

Plaques et coques cylindriques orthotropes à nervures dissymétriques

Autor(en): **Massonnet, Ch.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **19 (1959)**

PDF erstellt am: **19.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-16957>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Plaques et coques cylindriques orthotropes à nervures dissymétriques

Orthotrope Platten und Zylinderschalen mit einseitigen Aussteifungen

Orthotropic Plates and Orthotropic Cylindrical Shells with Asymmetric Ribs

CH. MASSONNET

professeur à l'Université de Liège (Belgique)

Introduction

Les plaques et coques cylindriques renforcées par une ou deux familles orthogonales de nervures parallèles se rencontrent de plus en plus fréquemment, soit comme éléments de structures (tabliers de ponts de grande portée, bordages de bateaux, fuselages d'avions, etc.), soit comme structures proprement dites (ponts à poutres multiples, barrages à cylindre ou à segment, coques de sous-marins etc.).

Le calcul de ces pièces pose les deux problèmes suivants:

- A. L'établissement des équations aux dérivées partielles gouvernant leur déformation sous l'effet des forces extérieures.
- B. L'évaluation des coefficients intervenant dans ces équations, que nous désignons dans la suite de cette note sous le nom de *rigidités*.

La manière la plus simple de traiter le problème A. est de supposer que la plaque (ou la coque cylindrique) nervurée est remplacée par une plaque (ou une coque cylindrique) d'épaisseur constante, composée d'un matériau élastique présentant deux directions orthogonales privilégiées, c'est-à-dire orthotrope. On remplace ainsi l'orthotropie de structure de la plaque ou de la coque par l'orthotropie de son matériau constitutif. Cette technique a été utilisée pour la première fois par HUBER [1] dans le cas des plaques planes et ensuite étendue au cas des coques cylindriques par divers auteurs (p.ex. BODNER [2]).

On peut se demander cependant s'il est licite de suivre cette voie. Comme on le montrera plus loin, la réponse est oui, si les nervures sont disposées symétriquement par rapport au feuillet moyen de la plaque ou de la coque;

non, en toute rigueur, dans le cas contraire (et fréquent) où les nervures n'existent que d'un seul côté de ce feuillet moyen.

Même si l'on est disposé à accepter cette erreur fondamentale provenant de l'introduction du matériau fictif orthotrope, on doit encore résoudre le problème B. évoqué ci-dessus, à savoir l'évaluation des rigidités intervenant, à titre de coefficients, dans l'équation de HUBER des plaques planes ou son correspondant pour les coques cylindriques.

HOPPMANN [3, 4] a proposé d'évaluer ces rigidités expérimentalement, en soumettant un panneau rectangulaire à la flexion pure successivement dans les deux sens puis à la torsion pure, et en mesurant simultanément les efforts appliqués et les déformations produites. Nous montrerons au § 3 que cette méthode, excellente pour les plaques à nervures symétriques, est théoriquement imparfaite dans le cas des plaques à nervures dissymétriques. On peut aussi essayer d'évaluer les rigidités par la voie théorique [5]. Nous comptons examiner en détail, dans une autre publication, les difficultés que soulève cette détermination.

La deuxième manière de traiter le problème A. est d'établir les équations différentielles de la coque conservant sa forme réelle et sa structure éventuellement composite (p. ex. formée de béton et d'acier). On fait choix d'une surface de référence arbitraire, que la plupart des auteurs font coïncider avec le feuillet moyen de la dalle isotrope faisant partie de la plaque nervurée; on prend comme inconnues les composantes cartésiennes u , v , w , du déplacement d'un point de ce feuillet.

Cette façon de traiter le problème est quasi-rigoureuse, c'est-à-dire qu'elle ne met en jeu que des hypothèses aisément acceptables, relatives par exemple à la largeur effective de plaque qui collabore avec les nervures en flexion. Malheureusement, elle conduit à un système complexe de trois équations aux dérivées partielles simultanées par rapport à u , v , w . Dans un premier chapitre, nous développons ces équations en suivant partiellement le mémoire de GIENCKE [6] qui est lui-même basé sur la théorie développée par PFLÜGER [7].

En éliminant u et v , on peut ramener ce système à une seule équation aux dérivées partielles du huitième ordre en w . L'équation aux dérivées partielles de Huber étant du quatrième ordre seulement, il est clair qu'il n'existe aucune plaque orthotrope au sens de HUBER *rigoureusement équivalente* à la plaque nervurée réelle. On peut cependant trouver une plaque de HUBER *approximativement* équivalente à la plaque nervurée, en majorant fictivement les rigidités flexionnelle et torsionnelle de cette plaque telles que les donne la théorie de l'élasticité. A ce propos, nous montrons que la rigidité torsionnelle fictive proposée par GIENCKE [6] est fort exagérée. Nous établissons une valeur plus précise de cette rigidité fictive.

