

# Die Verschiebungsmethode in der Theorie der dünnwandigen Stäbe und ein neues Berechnungsmodell des Stabes mit in seinen Ebenen deformierbaren Querschnitten

Autor(en): **Kollbrunner, Curt F. / Hajdin, Nikola**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **28 (1968)**

PDF erstellt am: **23.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-22183>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# **Die Verschiebungsmethode in der Theorie der dünnwandigen Stäbe und ein neues Berechnungsmodell des Stabes mit in seinen Ebenen deformierbaren Querschnitten**

*Displacement-Method in the Theory of Thin-Walled Members, and a New Calculation-Model for the Thin-Walled Bars with Deformable Contours*

*La méthode des déplacements dans la théorie des membres à parois minces et un nouveau modèle de calcul pour des membres à parois minces avec contour déformable*

CURT F. KOLLBRUNNER

Dr. sc. techn., Dr. h. c., Zollikon,  
Zürich

NIKOLA HAJDIN

Dr. sc. techn., Professor an der  
Universität Beograd

## **1. Einleitung**

Vor über fünf Jahren begannen wir die Theorie der dünnwandigen Stäbe systematisch zu bearbeiten.

Bisher hat sich unsere Arbeit auf die Probleme der linearen Theorie beschränkt und ist in den Publikationen [1] bis [6] erschienen. In der Folge beabsichtigen wir, mit unserer Arbeit weitere wesentliche Bereiche, welche mit dem Gebiet der dünnwandigen Stäbe und ihrer Anwendung im Bauwesen zusammenhängen, zu erfassen<sup>1)</sup>.

In den letzten Jahren wurde die lineare Theorie durch eine ganze Anzahl von Verfassern eingehend behandelt. Der Hauptzweck unserer bisherigen Arbeit war eine Zusammenfassung und Vereinheitlichung der auf diesem Gebiete gewonnenen Erkenntnisse unter besonderer Berücksichtigung ihrer praktischen Anwendung zu schaffen.

Einige Ergebnisse dieser in den erwähnten Monographien behandelten Arbeit stellen unseres Erachtens nach einen Beitrag zur Theorie dieser Konstruktionen dar:

In der Arbeit [3] ist die Statik der Systeme dünnwandiger Stäbe mit offenem Profil als eine Erweiterung der Lehren der klassischen Statik gebracht. Der

---

<sup>1)</sup> Ein Teil dieser Probleme wurde im Artikel [7] erwähnt.

Aufbau der Theorie erfolgt in erster Linie durch die konsequente Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit bei der Variation der Spannungen sowie durch die Entwicklung der verallgemeinerten Kraftgrößenmethode.

Eine sehr ausführliche Übersicht und Darlegungen der einzelnen Methoden für die praktische Berechnung dünnwandiger Stäbe mit geschlossenem Profil wurde in der Publikation [4] gebracht.

In dieser Veröffentlichung wurde ein besonderes Gewicht auf die Erläuterung der Verfahren von BENSCOTER [7], UMANSKI [8] und HEILIG [9], sowie auf den Vergleich derselben mit der genaueren Theorie von WLASSOW [10] gelegt.

Die Ergebnisse dieser Vergleiche sind vom praktischen Standpunkt aus interessant, doch können wir an dieser Stelle nicht näher auf sie eingehen.

Eine ausführliche kritische Darlegung des Berechnungsverfahrens von KUBITZKI, welches auf dem sog. Schubfeldschema beruht, wurde im letzten Kapitel der Publikation [4] gebracht.

Die Theorie des langen prismatischen Faltwerks bzw. des dünnwandigen Stabes mit in seinen Ebenen deformierbaren Querschnitten unter Anwendung der Verschiebungsmethode wurde eingehend in der Arbeit [5] behandelt. Die in dieser Publikation dargelegte Theorie konnte in einer genügend allgemeinen Form entwickelt werden, so daß in ihr als Sonderfälle die sogenannten Theorien des steifknotigen und des gelenkigen Faltwerks sowie die klassische Theorie der Wölbkrafttorsion enthalten sind.

Abgesehen von diesen Sonderfällen ist es, unabhängig von der für die Analyse angewendeten Methode, außerdem noch möglich zwei Berechnungsmodelle aus dem allgemeinen Berechnungsmodell zu gewinnen.

Das erste kann als eine Erweiterung der klassischen Theorie der Wölbkrafttorsion auf Querschnitte, deren Wandstärke nicht ausgesprochen klein im Vergleich zu seinen übrigen linearen Abmessungen ist, angesehen werden<sup>2)</sup>.

In diesem Beitrag wird das zweite Berechnungsmodell behandelt, welches eine Theorie des Faltwerkes unter Berücksichtigung auch der Torsionsmomente ermöglicht.

## 2. Verformung des Stabes

Wir betrachten einen geraden dünnwandigen Stab mit offenem Querschnitt. Die beliebig geformte Profilmittellinie ersetzen wir durch einen Polygonzug. Die Wandstärke  $t$  zwischen zwei Knoten sei konstant.

Die Lage eines beliebigen Punktes auf der Mittelfläche ist durch die Koordinaten  $s$  und  $z$  bestimmt. Die Koordinate  $s$  ist die längs der Profilmittellinie gemessene Entfernung des Punktes von einer vorher bestimmten Erzeugenden

---

<sup>2)</sup> Siehe die Arbeit [5], Kapitel 10.

und  $z$  dessen Abstand von einem beliebigen Querschnitt, gemessen längs der Stabachse (Fig. 1).

