2}-z\right)}{Sh\frac{kL}{2}}-\frac{2}{kL}\right]$$

$$\Theta^{III}_{(z)}=\frac{pdk^2L}{2GI_d}\cdot\frac{Sh\,k\left(z-\frac{L}{2}\right)}{Sh\frac{kL}{2}}$$

b) *Moment de torsion réparti suivant une sinusoïde*, avec l'origine du système d'axes $\square_c x\,y\,z$ en milieu de la travée $c=c_o\cdot\cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)$, $c_o=q\left(\frac{L}{2}\right)\cdot d$, ou $c_o=m\left(\frac{L}{2}\right)$ (§ 5):

$$\Theta_{(z)}=\frac{c_o}{GI_d}\cdot\frac{2L}{k}\cdot\left[\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{kL}{2}-kz\sin\frac{\pi z}{L}-\frac{kL}{\pi}\cdot\cos\frac{\pi z}{L}\right)-\frac{\pi}{k^2L^2+\pi^2}\cdot\left(Sh\frac{kL}{2}-Shkz\cdot\sin\frac{\pi z}{L}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{kL}{\pi}\cdot Chkz\cdot\cos\frac{\pi z}{L}\right)-2\cdot\left(\frac{1}{\pi}-\frac{\pi}{k^2L^2+\pi^2}\cdot Ch\frac{kL}{2}\right)\cdot\frac{Shk\left(\frac{L+2z}{4}\right)\cdot Shk\left(\frac{L-2z}{4}\right)}{Sh\frac{kL}{2}}\right]$$

$$\Theta^{I}_{(z)}=\frac{c_o}{GI_d}\cdot 2L\left[\frac{\pi}{k^2L^2+\pi^2}\left(Chkz\cdot\sin\frac{\pi z}{L}+\frac{kL}{\pi}Shkz\cdot\cos\frac{\pi z}{L}\right)-\frac{1}{\pi}\cdot\sin\frac{\pi z}{L}-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\pi}{k^2L^2+\pi^2}\cdot Ch\frac{kL}{2}-\frac{1}{\pi}\right)\cdot\frac{Shkz}{Sh\frac{kL}{2}}\right]$$

$$\Theta^{II}_{(z)}=\frac{c_o}{GI_d}\cdot 2kL\cdot\left[\frac{\pi}{k^2L^2+\pi^2}\cdot\left(Shkz\cdot\sin\frac{\pi z}{L}+\frac{kL}{\pi}Chkz\cdot\cos\frac{\pi z}{L}-\frac{kL}{\pi}\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\pi}{k^2L^2+\pi^2}Ch\frac{kL}{2}-\frac{1}{\pi}\right)\cdot\frac{Chkz}{Sh\frac{kL}{2}}\right]$$

$$\Theta^{III}_{(z)}=\frac{c_o}{GI_d}\cdot 2k^2L\cdot\left[\frac{\pi}{k^2L^2+\pi^2}\cdot\left(Chkz\cdot\sin\frac{\pi z}{L}+\frac{kL}{\pi}Shkz\cdot\cos\frac{\pi z}{L}\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\pi}{k^2L^2+\pi^2}\cdot Cth\frac{kL}{2}-\frac{1}{\pi}\right)\cdot\frac{Shkz}{Sh\frac{kL}{2}}\right]$$

c) *Moment de torsion réparti suivant une parabole*, avec l'origine du système d'axes $\square_c\, x\, y\, z$ en milieu de la travée, $c=c_o\cdot\left(1-\frac{4z^2}{L^2}\right)$, $c_o=q\left(\frac{L}{2}\right)\cdot d$, ou $\cdot\ c_o=m\left(\frac{L}{2}\right)$ (§ 5):

$$\Theta_{(z)}=\frac{c_o}{GI_d}\cdot\frac{2}{k^2}\cdot\left[k^2z^2\cdot\left(\frac{z^2}{L^2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{k^2L^2}{16}+\frac{8}{k^2L^2}-\left(\frac{8}{k^2L^2}+\frac{4z^2}{L^2}-1\right)\cdot Chkz+\frac{8z}{kL^2}Shkz-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{4}{kL}+\frac{kL}{3}\right)\cdot Th\frac{kL}{4}+\left(\frac{8}{k^2L^2}Sh\frac{kL}{2}+\frac{kL}{3}-\frac{4}{kL}\cdot Ch\frac{kL}{2}\right)\cdot\frac{Chkz-1}{Sh\frac{kL}{2}}\right]$$