Dans le second chapitre, nous étendons les résultats obtenus aux coques cylindriques à deux familles orthogonales de nervures dissymétriques. Après avoir examiné brièvement les termes qui peuvent être négligés dans l'analyse

mathématique, nous développons le système de 3 équations en u , v , w , puis nous le réduisons à une équation du huitième ordre en w . Des applications de cette théorie à divers problèmes pratiques seront données dans un mémoire ultérieur.

Chapitre I. Plaques à deux Familles orthogonales de nervures dissymétriques

§ 1. Equations fondamentales

1.1. Hypothèses de calcul

On analyse ci-après le comportement d'une dalle isotrope renforcée par deux familles orthogonales de nervures identiques et régulièrement espacées, disposées d'un seul côté de cette dalle, et qui peuvent être faites d'un autre matériau que la dalle elle-même (fig. 1.) ou même de plusieurs matériaux.

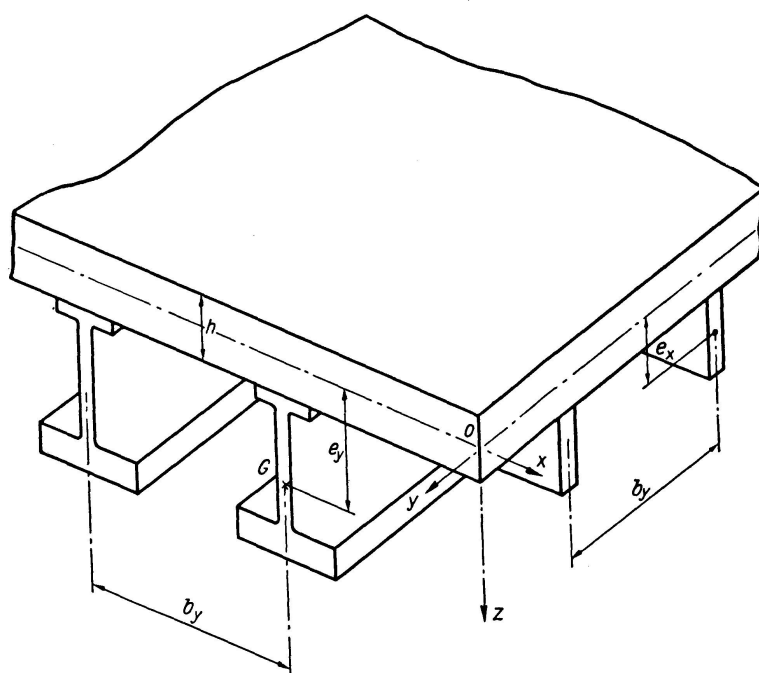


Fig. 1.

Les équations fondamentales qui vont être établies sont basées sur les hypothèses admises dans la théorie classique des plaques minces isotropes, à savoir:

1. Les matériaux composant la plaque nervurée obéissent à la loi de HOOKE.
2. Les déformations de flexion obéissent à l'hypothèse de BERNOULLI, selon

laquelle des sections planes faites normalement au feuillet moyen de la dalle, restent planes et perpendiculaires à ce feuillet après déformation.

3. On néglige le gauchissement de ces sections provoqué par les tensions de cisaillement.
4. Les déplacements des points du feuillet moyen perpendiculairement à ce feuillet sont faibles par rapport à l'épaisseur de la plaque.

En plus de ces quatre hypothèses classiques, nous admettrons:

5. Que les efforts de cisaillement parallèles au feuillet moyen sont repris exclusivement par la dalle isotrope; cette hypothèse est d'autant mieux vérifiée que les nervures sont plus minces dans le sens parallèle à la plaque.
6. Que, pour l'évaluation des moments de torsion dans la plaque, les nervures peuvent être supposées détachées de la dalle isotrope.
7. Que les effets provenant du gauchissement des sections droites des nervures sont négligeables, de sorte que ces nervures suivent en torsion les lois de la torsion uniforme selon SAINT VENANT.

1.2. Notations

1.2.1. *Les axes coordonnés* sont disposés comme suit:

Le plan $z=0$ est le plan moyen de la dalle isotrope; les axes x et y sont parallèles aux deux familles de nervures.

Les composantes du déplacement d'un point du plan moyen suivant les axes x, y, z , sont désignées par u, v, w .