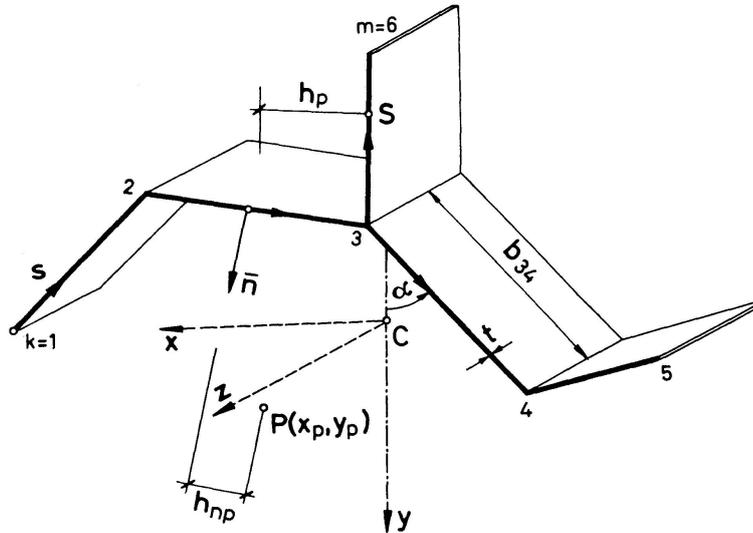


Fig. 1.

Den Abstand eines beliebigen, nicht auf der Mittelfläche gelegenen Punktes von derselben gemessen in Richtung der inneren Normalen bezeichnen wir mit  $e$ .

Außer dem Koordinatensystem  $s, z$  und  $e$  führen wir das Kartesische Koordinatensystem  $x, y$  und  $z$  ein, wobei wir, der Einfachheit halber, für die Achsen  $x$  und  $y$  die Hauptträgheitsachsen des Querschnitts wählen.

Die Verschiebungen der Punkte der Mittelfläche in den Richtungen  $s$  und  $z$  bezeichnen wir mit  $v$  und  $w$  und die Verschiebungskomponenten in den Richtungen  $x$  und  $y$  mit  $\xi$  und  $\eta$ .

In bezug auf die Verformung der Mittelfläche des Stabes treffen wir die folgenden Voraussetzungen:

1. Die den Stab bildenden Platten erleiden in der Querrichtung keine Dehnungen, d. h.  $\epsilon_s = 0$ .
2. Die Gleitverzerrung  $\gamma_{zs}$  in der Mittelfläche des Stabes wird vernachlässigt.

Die erste Voraussetzung besagt, daß die Verschiebungen der Knoten der Profilmittellinie in der Ebene des Querschnittes gleich sind den entsprechenden Verschiebungen von Knoten einer kinematischen Kette, deren einzelne Glieder aus in diesen Knoten gelenkig miteinander verbundenen Stäben bestehen, deren Achsen mit den Seiten der polygonalen Profilmittellinie zusammenfallen.

Die Zahl der voneinander unabhängigen Verschiebungen  $V_i = V_i(z)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) ist gleich dem Freiheitsgrad der kinematischen Kette.

Wir wählen für die ersten drei unabhängigen Parameter die Verschiebungen des Querschnitts in den Richtungen  $x$  und  $y$  und dessen Verdrehung um den beliebigen Punkt  $P$  (Fig. 1):

$$V_1 = \xi_0, \quad V_2 = \eta_0, \quad V_3 = \varphi_P. \quad (1)$$



Aus der Orthogonalitätsbedingung erhalten wir:

$$\beta_{ij} = \frac{\int_s t \omega_{\Theta}^{(i)} \omega_{\Theta}^{(j)} ds}{\int_s t [\omega_{\Theta}^{(i)}]^2 ds}, \quad (9)$$

wobei sich die bestimmten Integrale im Zähler und Nenner über die gesamte Länge der Profilmittellinie erstrecken.

Statt  $v^{(i)}$  erhalten wir:

$$v_{\Theta}^{(i)} = v^{(i)}, \quad \text{für } i = 1, 2 \quad (10)$$

und 
$$v_{\Theta}^{(i)} = v^{(i)} + \sum_{j=0}^{i-1} \beta_{ij} v_{\Theta}^{(j)}, \quad \text{für } i = 3, 4, \dots, n.$$

Den neu eingeführten Funktionen entsprechen die neuen, verallgemeinerten Parameter  $\Theta_i(z)$ :

$$\Theta_i = V_i, \quad \text{für } i = 1, 2 \quad (11)$$

und 
$$\Theta_i = V_i + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} \Theta_j, \quad \text{für } i = 3, 4, \dots, n.$$

Man kann leicht ersehen, daß  $\omega_{\Theta}^{(3)} = \Omega$  sie sog. normierte sektorielle Koordinate und  $v^{(3)} = h$  der Abstand der Tangente an die Profilmittellinie vom Schubmittelpunkt  $D$  ist.

Mit den neu eingeführten Funktionen erhalten wir statt der Ausdrücke (2) und (4) für  $v$  und  $w$ :

$$v(z, s) = \sum_{i=0}^n \Theta_i(z) v_{\Theta}^{(i)}(s), \quad (12)$$

$$w(z, s) = - \sum_{i=0}^n \Theta_i'(z) \omega_{\Theta}^{(i)}(s), \quad (13)$$

wobei 
$$v_{\Theta}^0 = 0 \quad \text{ist.} \quad (14)$$

Die Parameter  $\Theta_i$  bestimmen vollständig die Verschiebungen der Knoten  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) in der Ebene des Querschnittes, wobei wir auch die Enden der Profilmittellinie zu den Knoten zählen (siehe Fig. 1).