$$\Theta^{I}_{(z)}=\frac{c_o}{GI_d}\cdot\frac{2}{k}\cdot\left[kz\cdot\left(\frac{4z^2}{3L^2}-1\right)+\left(1-\frac{8}{k^2L^2}-\frac{4z^2}{L^2}\right)\cdot Shkz+\frac{8z}{kL^2}Chkz+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{8}{k^2L^2}Sh\frac{kL}{2}+\frac{kL}{3}-\frac{4}{kL}Ch\frac{kL}{2}\right)\cdot\frac{Shkz}{Sh\frac{kL}{2}}\right]$$

$$\Theta^{II}_{(z)}=\frac{c_o}{GI_d}\cdot 2\cdot\left[\frac{2}{k^2L^2}-1+\left(1-\frac{8}{k^2L^2}-\frac{4z^2}{L^2}\right)\cdot Chkz+\frac{8z}{kL^2}Shkz+\left(\frac{kL}{3}-\frac{4}{kL}Ch\frac{kL}{2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{8}{k^2L^2}Sh\frac{kL}{2}\right)\cdot\frac{Chkz}{Sh\frac{kL}{2}}\right]$$

$$\Theta^{III}_{(z)}=\frac{c_o}{GI_d}\cdot 2k\cdot\left[\left(1-\frac{8}{k^2L^2}-\frac{4z^2}{L^2}\right)\cdot Shkz+\frac{8z}{kL^2}\cdot Chkz-\left(\frac{4}{kL}Ch\frac{kL}{2}-\frac{8}{k^2L^2}Sh\frac{kL}{2}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{kL}{3}\right)\cdot\frac{Shkz}{Sh\frac{kL}{2}}\right]$$

Application numérique et vérification expérimentale

Nous appliquons la théorie exposée dans les paragraphes précédents à un pont à quatre caissons, récemment construit: le Pont de Courbevoie, sur la Seine, dont la coupe transversale est donnée sur la fig. 28*. C'est un portique ouvert à trois travées (40 + 60 + 40 m). La travée étudiée est celle de 60 m.

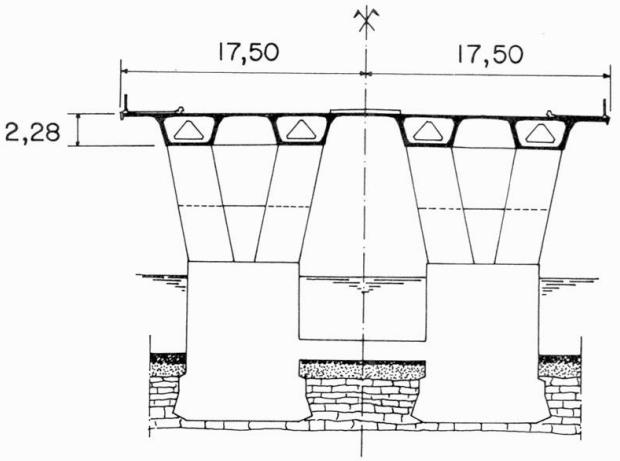

Fig. 28

La section d'un caisson est définie sur la fig. 29. La disymétrie est créée par la différence de longueur des porte-à-faux ($e_1 \neq e_2$).

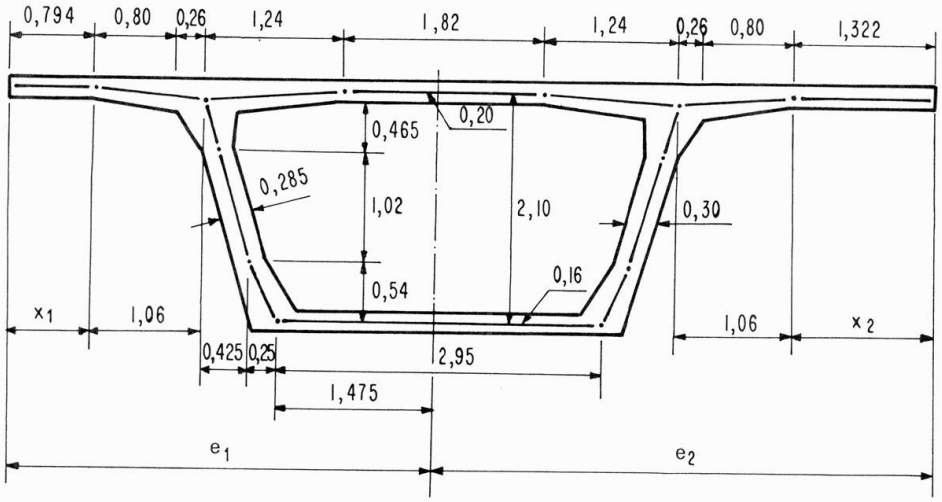

Fig. 29

Les mesures de déformations effectuées au cours des épreuves de cet ouvrage ont mis en doute les hypothèses habituelles de calcul.