On désigne par:

- h : l'épaisseur de la dalle;
 E, ν : le module de YOUNG et le coefficient de Poisson des matériaux intervenants;
 b_x, b_y : les distances entre deux nervures successives parallèles à Oy et à Ox , respectivement;
 $(\cdot)', (\cdot)''$, les dérivées partielles par rapport à x et à y , respectivement.

1.2.2. *Rigidités extensionnelles unitaires*

de la dalle isotrope:
$$D = \frac{E h}{1 - \nu^2},$$

de la plaque nervurée:
$$D_x = \frac{1}{b_x} \int_{b_x} E(z) d\Omega_x; \quad D_y = \frac{1}{b_y} \int_{b_y} E(z) d\Omega_y. \quad (1.1)$$

Les notations $\int_{b_x}$ et $\int_{b_y}$ représentent des intégrales étendues aux sections de la plaque nervurée de largeurs b_x et b_y respectivement (fig. 1).

1.2.3. Distances des axes neutres des nervures au plan moyen $z=0$

$$e_x = \frac{1}{b_x D_x} \int_{b_x} E(z) z d\Omega_x; \quad e_y = \frac{1}{b_y D_y} \int_{b_y} E(z) z d\Omega_y. \quad (1.2)$$

1.2.4. Rigidités flexionnelles et torsionnelles unitaires

rigidité de la dalle isotrope $B = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (1.3)$

rigidités flexionnelles unitaires de la plaque nervurée par rapport aux axes neutres correspondants

$$B_x = \frac{1}{b_x} \int_{b_x} E(z) (z - e_x)^2 d\Omega_x; \quad B_y = \frac{1}{b_y} \int_{b_y} E(z) (z - e_y)^2 d\Omega_y. \quad (1.3)$$

Dans les intégrales (1.1) à (1.3) ci-dessus, il faut remplacer E par $\frac{E}{1-\nu^2}$ dans la partie de l'intégrale relative à la dalle isotrope.

Les rigidités torsionnelles unitaires des nervures, B_{xy} et B_{yx} , sont à déterminer en se basant sur la théorie de la torsion de SAINT-VENANT¹⁾.

Si M_{xy}^* et M_{yx}^* sont les moments de torsion unitaires repris par ces nervures, on a les relations

$$M_{xy}^* = B_{xy} \theta_{xy}; \quad M_{yx}^* = B_{yx} \theta_{yx}, \quad (a)$$

où θ_{xy} et θ_{yx} sont les angles de torsion unitaires des nervures parallèles à l'axe des x et à l'axe des y , respectivement. Dans ces formules, les moments M^* et les torsions sont mesurées positivement dans le sens d'un tire-bouchon vissé dans le sens positif des axes x ou y . D'après cette convention et l'hypothèse 2, on a $\theta_{xy} = w''$ et $\theta_{yx} = -w''$, où w'' représente d'ailleurs la torsion géométrique de la dalle isotrope; en remplaçant les θ par ces valeurs dans les formules (a), on trouve les relations

$$M_{xy}^* = B_{xy} w''; \quad M_{yx}^* = -B_{yx} w''. \quad (1.4)$$

Introduisons encore la notation

$$C = B + B_{xy} + B_{yx}. \quad (1.5)$$

1.2.5. Etat de tension dans la plaque nervurée

La dalle isotrope est en état double de tension caractérisé par les composantes σ_x , σ_y , τ_{xy} et est en outre le siège de tensions tangentielle transversales τ_{xz} et τ_{yz} . Les nervures sont le siège de tensions normales σ_x ou σ_y ainsi que de tensions tangentielle τ_{xz} , τ_{yz} , provoquées par leur torsion à la SAINT-VENANT.

¹⁾ Dans le cas particulier où les nervures sont à section ouverte et à parois minces, on calculera $b_x B_{xy}$ et $b_y B_{yx}$ par la formule $\frac{G}{3} \sum b h^3$ où b est la largeur d'un des rectangles d'épaisseur h faible composant la section droite de la nervure.

La loi de HOOKE fournit entre ces tensions et les déformations correspondantes les relations suivantes:

Dans la dalle isotrope:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y); \quad \epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x); \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \left(\text{avec } G = \frac{E}{2(1+\nu)} \right)$$

d'où l'on déduit

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_x + \nu \epsilon_y); \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_y + \nu \epsilon_x); \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}. \quad (1.6)$$

Dans les nervures, on a

$$\sigma_x = E \epsilon_x; \quad \sigma_y = E e_y, \quad (1.7)$$

parce qu'il est connu que la torsion uniforme à la SAINT-VENANT ne produit aucune dilatation ϵ_x , ϵ_y ou ϵ_z du matériau.