Für die Verschiebung  $u$  in Richtung der inneren Normalen zur Mittelfläche führen wir eine Näherungslösung von der Form ein:

$$u(z, s) = \sum_{i=0}^n \Theta_i(z) u_{\Theta}^{(i)}(s) + \sum_{k=1}^m \Phi_k(z) u_{\Phi}^{(k)}(s) + u_p(z, s). \quad (15)$$

In diesem Ausdruck bedeuten  $\Phi_k$  die unbekanntes, durch die Formänderung des Querschnittes hervorgerufenen Knotenverdrehungen und  $u_{\Theta}^{(i)}$  sowie  $u_{\Phi}^{(k)}$  bekannte, durch die folgenden Ausdrücke bestimmte Funktionen:

$$u_{\Theta}^{(0)} = 0, \quad u_{\Theta}^{(1)} = \cos \alpha, \quad u_{\Theta}^{(2)} = \sin \alpha, \quad u_{\Theta}^{(3)} = h_n, \quad (16)$$

$$u_{\Theta}^{(i)} = \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^R \alpha_{kr}^{(i)} u_{\Theta}^{(kr)}, \quad i = 4, 5, \dots, n,$$

$$u_{\Phi}^{(kr)} = \sum_{r=1}^R u_{\Phi}^{(kr)} \tag{17}$$

und

$$u_p = \sum_{r=1}^R u_{kr,p} \tag{18}$$

Die in den Ausdrücken (15) bis (17) neu eingeführten Bezeichnungen haben die folgende Bedeutung:

- $h_n$ : Abstand der Normalen zur Mittelfläche vom Schubmittelpunkt  $D$ ;
- $\alpha_{kr}^{(i)}$ : Projektion der Verschiebung des Knotens  $k$  in Richtung der Normalen auf die Platte  $kr$ , welche die Knoten  $k$  und  $r$  verbindet, für den Zustand  $\Theta_i = 1$ , ( $i = 4, 5 \dots n$ );
- $w_{\Theta}^{(kr)}$ : definiert die elastische Fläche des unendlich langen, an den Rändern  $k$  und  $r$  (Fig. 3) eingespannten Plattenstreifens für den Fall, daß die Kante  $k$  die Einheitsenkung erleidet.

$$w_{\Theta}^{(kr)} = \frac{s_{rk}}{b_{kr}} \left[ 1 - \frac{s_{kr}(s_{kr} - s_{rk})}{b_{kr}^2} \right], \tag{19}$$

$R$ : Gesamtzahl,  $r = 1, 2 \dots R$  der an den Knoten  $k$  angeschlossenen Platten.

Die im Ausdruck (17) angeführte Funktion

$u_{\Phi}^{(kr)}$ : definiert die elastische Fläche des unendlich langen, an den Rändern  $k$  und  $r$  eingespannten Plattenstreifens für den Fall, daß die Kante  $k$  (Fig. 4) die Einheitsverdrehung erfährt.

$$u_{\Phi}^{(kr)} = - \frac{s_{kr} s_{rk}^2}{b_{kr}^2} \tag{20}$$

Die Funktion

$u_{kr,p}$  definiert die elastische Fläche des erwähnten Plattenstreifens zufolge der in der Richtung der Normalen zur Mittelfläche wirkenden, gegebenen Belastung  $\bar{p}_n$ .

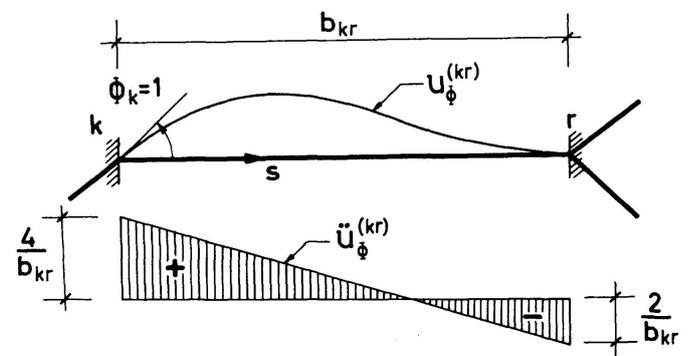
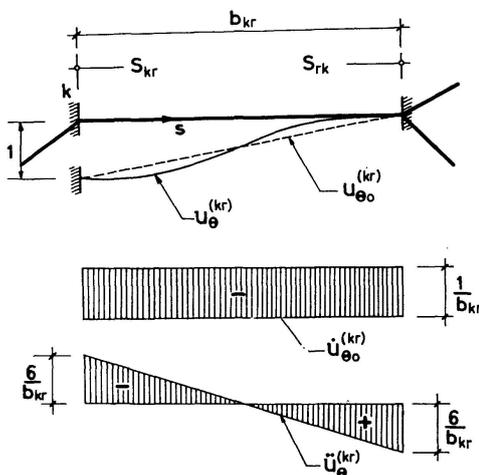


Fig. 4.

Fig. 3.

### 3. Schnittkräfte. Gleichgewichtsbedingungen. Grundlegende Differentialgleichungen des Problems und Randbedingungen

Hinsichtlich der Schnittkräfte wollen wir folgende Vereinfachungen annehmen:

- a) Die Biegemomente  $m_z$  in der Längsrichtung werden vernachlässigt, ebenso wie der Einfluß der Krümmung  $u''$  in der Längsrichtung auf die Biegemomente  $m_s$  in der Querrichtung.
- b) Die Torsionsmomente  $m_{zs}$  zwischen je zwei Knoten mögen konstant und proportional der spezifischen Verdrehung der diese Knoten verbindenden Sehne sein.