*Pont construit par l'entreprise Campenon Bernard. Au moment de l'étude, l'auteur était ingénieur au Service régional de l'Equipement de la Région parisienne.

Au cours des épreuves, nous avons utilisé des camions de 35 t en mesurant les flèches et rotations au milieu de chaque poutre-caisson, pour les trois cas de charge suivants:

1° 8 files de 4 camions (toute la largeur de 26 m chargée).

2° 4 files de 4 camions (deux poutres-caissons latérales chargées).

3° 2 files de 4 camions (une seule poutre-caisson latérale chargée).

Ces trois cas de charge sont considérés dans l'application numérique.

Afin de ne pas prolonger l'exposé, nous nous bornons à donner les résultats essentiels:

— de la répartition des charges entre les poutres-caissons,

— de la torsion considérée comme non uniforme.

Les lignes d'influence pour les inconnues hyperstatiques à mi-travée isostatique sont données sur les fig. 30, 31, 32 et 33.

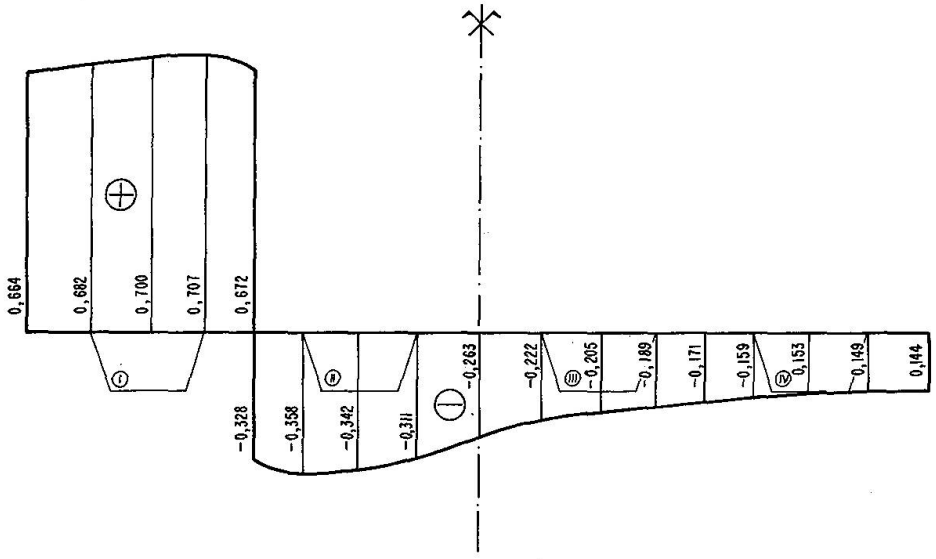