1.2.6. Efforts résultants unitaires dans une section droite

On définit les efforts résultants dans une section droite comme dans la théorie classique des plaques isotropes; ces efforts se divisent en deux groupes:

A. *Efforts de l'état membranaire* (parallèles au plan moyen de la plaque).

Efforts normaux
$$N_x = \frac{1}{b_x} \int_{b_x} \sigma_x d\Omega_x; \quad N_y = \frac{1}{b_y} \int_{b_y} \sigma_y d\Omega_y.$$

Efforts de cisaillement parallèles au plan moyen: (1.8)

$$N_{xy} = \frac{1}{b_x} \int_{dalle} \tau_{xy} d\Omega_x; \quad N_{yx} = \frac{1}{b_y} \int_{dalle} \tau_{yx} d\Omega_y.$$

Les deux dernières intégrales ne s'étendent qu'à la dalle isotrope parce que les tensions de cisaillement dans les nervures parallèles au plan moyen sont supposées nulles en accord avec l'hypothèse 5.

B. *Efforts de l'état de flexion* (les sens positifs de ces efforts sont définis à la figure 2):

— moments fléchissants *par rapport aux axes x et y situés dans le plan moyen de la dalle*

$$M_x = \frac{1}{b_x} \int_{b_x} \sigma_x z d\Omega_x; \quad M_y = \frac{1}{b_y} \int_{b_y} \sigma_y z d\Omega_y.$$

— moments de torsion (positifs dans le sens positif des axes x et y)

$$M_{xy} = -\frac{1}{b_x} \int_{dalle} \tau_{xy} z d\Omega_x + M_{xy}^*; \quad M_{yx} = -\frac{1}{b_y} \int_{dalle} \tau_{yx} z d\Omega_y + M_{yx}^*. \quad (1.9)$$

Efforts tranchants normaux au plan moyen

$$T_x = \frac{1}{b_x} \int_{b_x} \tau_x z d\Omega_x; \quad T_y = \frac{1}{b_y} \int_{b_y} \tau_y z d\Omega_y.$$

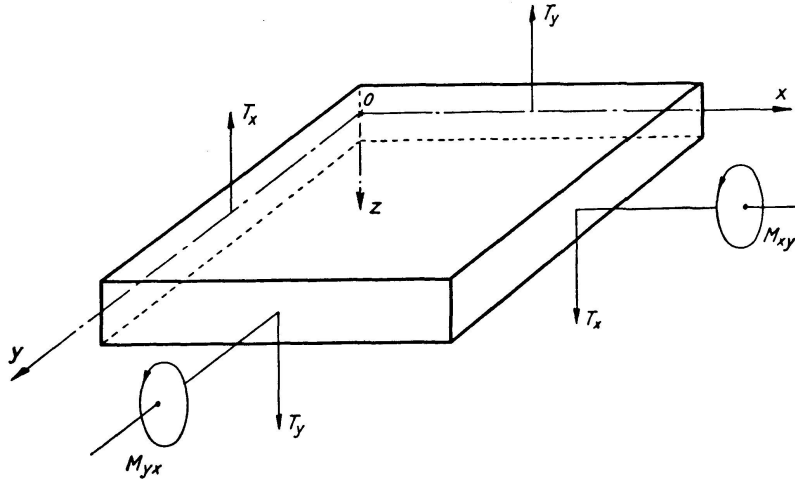


Fig. 2.

1.3. Equations d'équilibre

La plaque nervurée est supposée chargée de forces normales à son plan moyen, réparties avec l'intensité $p(x, y)$.

L'équilibre de translation parallèlement au plan moyen donne les deux équations

$$N'_x + N_{yx} = 0; \quad N'_{xy} + N_y = 0. \quad (1.10)$$

L'équilibre de translation normalement au plan moyen et l'équilibre de rotation donnent les 3 équations suivantes:

$$T'_x + T_y + p = 0, \quad -M'_{xy} + M_y - T_y = 0, \quad M'_x + M_{yx} - T_x = 0. \quad (1.11)$$

En éliminant les efforts tranchants entre ces trois relations, on trouve l'équation classique

$$M''_x + (-M_{xy} + M_{yx})' + M''_y + p = 0. \quad (1.12)$$

1.4. Etat de déformation de la plaque nervurée

L'état de déformation du plan moyen de la dalle est caractérisée:

A. Par ses déformations *membranaires*, c'est-à-dire les dilatations

$$\bar{\epsilon}_x = u'; \quad \bar{\epsilon}_y = v'$$

et par la distorsion

$$\bar{\gamma}_{xy} = u' + v'.$$

B. *Par ses déformations flexionnelles*, c'est-à-dire les courbures

$$\frac{1}{\rho_x} = -w''; \quad \frac{1}{\rho_y} = -w''$$

et la torsion géométrique

$$\theta_{xy} = -\theta_{yx} = w''.$$

En vertu de l'hypothèse n° 2 (de BERNOULLI), l'état plan de déformation en un point de la dalle situé à la distance z du plan moyen est donné par les relations

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \bar{\epsilon}_x + \frac{z}{\rho_x} = u' - z u'', & \epsilon_y &= \bar{\epsilon}_y + \frac{z}{\rho_y} = v' - z w'', \\ \gamma_{xy} &= \bar{\gamma}_{xy} - 2z \theta_{xy} = u' + v' - 2z w''. \end{aligned} \quad (1.13)$$

1.5. Expressions explicites des efforts unitaires

En remplaçant dans les expressions de définition (1.8) et (1.9) des efforts unitaires les tensions par leurs expressions (1.6) ou (1.7) en fonction des déformations, puis les déformations par leurs expressions (1.13) en fonction des déplacements, et en tenant compte des relations (1.4), on aboutit aux relations suivantes:

$$\begin{aligned} N_x &= D_x(u' - e_x w'') + \nu D v', \\ N_y &= D_y(v' - e_y w'') + \nu D u', \\ N_{xy} &= N_{yx} = \frac{1-\nu}{2} D(u' + v'). \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} M_x &= -B_x w'' - \nu B w'' + e_x D_x(u' - e_x w''), \\ M_y &= -B_y w'' - \nu B w'' + e_y D_y(v' - e_y w''), \\ M_{xy} &= [(1-\nu) B + B_{xy}] w'', \\ M_{yx} &= -[(1-\nu) B + B_{yx}] w''. \end{aligned} \quad (1.15)$$

1.6. Equations fondamentales de la plaque nervurée

En remplaçant les efforts N et M par leurs expressions explicites (1.14) et (1.15) dans les équations d'équilibre (1.10) et (1.12), on obtient les équations fondamentales de la plaque nervurée sous la forme:

$$\begin{aligned} D_x(u'' - e_x w''') + \frac{D}{2}(1-\nu)u'' + \frac{D}{2}(1+\nu)v'' &= 0, \\ D_y(v'' - e_y w''') + \frac{D}{2}(1+\nu)u'' + \frac{D}{2}(1-\nu)v'' &= 0, \\ -(B_x + e_x^2 D_x)w'''' + e_x D_x u''' - (2B + B_{xy} + B_{yx})w''' & \\ -(B_y + e_y^2 D_y)w'''' + e_y D_y v''' + p &= 0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

1.7. Cas particulier des plaques à nervures symétriques

Si la plaque comporte des nervures disposées symétriquement par rapport au plan moyen de la dalle isotrope, $e_x = e_y = 0$. Le plan moyen de la dalle isotrope n'est pas déformé, c'est-à-dire $u' = u'' = v' = v'' = 0$. Les deux premières équations (1.16) sont identiquement satisfaites et la troisième coïncide avec l'équation de HUBER:

$$\boxed{B_x w'''' + (2B + B_{xy} + B_{yx}) w'''' + B_y w'''' = p.} \quad (1.17)$$

On pose généralement pour simplifier

$$2B + B_{xy} + B_{yx} = 2H. \quad (1.18)$$

1.8. Énergie potentielle interne d'une plaque à nervures dissymétriques

L'énergie potentielle de la plaque nervurée se compose de l'énergie interne de la dalle isotrope et de celle des nervures; elle a pour expression générale

$$\begin{aligned} V = & \frac{E}{2(1-\nu^2)} \iiint_{\text{dalle}} \left(\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + 2\nu \epsilon_x \epsilon_y + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy}^2 \right) dx dy dz \\ & + \frac{E}{2} \iiint_{\text{nervures}} (\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2) dx dy dz + V_{\text{torsion}}^{\text{nervures}}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

L'énergie de torsion des nervures doit être calculée à part, parce qu'on n'a pas défini en détail la répartition des tensions tangentielles dans ces nervures.