Für die Schnittkräfte  $n_z$ ,  $m_{zs}$  und  $m_s$  erhalten wir, unter Berücksichtigung dieser Vereinfachungen sowie der Voraussetzungen über die Verformung des Stabes und des Hookeschen Gesetzes:

$$n_z = E' t w', \quad m_{zs} = E' \frac{t^3}{12} (1 - \nu) \dot{u}'_0, \quad m_s = -E' \frac{t^3}{12} \ddot{u}, \quad (21)$$

wo  $\dot{u}'_0$  die Verdrehung der Sehne zwischen zwei benachbarten Knoten und

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad \text{ist.}$$

Durch Einsetzen der Ausdrücke (15) und (13) für  $u$  und  $w$  in die Gleichung (21) erhalten wir:

$$\begin{aligned} n_z &= -E' t \sum_{i=0}^n \Theta_i'' \omega_{\Theta}^{(i)}, \\ m_{zs} &= -\frac{E' t^3}{12} (1 - \nu) \sum_{i=0}^n \Theta_i' \dot{u}_{\Theta 0}^{(i)}, \\ m_s &= -\frac{E' t^3}{12} \left( \sum_{i=0}^n \Theta_i \ddot{u}^{(i)} + \sum_{k=1}^m \Phi_k \ddot{u}_{\Phi}^{(k)} \right) + m_{s,p}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\text{wo} \quad \dot{u}_{\Theta 0}^{(0)} = \dot{u}_{\Theta 0}^{(1)} = \dot{u}_{\Theta 0}^{(2)} = 0, \quad \dot{u}_{\Theta 0}^{(3)} = 1, \quad \dot{u}_{\Theta 0}^{(i)} = \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^R \alpha_{kr}^{(i)} \dot{u}_{\Theta 0}^{(kr)} \quad (23)$$

$$\text{und} \quad m_{s,p} = -E' \frac{t^3}{12} \dot{u}'_p \quad (24)$$

bedeuten. Für  $\dot{u}_{\Theta 0}^{(kr)}$  (Fig. 3) erhalten wir:

$$\dot{u}_{\Theta 0}^{(kr)} = -\frac{1}{b_{kr}}. \quad (25)$$

Wir schneiden aus dem Stabe ein durch die Querschnitte  $z_0$  und  $z_0 + dz$  begrenztes Element heraus und lassen auf dasselbe die entsprechenden Kräfte wirken (Fig. 5). Die beliebige Belastung mit den Komponenten  $\bar{p}_z$ ,  $\bar{p}_s$  und  $\bar{p}_n$  greift in den Punkten der Mittelfläche an.

Die Gleichgewichtsbedingungen stellen wir unter Anwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen auf:

$$\bar{W} + \bar{U} = 0, \quad (26)$$

wo  $\bar{W}$  die Arbeit der äußeren und  $\bar{U}$  die Arbeit der inneren Kräfte bei den gegebenen virtuellen Verschiebungen der Punkte des Elementes sind.

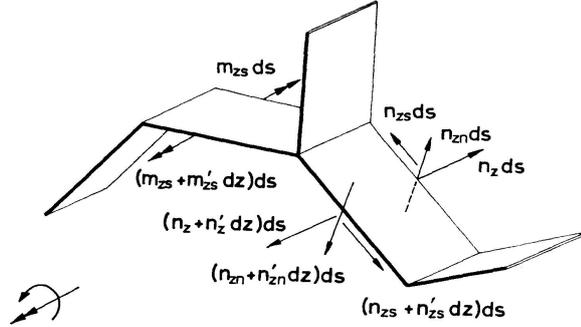


Fig. 5.

Die Punkte der Profilmittellinie des Querschnittes  $z = z_0$  erfahren die virtuellen Verschiebungen  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  und  $\bar{w}$ . Für den Querschnitt  $z = z_0 + dz$  betragen diese Verschiebungen  $\bar{u} + \bar{u}' dz$ ,  $\bar{v} + \bar{v}' dz$  und  $\bar{w} = \bar{w}' dz$ .

Für die Arbeiten  $\bar{W}$  und  $\bar{U}$ , bezogen auf die Einheit der Stablänge, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \bar{W} &= \int_s (n_{zn} \bar{u} + n_{zs} \bar{v} + n_z \bar{w} - m_{zs} \dot{\bar{u}})' ds + \int_s (\bar{p}_n \bar{u} + \bar{p}_s \bar{v} + \bar{p}_z \bar{w}) ds, \\ \bar{U} &= - \int_s (n_z \bar{w}' - 2 m_{zs} \dot{\bar{u}}' + m_s \ddot{\bar{u}}) ds. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die Gleichung (26) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_s (n'_{zn} \bar{u} + n'_{zs} \bar{v} + n'_z \bar{w} - m'_{zs} \dot{\bar{u}} + n_{zn} \bar{u}' + n_{zs} \bar{v}' + m_{zs} \dot{\bar{u}}' + m_s \ddot{\bar{u}}) ds \\ + \int_s (\bar{p}_n \bar{u} + \bar{p}_s \bar{v} + \bar{p}_z \bar{w}) ds = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Für die virtuellen Verschiebungen  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  und  $\bar{w}$  wählen wir Ausdrücke von der gleichen Form wie die Ausdrücke (12), (13) und (15) für  $u_p \equiv 0$ , jedoch führen wir statt  $\Theta_i$  und  $\Phi_k$  die Parameter  $\bar{\Theta}_i$  und  $\bar{\Phi}_k$  als beliebige Funktionen der Koordinate  $z$  ein. Diese sind, allgemein genommen, unabhängig von der wirklichen Belastung des Stabes.