Fig. 30

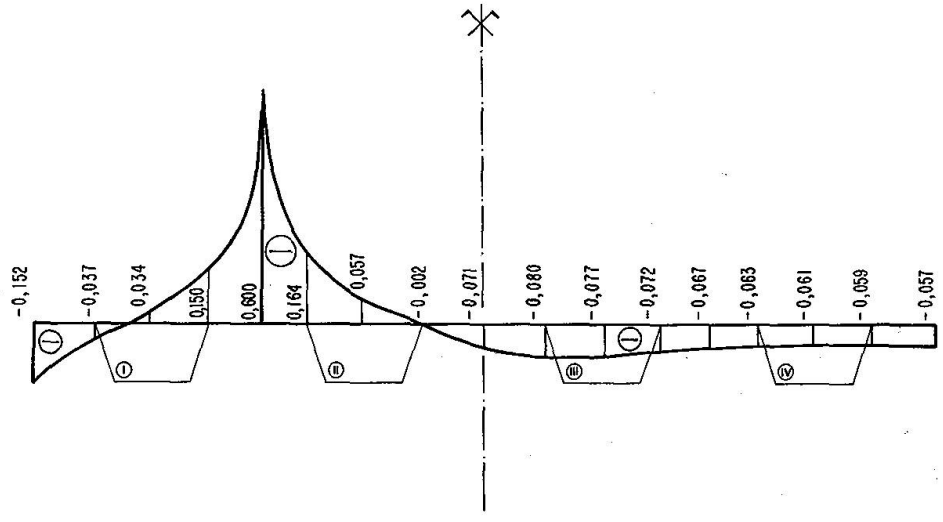

Fig. 31

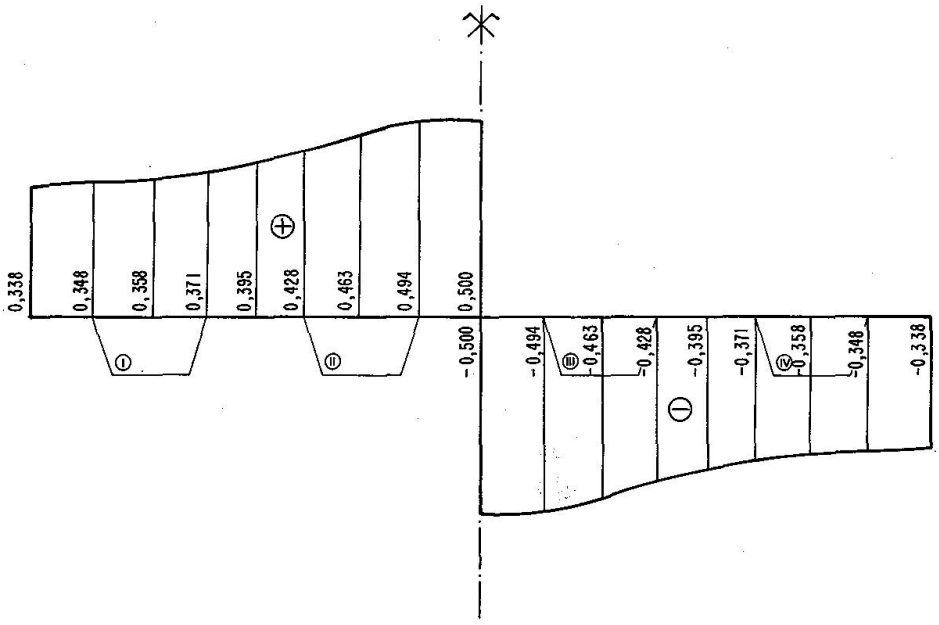

Fig. 32

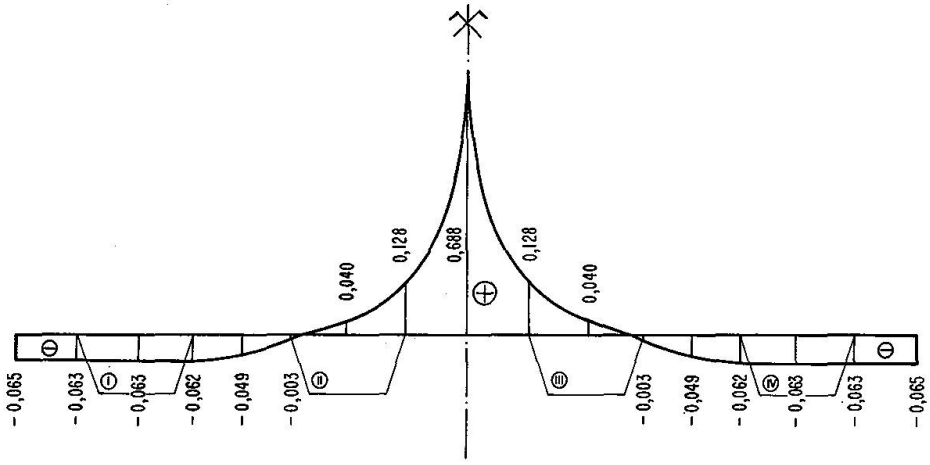

Fig. 33

Sur les fig. 34 et 35 sont donnés les diagrammes des bimoment et moment de torsion fléchie pour une poutre-caisson latérale. Ces diagrammes correspondent à la surcharge réglementaire A (1) répandue sur toute la longueur (60 m), et toute la largeur de chaussée (26 m); les inconnues hyperstatiques étant réparties suivant la loi sinusoïdale.

Les contraintes σ et τ dues au gauchissement empêché sont représentées sur les fig. 36 et 37. Les valeurs entre les parenthèses correspondent au troisième cas de charge d'épreuves – la charge la plus excentrée.

Les contraintes en question sont réparties suivant le contour de la section de la même façon que les valeurs sectorielles $[\omega]$ et Γ.

La section considérée est celle du voisinage des appuis ($z = 1{,}5$ m ou $z = 58{,}5$ m).