En partant de l'expression classique pour l'énergie de torsion d'une poutre

$$V = \int \frac{C \theta^2}{2} dx$$

où C est la rigidité torsionnelle et en remarquant qu'ici $\theta = \pm w'$, on trouve

$$V_{\text{torsion}}^{\text{nervures}} = \frac{1}{2} \iint (B_{xy} + B_{yx}) w''^2 dx dy. \quad (1.20)$$

En remplaçant dans (1.19) ϵ_x , ϵ_y et γ_{xy} par leurs expressions (1.13), intégrant par rapport à z et introduisant les notations (1.1), (1.2), (1.3), on trouve, tous calculs faits:

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2} \iint \left\{ D_x u'^2 + D_y v'^2 + \frac{1-\nu}{2} D (u' + v')^2 + 2\nu D u' v' \right. \\ & - 2e_x D_x u' w'' - 2e_y D_y v' w'' + (B_x + e_x^2 D_x) w''^2 + (B_y + e_y^2 D_y) w''^2 \\ & \left. + 2\nu B w'' w'' + [2B(1-\nu) + B_{xy} + B_{yx}] w''^2 \right\} dx dy. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Dans un grand nombre de problèmes pratiques, la plaque est posée ou encastree tout le long de son pourtour sur un support rigide, de sorte qu'on a $w = 0$ le long du bord. Dans ce cas, on peut démontrer que²⁾

$$\iint (w'' w'' - w'^2) dx dy = 0,$$

de sorte que les deux derniers termes de l'expression (1.21) peuvent se grouper et qu'on a

$$\begin{aligned} V = \frac{1}{2} \iint \left[D_x u'^2 + D_y v'^2 + \frac{(1-\nu)}{2} D (u' + v')^2 + 2\nu D u' v' \right. \\ \left. - 2e_x D_x u' w'' - 2e_y D_y v' w'' + (B_x + e_x^2 D_x) w''^2 + (B_y + e_y^2 D_y) w''^2 \right. \\ \left. + (2B + B_{xy} + B_{yx}) w'^2 \right] dx dy. \end{aligned} \quad (1.22)$$

§ 2. La plaque de Huber approximativement équivalente à une plaque à nervures dissymétriques

2.1. Introduction

En éliminant u et v entre les 3 équations (1.16), on peut obtenir une équation du huitième ordre en w , de la forme

$$a_1 w'''''''' + a_2 w'''''' + a_3 w'''' + a_4 w'' + a_5 w = K \quad (2.1)$$

où K dépend des dérivées quatrièmes de p .

Il n'y a aucun intérêt à reproduire ici les valeurs explicites des coefficients $a_1, \dots, a_5$, qui sont très complexes³⁾. Le point important, qu'il importe de souligner, est que cette équation n'est pas réductible à une équation du quatrième ordre du type de HUBER.

Par conséquent, il n'existe aucune plaque orthotrope (au sens de HUBER) rigoureusement équivalente à une plaque à nervures dissymétriques.

Cependant, comme l'intégration du système d'équations (1.16) entraîne

²⁾ En effet, en appliquant la formule de GAUSS

$$\iint \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \right) dx dy = \oint (A dy - B dx)$$

$$\text{avec } A = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \text{ et } B = -\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

on trouve
$$\iint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy = \oint \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (dw)$$

et l'intégrale curviligne est nulle puisque $dw = 0$ tout le long du bord.

³⁾ On peut obtenir aisément ces valeurs explicites en partant de la théorie des coques cylindriques à nervures dissymétriques développée dans le second chapitre de ce mémoire et en supprimant tous les termes contenant l'inverse $1/R$ du rayon de la coque.

des calculs extrêmement laborieux, tandis que la littérature offre de nombreuses solutions de l'équation de HUBER souvent accompagnées de tables numériques [8, 9, 10], il y a grand intérêt à remplacer la plaque nervurée réelle par une plaque de HUBER qui prendrait, sous les charges extérieures, approximativement les mêmes déformations d'ensemble.

Une tentative dans le sens indiqué ci-dessus a été faite par GIENCKE [6]. Remarquons, à ce sujet, que la quantité

$$H \equiv B + \frac{B_{xy} + B_{yx}}{2} \quad (2.2)$$

joue, dans l'équation (1.17) de HUBER, le rôle de rigidité torsionnelle de la plaque nervurée. GIENCKE recommande, en conclusion de son étude, de tenir compte de l'excentricité des nervures en remplaçant la quantité (2.2) par la rigidité torsionnelle *apparente*⁴⁾

$$H^* = B + \frac{B_{xy} + B_{yx}}{2} + \nu e_x e_y D + (e_x + e_y)^2 \frac{(1-\nu) D}{4}. \quad (2.3)$$

Nous montrerons ci-après que l'expression (2.3) exagère fortement l'effet de la dissymétrie des nervures et nous proposerons au § 2.3 une autre expression de H^* qui serre la réalité de plus près.