Auf diese Weise erhalten wir:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \bar{\Theta}_i \left[ \int_s (n'_{zn} u_{\Theta}^{(i)} + n'_{zs} v_{\Theta}^{(i)} - m'_{zs} \dot{u}_{\Theta}^{(i)} + m_s \ddot{u}_{\Theta}^{(i)}) ds + \int_s (\bar{p}_s v_{\Theta}^{(i)} + \bar{p}_n u_{\Theta}^{(i)}) ds \right] \\ + \sum_{i=0}^n \bar{\Theta}'_i \left[ \int_s (-n'_z \omega_{\Theta}^{(i)} + n_{zn} u_{\Theta}^{(i)} + n_{zs} v_{\Theta}^{(i)} + m_{zs} \dot{u}_{\Theta}^{(i)}) ds - \int_s \bar{p}_z \omega_{\Theta}^{(i)} ds \right] \\ + \sum_{k=1}^m \bar{\Phi}_k \left[ \int_s (n'_{zn} u_{\Phi}^{(k)} - m'_{zs} \dot{u}_{\Phi}^{(k)} + m_s \ddot{u}_{\Phi}^{(k)}) ds + \int_s \bar{p}_n u_{\Phi}^{(k)} ds \right] \\ + \sum_{k=1}^m \bar{\Phi}'_k \left[ \int_s m_{zs} \dot{u}_{\Phi}^{(k)} + n_{zn} u_{\Phi}^{(k)} \right] ds = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Die Befriedigung dieser Gleichung erfordert, daß die vier Ausdrücke in den eckigen Klammern für jedes  $i$  ( $i=0, 1, 2, \dots, n$ ) und für jedes  $k$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ) Null sein müssen.

Die Nullsetzung dieser Ausdrücke ergibt, nach dem Einsetzen der Gleichungen (22) für die Größen  $n_z$ ,  $m_{zs}$  und  $m_s$ , das folgende System von Gleichungen:

$$\begin{aligned} \int_s (n'_{zn} u_{\Theta}^{(i)} + n'_{zs} v_{\Theta}^{(i)}) ds &= E' \left[ \sum_{j=0}^n (\ddot{b}_{ij} \Theta_j - 2 \kappa \dot{b}_{ij}^0 \Theta_j'') + \sum_{l=1}^m \ddot{c}_{il} \Phi_l \right] \\ &\quad - \int_s (\bar{p}_s v_{\Theta}^{(i)} + \bar{p}_n u_{\Theta}^{(i)} + m_{s,p} \ddot{u}_{\Theta}^{(i)}) ds, \\ \int_s (n_{zn} u_{\Theta}^{(i)} + n_{zs} v_{\Theta}^{(i)}) ds &= E' \left[ -a_{ii} \Theta_i'' + 2 \kappa \sum_{j=0}^n \dot{b}_{ij}^0 \Theta_j' \right] + \int_s \bar{p}_z \omega_{\Theta}^{(i)} ds, \\ &\quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (29 \text{ a—d}) \\ \int_s n'_{zn} u_{\Phi}^{(k)} ds &= E' \left[ \sum_{j=0}^n \ddot{c}_{kj} \Theta_j + \sum_{l=1}^m \ddot{d}_{kl} \Phi_l \right] - \int_s (m_{s,p} \ddot{u}_{\Phi}^{(k)} + \bar{p}_n u_{\Phi}^{(k)}) ds, \\ \int_s n_{zn} u_{\Phi}^{(k)} ds &= 0, \\ &\quad k = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen bedeuten:

$$\kappa = \frac{G}{E'}, \quad a_{ii} = \int_s t [\omega_{\Theta}^{(i)}]^2 ds, \quad \dot{b}_{ij}^0 = \frac{1}{12} \int_s t^3 \dot{u}_{\Theta}^{(i)} \dot{u}_{\Theta}^{(j)} ds = \frac{1}{12} \int_s t^3 \dot{u}_{\Theta_0}^{(i)} \dot{u}_{\Theta_0}^{(j)} ds, \quad (30 \text{ a—c})$$

$$\ddot{b}_{ij} = \frac{1}{12} \int_s t^3 \ddot{u}_{\Theta}^{(i)} \ddot{u}_{\Theta}^{(j)} ds, \quad \ddot{c}_{il} = \frac{1}{12} \int_s t^3 \ddot{u}_{\Theta}^{(i)} \ddot{u}_{\Theta}^{(l)} ds, \quad (30 \text{ d, e})$$

$$\ddot{c}_{kj} = \frac{1}{12} \int_s t^3 \ddot{u}_{\Phi}^{(k)} \ddot{u}_{\Phi}^{(j)} ds, \quad \ddot{d}_{kl} = \frac{1}{12} \int_s t^3 \ddot{u}_{\Phi}^{(k)} \ddot{u}_{\Phi}^{(l)} ds. \quad (30 \text{ f, g})$$

Die bestimmten Integrale der Ausdrücke (30 b–g) erhalten wir, unter Berücksichtigung der Gleichungen (16), (23) für  $i=4, 5, \dots, n$  sowie (17) als lineare Kombinationen von Größen (Fig. 3 und 4):

$$\begin{aligned} \int \dot{u}_{\Theta_0}^{(kr)} \dot{u}_{\Theta_0}^{(kr)} ds &= - \int \dot{u}_{\Theta_0}^{(kr)} u_{\Theta_0}^{(rk)} ds = \frac{1}{b_{kr}}, \\ \int \ddot{u}_{\Theta}^{(kr)} u_{\Theta}^{(kr)} ds &= - \int \ddot{u}_{\Theta_0}^{(kr)} u_{\Theta_0}^{(rk)} ds = \frac{12}{b_{kr}}, \\ \int \ddot{u}_{\Theta}^{(kr)} \ddot{u}_{\Phi}^{(kr)} ds &= - \int \ddot{u}_{\Theta}^{(kr)} \ddot{u}_{\Phi}^{(rk)} ds = - \int \ddot{u}_{\Phi}^{(kr)} \ddot{u}_{\Theta}^{(rk)} ds = - \frac{6}{b_{kr}}, \\ \int \ddot{u}_{\Phi}^{(kr)} u_{\Phi}^{(kr)} ds &= \frac{4}{b_{kr}}, \quad \int \ddot{u}_{\Phi}^{(kr)} \ddot{u}_{\Phi}^{(rk)} ds = - \frac{2}{b_{kr}}, \end{aligned} \quad (31)$$

wobei die bestimmte Integration in den Grenzen  $s_{kr}=0$  und  $s_{kr}=b_{kr}$  ausgeführt wurde.