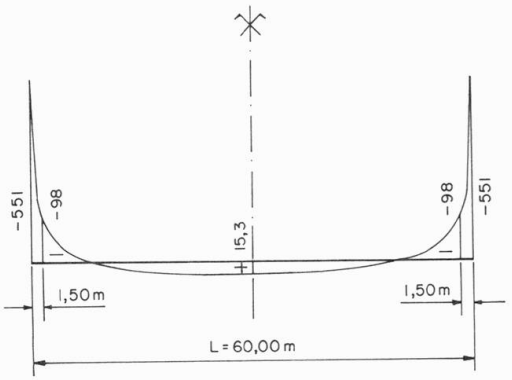

Fig. 34. Diagramme du bimoment B (en Tm^2).

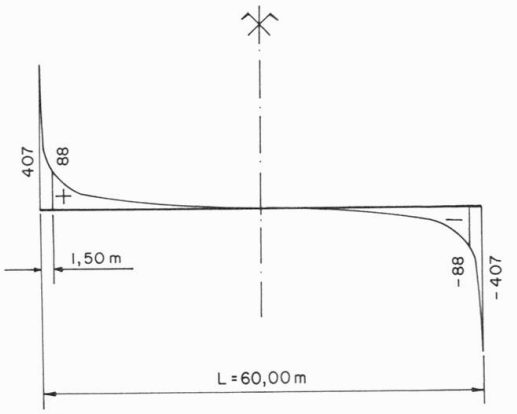

Fig. 35. Diagramme du moment de torsion fléchie M_ω (en Tm).

Dans la section à mi-portée $M_\omega = 0$, donc $\tau = 0$.

La valeur du bimoment B est faible. Les contraintes δ ne dépassent pas en valeur absolue 2 kg/cm^2.

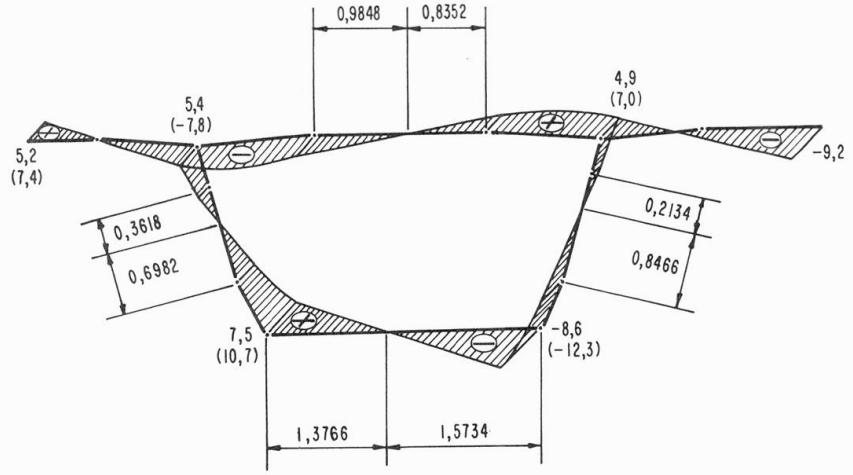

Fig. 36. Contraintes normales $\sigma = \dfrac{B_{[\omega]}}{I_{[\omega]}}$ en kg/cm^2.

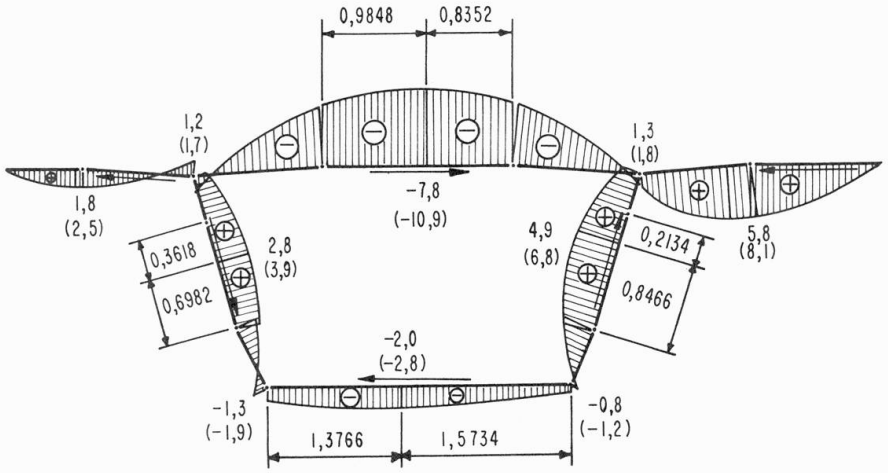

Fig. 37. Contraintes de cisaillement $\tau = \dfrac{M_\omega \cdot \Gamma}{I_{[\omega]} \cdot \delta}$ en kg/cm^2.