2.2. Les approximations de HUBER et de GIENCKE

On peut écrire les deux premières équations (1.16) sous la forme:

$$\begin{aligned} D_x u'' &= e_x D_x w''' - D[(1-\nu)u'' + (1+\nu)v'], \\ D_y v'' &= e_y D_y w''' - D[(1-\nu)u'' + (1+\nu)v']. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Dérivons ces relations par rapport à x et à y respectivement et substituons les valeurs de $D_x u'''$ et $D_y v'''$ obtenues dans la troisième équation (1.16); nous obtenons l'équation:

$$\begin{aligned} B_x w'''' + B_y w'''' + (2B + B_{xy} + B_{yx}) w'''' + D[(1-\nu)e_x + (1+\nu)e_y] u'' \\ + D[(1+\nu)e_x + (1-\nu)e_y] v'' = p \end{aligned} \quad (2.5)$$

c'est-à-dire l'équation de HUBER où la rigidité torsionnelle

$$B + \frac{B_{xy} + B_{yx}}{2}$$

⁴⁾ GIENCKE propose en réalité la formule

$$H^* = B + B_{xy} + B_{yx} + \nu e_x e_y D + (e_x + e_y)^2 \frac{(1-\nu) D}{4}.$$

Il nous paraît qu'il compte par erreur deux fois la rigidité torsionnelle propre des nervures. C'est pourquoi la formule (2.3) est corrigée en conséquence.

est majorée du terme

$$\frac{D}{2} [(1-\nu) e_x + (1+\nu) e_y] u'' + \frac{D}{2} [(1+\nu) e_x + (1-\nu) e_y] v'' \quad (2.6)$$

Si l'on pose $\nu = 0$ dans cette expression, on obtient comme valeur approchée

$$\frac{D(e_x + e_y)}{2} (u'' + v'')$$

Mais

$$\gamma_{xy} = u' + v' \quad (2.7)$$

est la déformation par cisaillement que subit dans son plan un élément $dx dy$ de la dalle isotrope par suite de la déformation de la plaque nervurée. Ce terme correctif (2.6) de la rigidité torsionnelle a donc comme valeur approchée

$$\frac{D(e_x + e_y)}{2} \gamma_{xy}' \quad (2.8)$$

A présent, il est clair que l'intensité du cisaillement dans la dalle isotrope varie d'un point de cette dalle à l'autre. De plus, elle dépend essentiellement de la forme, du mode de chargement et du mode d'appui de la plaque nervurée.

Il résulte de ces considérations qu'il n'existe pas de formule *générale* donnant la rigidité torsionnelle apparente de la plaque de HUBER approximativement équivalente à la plaque nervurée réelle, mais seulement des formules *particulières* applicables chacune à des problèmes *particuliers*.

Ces importantes réserves étant faites, voyons comment on peut découvrir ces formules particulières. Nous examinerons ci-après quatre solutions approximatives de plus en plus précises:

Approximation d'ordre zéro

Si l'on suppose, par analogie avec la théorie des plaques isotropes, que la dalle isotrope est infiniment rigide au cisaillement dans son plan, elle impose son plan moyen à la plaque nervurée; les déplacements u et v des points de ce plan moyen sont alors négligeables. En posant $u = v = 0$ dans la troisième équations (1.16), on obtient l'équation

$$(B_x + e_x^2 D_x) w'''' + (2B + B_{xy} + B_{yx}) w'''' + (B_y + e_y^2 D_y) w'''' = p \quad (2.9)$$

qui est grossièrement erronée, parce qu'elle exagère les valeurs des rigidités flexionnelles et sous-estime celle de la rigidité torsionnelle.

Approximation d'ordre un

Si, au contraire, on suppose que la dalle isotrope n'oppose aucune résistance aux déformations par cisaillement dans son plan, c'est à dire que la rigidité $D = 0$, les deux premières équations (1.16) se réduisent à

$$u'' - e_x w''' = 0; \quad v'' - e_y w''' = 0,$$

ce qui correspond à

$$u = e_x w'; \quad v = e_y w'. \quad (2.10)$$

Cela revient à supposer que les nervures imposent à la plaque des axes neutres distants respectivement de e_x et e_y de la dalle supérieure.

En remplaçant u et v par ces valeurs (2.10) dans la troisième équation (1.16), on obtient *l'approximation de HUBER*

$$B_x w'''' + (2B + B_{xy} + B_{yx}) w'''' + B_y w'''' = p. \quad (2.11)$$

Elle revient à supposer que les équations (2.4) se réduisent à

$$D_x u'' = e_x D_x w'''; \quad D_y v'' = e_y D_y w''',$$

c'est-à-dire à poser $u = v = 0$ dans l'équation (2.5).