Durch Elimination erhalten wir aus dem Gleichungssystem (29):

$$a_{ii} \Theta_i'''' = \frac{1}{E'} A_{i0}, \quad \text{für } i = 0, 1, 2 \quad (32)$$

und

$$a_{ii} \Theta_i'''' + \sum_{j=3}^n (-4\kappa \dot{b}_{ij}^0 \Theta_j'' + \ddot{b}_{ij} \Theta_j) + \sum_{l=1}^m \ddot{c}_{il} \Phi_l = \frac{1}{E'} A_{i0}, \quad (33)$$

$$\sum_{j=3}^n \ddot{c}_{kj} \Theta_j + \sum_{l=1}^m \ddot{d}_{kl} \Phi_l = \frac{1}{E'} B_{k0},$$

$$i = 3, 4, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

wo:

$$A_{i0} = \int_s m_{s,p} \ddot{u}_{\Theta}^{(i)} ds + \int_s (\bar{p}_n u_{\Theta}^{(i)} + \bar{p}_s v_{\Theta}^{(i)} + \bar{p}'_z w_{\Theta}^{(i)}) ds \quad (34)$$

und

$$B_{k0} = \int_s m_{s,p} \ddot{u}_{\Phi}^{(k)} ds + \int_s \bar{p}_n u_{\Phi}^{(k)} ds$$

sind.

Es kann gezeigt werden, daß sich diese Glieder auch in der folgenden Form ausdrücken lassen<sup>3)</sup>:

$$A_{i0} = \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^R p_{kr} \alpha_{kr}^{(i)} + \int_s (\bar{p}_s v_{\Theta}^{(i)} + \bar{p}'_z \omega_{\Theta}^{(i)}) ds, \quad (35)$$

$$B_{k0} = \sum_{r=1}^R m_k,$$

wo (Fig. 6)  $p_{kr}$  die Knotenlast im Knoten  $k$  und  $m_{kr}$  das Einspannmoment des Plattenstreifens  $kr$  in diesem Knoten zufolge der gegebenen Belastung  $\bar{p}_n$  sind.

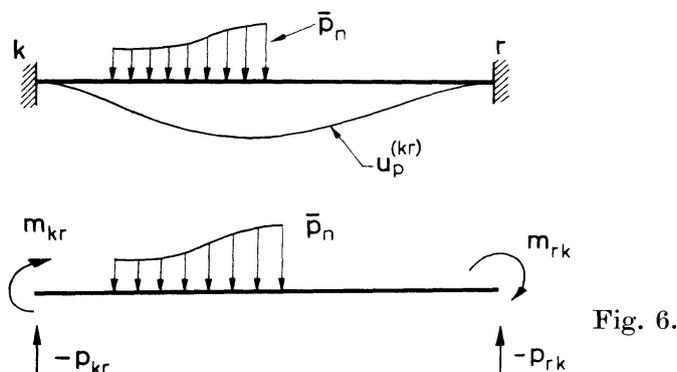


Fig. 6.

In Hinblick auf die Bedeutung der Parameter  $V_i = \Theta_i$  für  $i = 0, 1$  und  $2$  [Gleichungen (1)] sowie unter Berücksichtigung der Werte  $\omega^{(0)}$ ,  $\omega^{(1)}$  und  $\omega^{(2)}$  [Gleichungen (5a) und (6)], ferner, weil zufolge Gleichung (5c)  $V_0' = -W_0(z)$  ist, können wir die Gleichungen (32) in der folgenden Form anschreiben:

$$E' F W_0'' = -p_z, \quad E' I_{xx} \xi_0'''' = p_x + m'_x, \quad E' I_{yy} \eta_0'''' = p_y + m'_y, \quad (36)$$

wo:

$$p_z = \int_s \bar{p}_z ds, \quad p_x = \int_s (-\bar{p}_n \sin \alpha + \bar{p}_s \cos \alpha) ds, \quad m_x = \int_s \bar{p}_z x ds, \quad (37)$$

$$p_y = \int_s (\bar{p}_n \cos \alpha - \bar{p}_s \sin \alpha) ds, \quad m_y = \int_s \bar{p}_z y ds$$

sind.

Die Gleichungen (36) sind offenbar die Differentialgleichungen für die Axial-

<sup>3)</sup> Siehe [5], Kapitel 4.

und Biegungsbeanspruchung des dünnwandigen Stabes mit in ihren Ebenen nichtdeformierbaren Querschnitten.

Die Randbedingungen für das Gleichungssystem (34) können durch Verschiebungen, durch Kräfte oder durch beide Arten von Einwirkungen gegeben sein.

Die Verschiebungen der Stabenden müssen in der gleichen Form gegeben sein wie die Verschiebungen  $u$ ,  $v$  und  $w$  der Punkte der Mittelfläche. Die Randbedingungen können auf die Ausdrücke:

$$\Theta_i = \Theta_i^*, \quad \Theta_i' = \Theta_i^{*'} \quad (38)$$

zurückgeführt werden, wobei  $\Theta_i^*$  und  $\Theta_i^{*'}$  Parameter sind, welche durch die gegebenen Verschiebungen der Punkte des Endquerschnitts bestimmt werden.

Die Randbedingungen durch die Kräfte stellen wir unter Anwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen auf:

$$\int_s [(n_{zn} - n_{zn}^*) \bar{u} + (n_{zs} - n_{zs}^*) \bar{v} + (n_z - n_z^*) \bar{w} - (m_{zs} - m_{zs}^*) \dot{\bar{u}}] ds = 0.$$

Die Größen  $n_{zn}^*$ ,  $n_{zs}^*$  und  $n_z^*$  sind die äußeren, am Endquerschnitt angreifenden Kräfte und  $m_{zs}^*$  ist das äußere, verteilte Torsionsmoment.