Conclusions

D'une façon générale, les résultats de cette recherche sont très satisfaisants.

La flexion transversale des parois de caissons, prise en compte dans le calcul des inconnues hyperstatiques, modifie sensiblement le comportement des structures.

En ce qui concerne la répartition des inconnues hyperstatiques, le long de la travée, on peut admettre, avec une bonne approximation, que ces inconnues sont réparties suivant une sinusoïde.

C'est du point de vue de la torsion que l'étude est la plus intéressante.

Les mesures des rotations au milieu de chaque poutre-caisson donnent des valeurs supérieures de 30% environ, comparativement à celles trouvées par la méthode classique de calcul, et ces mesures confirment nos résultats de calcul.

La torsion est en effet non uniforme, et les principes de la théorie des barres à parois minces sont parfaitement applicables au calcul des structures en béton précontraint composées de poutres-caissons.

Les contraintes supplémentaires dues à la torsion non uniforme, ignorées dans la méthode de calcul classique, peuvent avoir de graves conséquences sur le comportement de ce genre de structures, et surtout dans les ponts courbes, où la sollicitation à la torsion est plus accentuée.

L'importance de ce problème devient à l'heure actuelle plus grande, du fait de l'évolution de la préfabrication, qui conduit à la production d'éléments de construction ayant des parois de plus en plus minces.

Notations

A	section transversale.
B	bimoment.
C	moment de torsion.
c	moment de torsion par unité de longueur.
D_o	constante relative aux caractéristiques sectorielles des profils composés.
E	module d'élasticité longitudinale.
ν	coefficient de Poisson.
E_1	module d'élasticité réduit de la traction longitudinale ($E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}$).
G	module d'élasticité transversale.
I_x, I_y	moment d'inertie par rapport aux axes Ox et Oy.
I_s, I_d	moment d'inertie à la torsion uniforme d'un profil: ouvert, fermé.
I_o	moment d'inertie polaire.
μ	coefficient de gauchissement.
ω, $\hat{\omega}$, $[\omega]$	surface sectorielle d'un profil: ouvert, fermé, composé.
Ω	double de l'aire comprise à l'intérieur de la ligne moyenne d'un profil fermé.
I_ω, $I_{\hat{\omega}}$, $I_{[\omega]}$	moment d'inertie sectoriel d'un profil: ouvert, fermé, composé.
L	longueur de la portée étudiée.
M	moment fléchissant agissant dans le plan parallèle au plan Oy, Oz.
M_ω	moment de torsion fléchie.

N	effort normal.
O	centre de gravité.
$\square_c$	centre de flexion.
r	longueur de la perpendiculaire abaissée du centre de flexion sur la tangente au contour.
S_x, S_y, $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$	moments statiques par rapport aux axes Ox et Oy d'un profil: ouvert, fermé.
S_ω, $S_{\hat{\omega}}$	moment statique sectoriel d'un profil: ouvert, fermé.
s	abscisse curviligne d'un point de l'arc.
s_o	périmètre suivant la ligne moyenne d'un profil fermé.
T	effort tranchant agissant dans le plan parallèle au plan Oy, Oz.
u	déplacement dans la direction z.
v	déplacement dans la direction de la tangente au contour.
δ	épaisseur de la paroi.
Φ	flux de cisaillement.
Θ	angle de torsion.
σ	contrainte normale.
ζ	gauchissement.
ϑ	fonction de gauchissement (caractérisant la torsion non uniforme).
τ	contrainte de cisaillement.
$\oint$	intégrale étendue sur tout le contour d'un profil fermé.

Considérations pratiques

Nous donnons ici quelques remarques pratiques concernant les conséquences de la torsion non uniforme vis-à-vis du dimensionnement des armatures des ponts à poutres-caissons en béton précontraint.

Il convient de constater que les contraintes maximales dues à la torsion non uniforme se situent au voisinage des appuis.

Dans le cas des ponts droits, les calculs classiques ignorent ces contraintes — de l'ordre de quelques bars — et il n'est pas prévu d'armatures passives pour les reprendre.

Le diagramme (fig. 36) des contraintes normales conduit à renforcer les armatures longitudinales dans les zones de goussets et de porte-à-faux et le diagramme (fig. 37) des contraintes tangentielles à renforcer les armatures transversales au milieu des hourdis et des âmes.

Pour les ponts courbes, on ne peut pas séparer les termes de flexion et de torsion qui sont liés par la même équation; il en résulte que les conséquences de la torsion non uniforme sont plus importantes, puisqu'elle influe sur l'état général des contraintes et des déformations. Ainsi les flèches mesurées en travées sont en réalité plus importantes que celles trouvées par un calcul classique.

D'autre part, dans une poutre-caisson large à plusieurs cellules, où l'effet de gauchissement est important, les contraintes supplémentaires normales et tangentielles peuvent atteindre quelques dizaines de bars. Un calcul automatique tridimensionnel permet de mettre en évidence l'existence de ces contraintes. Un tel tablier

dimensionné suivant les formules habituelles manquera non seulement d'armatures passives, mais aussi de précontrainte, d'où risque de fissures.

Il semble que l'effet nuisible de la torsion non uniforme aussi bien dans le cas des ponts droits que courbes pourrait être considérablement diminué par une différente conception des entretoises d'appui.

Une simple diminution de l'épaisseur des entretoises, voire leur suppression dans certains cas, pourrait améliorer le comportement des ponts en béton précontraint et, en plus, apporter de l'économie au projet.

Nous nous proposons de traiter ce problème prochainement dans une étude étendue sur plusieurs types de ponts.

Remerciements

J'exprime ma reconnaissance à M. *R. Siestrunck*, professeur à la Faculté des sciences de l'Université de Paris, qui m'a aidé à porter cette recherche devant la Faculté des sciences et qui a accepté de présider le jury d'examen.

Le sujet de cette étude a été accepté par M. *P. Géry*, professeur à l'Ecole des Mines et au Conservatoire national des arts et métiers, et le travail réalisé sous sa direction.

Je tiens à l'assurer de ma reconnaissance.

Je remercie M. *R. Vichnievsky*, professeur à la Faculté des sciences de l'Université de Paris, qui a accepté de faire partie du jury d'examen.

Je remercie également M. *D. Ceylon*, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, professeur au Centre des hautes études de la construction, pour le profit que j'ai retiré de ses suggestions, et qui a bien voulu faire partie du jury d'examen.

Cette étude a été entreprise au Service régional de l'Equipement de la Région parisienne.

Je tiens à exprimer ma gratitude à M. *G. Rondard*, ingénieur des Travaux publics de l'Etat, qui m'a accueilli dans son service.

Que toute sa subdivision trouve ici ma sympathie pour sa collaboration et son aide amicale.

Je tiens enfin à remercier M. *G. Wianecki*, docteur ès sciences, chargé de la Section aérodynamique de l'I.T.B.T.P., *J. Bródka*, Docteur ès sciences, chef de la Section Constructions métalliques de l'Institut technique de Varsovie, pour leur aide amicale et efficace.

Bibliographie

1. BAZANT: Pièces longues à voiles épais et calcul des ponts à section déformable. Annales des Ponts et Chaussées, N° 3, 1968.
2. BECK, SCHÄFER: Die Berechnung von Hochhäusern durch Zusammenfassung aller aussteifenden Bauteile zu einem Balken. Der Bauingenieur, Nr. 3, 1969.
3. BLEICH: Non-Linear Distribution of Bending Stresses due to Distortion of the Cross Section. Journal of the Applied Mechanics, 1;3, 1953.
4. BORNSCHEUER: Beispiel und Formelsammlung zur Spannungsberechnung dünnwandiger Stäbe mit wölbbehindertem Querschnitt. Der Stahlbau, Nr. 12, 1952; Nr. 2, 1953.