Durch Einsetzen der Ausdrücke (22) für  $n_z$  und  $m_{zs}$  und Verwendung derselben Ausdrücke für die virtuellen Verschiebungen wie vorher, erhalten wir, nach der Elimination der Kräfte  $n_{zn}$  und  $n_{zs}$ :

$$a_{ii} \Theta_i''' - 4 \kappa \sum_{j=3}^n \dot{b}_{ij}^0 \Theta_j' = -\frac{1}{E'} Q_i^*, \quad a_{ii} \Theta_i'' = -\frac{1}{E'} M_i^*, \quad (39)$$

$$\text{wo:} \quad Q_i^* = -\int_s \bar{p}_z \omega_{\Theta}^{(i)} ds + \int_s (n_{zn}^* u_{\Theta 0}^{(i)} + n_{zs}^* v_{\Theta}^{(i)} - m_{zs}^* \dot{u}_{\Theta 0}) ds, \quad (40)$$

$$M_i^* = \int_s n_z^* \omega_{\Theta}^{(i)} ds \quad \text{sind.}$$

Die Lösung des Problems wird auf die Integration des Systems der Differentialgleichungen (34) zurückgeführt.

Die unbekanntenen Größen  $\Theta_i$  und  $\Phi_k$  werden als Komponenten der Spaltenvektoren  $\Theta$  und  $\Phi$  aufgefaßt:

$$\Theta = \begin{Bmatrix} \Theta_3 \\ \Theta_4 \\ \vdots \\ \Theta_r \end{Bmatrix}, \quad \Phi = \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_m \end{Bmatrix}. \quad (41)$$

Aus den Koeffizienten  $a_{ii}$  bilden wir die Diagonalmatrix  $A$  und aus den Koeffizienten  $\dot{b}_{ij}^0$  und  $\ddot{b}_{ij}$  die quadratischen Matrizen  $\dot{B}^0$  und  $\ddot{B}$  von der Ordnung  $n-2$ . Ferner bilden wir aus den Koeffizienten  $\ddot{c}_{il}$  die Rechtecksmatrix  $\ddot{C}$  mit  $n-2$  Zeilen und  $m$  Spalten und aus den Koeffizienten  $\ddot{d}_{kl}$  die quadratische Matrix  $\ddot{D}$  von der Ordnung  $m$ .

Das Gleichungssystem können wir nun in der folgenden Form schreiben:

$$A \Theta'''' - 4 \kappa \dot{B}^0 \Theta'' + \ddot{B} \Theta + \ddot{C} \Phi = \frac{1}{E'} A_0, \quad \ddot{C} \Theta + \ddot{D} \Phi = \frac{1}{E'} B_0, \quad (42)$$

wo  $\tilde{\mathbf{C}}$  die transponierte Matrix von  $\mathbf{C}$  ist und

$$\mathbf{A}_0 = \begin{Bmatrix} A_{30} \\ A_{40} \\ \vdots \\ A_{n0} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{B}_0 = \begin{Bmatrix} B_{10} \\ B_{20} \\ \vdots \\ B_{m0} \end{Bmatrix} \quad (43)$$

sind.

Durch Elimination aus dem System (42) erhalten wir<sup>4)</sup>:

$$\mathbf{A} \Theta''' - 4 \kappa \dot{\mathbf{B}}^0 \Theta'' + \mathbf{H} \Theta = \frac{1}{E'} \mathbf{H}_0, \quad (44)$$

$$\text{wo} \quad \mathbf{H} = \ddot{\mathbf{B}} - \tilde{\mathbf{C}} \ddot{\mathbf{D}}^{-1} \tilde{\mathbf{C}} \quad \text{und} \quad \mathbf{H}_0 = \mathbf{A}_0 - \tilde{\mathbf{C}} \ddot{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{B}_0 \quad (45)$$

sind.

Die Randbedingungen (38) und (39) lauten in Matrizenform:

$$\Theta = \Theta^*, \quad \Theta' = \Theta^{*'} \quad (46)$$

$$\text{und} \quad \mathbf{A} \Theta''' - 4 \kappa \dot{\mathbf{B}}^0 \Theta' = \frac{1}{E'} \mathbf{Q}^*, \quad \mathbf{A} \Theta'' = -\frac{1}{E'} \mathbf{M}^*, \quad (47)$$

wo  $\mathbf{Q}^*$  und  $\mathbf{M}^*$  Vektoren mit den Komponenten  $Q_i^*$  und  $M_i^*$  sind.

### Liste der Bezeichnungen

$b$	Breite der einzelnen Platte
$e$	Abstand von der Mittelfläche in Richtung der Normalen
$h$	Abstand der Tangente zur Profilmittellinie von der Drehachse
$h_n$	Abstand der Normalen zur Profilmittellinie von der Drehachse
$m_s, m_z$	Biegemomente der einzelnen Platte
$m_{sz}$	Torsionsmoment der einzelnen Platte
$m_x, m_y$	Äußere verteilte Biegemomente
$n_s, n_z$	Normalkräfte der einzelnen Platte
$n_{zs}$	Schubkraft der einzelnen Platte
$n_{sn}, n_{zn}$	Querkräfte der einzelnen Platte
$\bar{p}_n, \bar{p}_s, \bar{p}_z$	Flächenbelastungen in den Richtungen $n, s, z$
$p_x, p_y, p_z$	Linienbelastungen in den Richtungen $x, y, z$
$s$	Koordinate der Profilmittellinie
$t$	Wandstärke
$u$	Verschiebung der Punkte der Mittelfläche in Richtung zu ihrer Normalen
$v$	Verschiebung der Punkte der Mittelfläche in Richtung der Tangente zur Profilmittellinie

<sup>4)</sup> Die allgemeine Lösung dieser Gleichung wird in der Publikation [5], Kapitel 5, gezeigt.