5. COURBON: Résistance des matériaux. Paris, Dunod, 1964.
6. COURTAND et LEBELLE: Formulaire du béton armé. Paris, I.T.B.T.P., 1962.
7. DABROWSKI: Distribution non linéaire des contraintes due à la déformation de la section dans les poutres raidies, soumises à la flexion (en polonais). Rozprawy Inzynierskie, Zeszyt 3, 1954.
8. DABROWSKI: Torsion des ponts et des constructions hydrauliques à parois minces et section fermée (en polonais). Rozprawy Inzynierskie, Zeszyt 2, 1958.
9. DZIEWOLSKI: Etude théorique et expérimentale d'une poutre en caisson asymétrique avec deux appendices. Publication préliminaire de l'A.I.P.C., 7e Congrès, Rio de Janeiro, 1964.
10. DZIEWOLSKI: Torsion non uniforme des poutres à parois minces et à profils composés d'éléments fermés et ouverts. Construction métallique, N° 2, 1964.
11. GOSCHY: Der Kastenträger ohne Zwischenschotte, Berechnung auf Torsion. Die Bautechnik, Nr. 5, 1966.
12. HENRY: Le viaduc courbe de la Porte de Paris à Saint-Denis. Annales de l'I.T.B.T.P., N° 11, 1967.
13. ISNARD: Formulaire de l'Ingénieur. Paris, Eyrolles, 1964.
14. KLIMINSKI: Calcul des ponts courbes métalliques compte tenu du gauchissement des sections transversales. Annales des Ponts et Chaussées, N° 5, 1970.
15. LAREDO: Théorie générale du comportement mécanique des grandes structures dans l'espace. Travaux, N° 6, 1967.
16. LORINGOVEN: Torsion des poutres. Stage de perfectionnement technique, C.T.I.C.M., N° 1, 1967.
17. MANDEL: Détermination du centre de torsion à l'aide du théorème de réciprocité. Annales des Ponts et Chaussées, N° 3, 1948.
18. MARGUERRE: Über die Beanspruchung von Plattenträgern. Die Bautechnik, Nr. 8, 1952.
19. MASSONNET: Résistance des matériaux. Paris, Dunod, 1962.
20. MATHIVAT: Reconstruction du pont de Choisy-le-Roi. Travaux, N° 1, 1966.
21. MATHIVAT: Boulevard périphérique – Franchissement de la Seine, pont aval. Annales de l'I.T.B.T.P., N° 10, 1968.
22. NALESZKIEWICZ: Etudes préliminaires de la torsion d'une coque de navire sous la vague biaise (en polonais). Rozprawy Inzynierskie, Zeszyt 34, 1955.
23. NOWACKI: Mécanique des constructions (en polonais). Varsovie, P.W.N., 1967.
24. REISSNER: Analysis of Shear Lag in Box Beams by the Principle of Minimum Potential Energy. Quarterly of Applied Mathematics, No. 3, 1946.
25. RENARD: Etude des ponts courbes. Annales des Travaux publics de Belgique, N° 1, 1967.
26. RUTECKI: Résistance des matériaux appliquée aux constructions à parois minces (en polonais). Varsovie, P.W.N., 1957.
27. RUTECKI: Ossatures portantes composées de parois minces (en polonais). Varsovie, P.W.N., 1966.
28. STÜSSI: Centre de cisaillement et torsion. Mémoires de l'A.I.P.C., Vol. 12, 1952.
29. TERRINGTON: The Torsion Centre of Girders. Engineering, Vol. 178. No. 11, 1954.
30. URBAN: Théorie et calcul des constructions aéronautiques en parois minces (en russe). Moscou, 1956.
31. VIRCIK: Beitrag zur Berechnung des statischen Momentes als Querkraft bei dünnwandigen Querschnitten. Der Bauingenieur, Nr. 5, 1970.
32. VLASSOV: Pièces longues en voiles minces. Paris, Eyrolles, 1962.
33. WEISS: Dimensionnement des constructions métalliques composées des barres, selon la théorie des structures à parois minces (en polonais). Varsovie, Inzynieria i Budownictwo, 1962.
34. WELLER: Modern Mathematics for the Engineer. New York, 1956.
35. WINTER: Stress Distribution in and Equivalent Width of Flanges of Wide Thin-Wall Steel Beams. National Advisory Committee for Aeronautics, Note 784, Washington, No. 11, 1940.

Résumé

L'étude concerne les systèmes spatiaux élastiques rencontrés dans la construction actuelle des ponts.

Le problème porte principalement sur une section transversale, composée de caissons liés entre eux par des dalles de différentes longueurs. Les structures ne sont entretoisées que sur appuis.

Pour la définition des inconnues hyperstatiques, on tient compte de la flexion transversale des parois de caissons et, pour la torsion, de la fonction de gauchissement.

Zusammenfassung

Die Untersuchung behandelt räumliche elastische Systeme wie sie im heutigen Brückenbau auftreten. Das Problem bezieht sich hauptsächlich auf einen aus Kasten zusammengesetzten transversalen Querschnitt, die untereinander durch verschieden lange Betonplatten verbunden sind. Das Bauwerk ist nur an den Auflagestellen ausgesteift.

Zwecks Definition der statisch unbestimmten Unbekannten werden die transversale Biegung der Kastenwände, sowie die Krümmungsfunktion für die Torsion berücksichtigt.

Summary

The study deals with spatial elastic systems in actual bridge construction. The problem relates mainly on a transversal section composed by boxes joint together by concrete slabs of different lengths. The structure is only stiffened on the supports.

With a view of defining the statically undetermined unknowns the transversal flexion of the box wall and the function of the curvature for the torsion are taken into consideration.