$w$	Verschiebung in Richtung der Stabachse
$x, y, z$	Kartesische Koordinaten der Punkte der Mittelfläche
$C$	Schwerpunkt
$D$	Schubmittelpunkt
$E$	Elastizitätsmodul
$F$	Querschnittsfläche
$G$	Schubmodul
$I_{xx} = \int_F x^2 t ds$	Flächenträgheitsmoment
$I_{yy} = \int_F y^2 t ds$	Flächenträgheitsmoment
$U, V, W, \Theta$	Verschiebungsparameter
$\bar{U}$	Arbeit der virtuellen inneren Kräfte
$\bar{W}$	Arbeit der virtuellen äußeren Kräfte
$\alpha$	Winkel
$\gamma_{zs}$	Gleitung im Punkte der Mittelfläche
$\epsilon_n, \epsilon_s, \epsilon_z$	Dehnungen der Mittelfläche
$\nu$	Poissonsche Zahl
$\xi, \eta$	Verschiebungskomponenten in den Richtungen $x$ und $y$
$\varphi$	Verdrehung des Stabes
$\omega$	Sektorielle Koordinate, Einheitsverwölbung
$\Omega$	Normierte sektorielle Koordinate
$\Phi$	Verdrehung des Knotens

### Literatur

#### *A. Mitteilungen der Technischen Kommission der Schweizer Stahlbau-Vereinigung, Verlag Schweizer Stahlbau Vereinigung, Zürich*

- [1] C. F. KOLLBRUNNER und N. HAJDIN: Die St.-Venantsche Torsion, Heft 26 (Sept. 1963).
- [2] C. F. KOLLBRUNNER und N. HAJDIN: Wölbkrafttorsion dünnwandiger Stäbe mit offenem Profil, Teil I, Heft 29 (Okt. 1964).
- [3] C. F. KOLLBRUNNER und N. HAJDIN: Wölbkrafttorsion dünnwandiger Stäbe mit offenem Profil, Teil II, Heft 30 (März 1965).
- [4] C. F. KOLLBRUNNER und N. HAJDIN: Wölbkrafttorsion dünnwandiger Stäbe mit geschlossenem Profil, Heft 32 (Juni 1966).

#### *B. Andere Publikationen*

- [5] C. F. KOLLBRUNNER und N. HAJDIN: Dünnwandige Stäbe mit in ihren Ebenen deformierbaren Querschnitten. Theorie der Falterwerke nach der Verschiebungsmethode. Institut für bauwissenschaftliche Forschung, Heft 1, Januar 1968. Verlag Leemann, Zürich.
- [6] C. F. KOLLBRUNNER und N. HAJDIN: Betrachtungen zur Theorie der dünnwandigen Stäbe und ihre Anwendung im Bauwesen. Schweiz. Bauzeitung Nr. 41 (84. Jg.), 1966, S. 715—719.
- [7] S. U. BENSCHOTER: A Theory of Torsion Bending for Multicell Beams. Journ. of Appl. Mechanics, Bd. 21, 1954, H. 1, S. 25—34.

- [8] A. A. UMANSKI: Torsion und Biegung dünnwandiger Luftfahrtkonstruktionen (Aviakonstrukcij). Oborongis, 1939, Moskau (russisch).
- [9] R. HEILIG: Beitrag zur Theorie der Kastenträger beliebiger Querschnittsform. Stahlbau 1961, H. 11, S. 333—349.
- [10] W. Z. WLASSOW: Dünnwandige elastische Stäbe. Fismatgis, Moskau, 1959 (russisch). Deutsche Fassung von E. DUDA, VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1964.

### **Zusammenfassung**

Der Artikel bezieht sich auf die Theorie des Faltwerks, in welcher außer den Biegemomenten in der Querrichtung zum Unterschied der klassischen Faltwerkstheorie auch die Torsionsmomente berücksichtigt werden.

Dank des Umstandes, daß für die grundlegenden Unbekannten die Verschiebungsparameter eingeführt werden, ermöglicht diese Theorie eine relativ einfache Berechnung.

Im Unterschied zum in der Faltwerkstheorie üblichen Verfahren der Zerlegung des Systems in die einzelnen Platten, wird in der gebrachten Theorie die Deformation der Stab-Schale einheitlich für das ganze Tragwerk beschrieben. Man erhält schließlich ein System von Differentialgleichungen, welches ebenso wie die Randbedingungen in Matrizenform dargestellt wird.

### **Summary**

The article treats the theory of folded structures which, contrary to the classical theory, takes into account also the torsional moments, besides the transversal bending moments.

This theory permits a relatively easy calculation in introducing for the basic unknowns the deflection parameters.

Contrary to the ordinary procedure of decomposing the system into individual plates, the present theory explains the deformation of the beam-shell uniformly for the whole structure. Thus, we receive finally a system of differential equations which can be written in form of matrices in the same way as the boundary conditions.

### **Résumé**

L'article traite de la théorie des voûtes polygonales qui, contrairement à la théorie classique, tient également compte du moment de torsion en plus du moment de flexion transversal.

Cette théorie permet un calcul relativement facile, en introduisant pour les inconnues de base les paramètres de déplacement.

Contrairement au procédé habituel de décomposition des voûtes polygonales en plaques isolées, la présente théorie décrit la déformation de la poutre-coque uniformément pour toute la construction. On obtient ainsi finalement un système d'équations différentielles, qui peut être mis sous la forme de matrice, tout comme les conditions de bord.