L'expression de l'énergie potentielle correspondant à l'approximation de Huber s'obtient en remplaçant u par $e_x w'$ et v par $e_y w'$ dans l'expression (1.21) de l'énergie potentielle d'une plaque à nervures dissymétriques, mais en faisant abstraction des termes $\frac{(1-\nu)}{2} D (u' + v')^2 + 2\nu D u' v'$, qui correspondent à l'énergie de cisaillement de la dalle isotrope dans son plan. Dans ces conditions, l'expression (1.21) se réduit à l'expression classique

$$V = \frac{1}{2} \iint \{ B_x w''^2 + B_y w''^2 + (2B + B_{xy} + B_{yx}) w''^2 \} dx dy \quad (2.12)$$

et les coefficients de w''^2 , w''^2 et w''^2 sont respectivement les rigidités flexionnelles et la rigidité torsionnelle considérées par HUBER.

Approximation d'ordre deux

La réalité est évidemment intermédiaire entre les approximations d'ordre zéro et un, en ce sens que les amplitudes des déplacements u et v sont moindres que celles données par les expressions

$$u = e_x w'; \quad v = e_y w'. \quad (2.10)$$

Pour obtenir des valeurs améliorées de u et v , on peut remplacer dans les seconds membres les relations (2.4), u et v par leurs expressions (2.10) ci-dessus, ce qui donne les relations

$$\begin{aligned} D_x u'' &= e_x D_x w''' - D [(1-\nu) e_x + (1+\nu) e_y] w''', \\ D_y v'' &= e_y D_y w''' - D [(1+\nu) e_x + (1-\nu) e_y] w''', \end{aligned} \quad (2.13)$$

puis substituer ces valeurs améliorées dans la troisième équation (1.16). Cela revient exactement à remplacer u et v par $e_x w'$ et $e_y w'$ dans l'équation (2.5), qui a été déduite précédemment de (1.16) en effectuant précisément la substitution en question.

On obtient ainsi l'équation

$$B_x w'''' + \left\{ 2B + B_{xy} + B_{yx} + 2\nu e_x e_y D + (e_x + e_y)^2 \frac{(1-\nu)D}{2} \right\} w'''' + B_y w'''' = p \quad (2.14)$$

c'est-à-dire précisément l'approximation proposée par GIENCKE.

L'expression de l'énergie potentielle correspondant à l'approximation de GIENCKE s'obtient directement en remplaçant u par $e_x w'$ et v par $e_y w'$ dans l'expression générale (1.21); on trouve ainsi:

$$V = \frac{1}{2} \iint (B_x w''^2 + B_y w''^2 + 2 H^* w'^2) dx dy \quad (2.15)$$

avec
$$H = B + \frac{B_{xy} + B_{yx}}{2} + \frac{1-\nu}{4} D (e_x + e_y)^2 + \nu D e_x e_y.$$

Pour que l'approximation de Giencke soit intéressante, il faut que le processus d'approximations décrit ci-dessus converge, c'est-à-dire qu'en appliquant de nouveau la technique d'approximations successives décrite ci-dessus, on obtienne une approximation meilleure que celle de GIENCKE. Voyons ce qu'il en est:

En remplaçant dans les seconds membres des équations (2.4) dérivées par rapport à x et y respectivement u'' et v'' par leurs expressions améliorées (2.13), on trouve les expressions (en principe meilleures!):

$$\begin{aligned} D_x u''' &= e_x D_x w'''' - \frac{D(1-\nu)}{2 D_x} \{e_x w'''' - D[(1-\nu)e_x + (1+\nu)e_y] w''''\} \\ &\quad - \frac{D(1+\nu)}{2 D_y} \{e_y w'''' - D[(1+\nu)e_x + (1-\nu)e_y] w''''\}, \\ D_y v''' &= e_y D_y w'''' - \frac{D(1+\nu)}{2 D_x} \{e_x w'''' - D[(1-\nu)e_x + (1+\nu)e_y] w''''\} \\ &\quad - \frac{D(1-\nu)}{2 D_y} \{e_y w'''' - D[(1+\nu)e_x + (1-\nu)e_y] w''''\}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Substituons-les dans la troisième équation (1.16). Cela revient exactement à remplacer u et v par leurs valeurs (2.13) dans l'équation (2.5), qui a été déduite précédemment de (1.16) en effectuant précisément la substitution en question.

On obtient ainsi l'équation:

$$\begin{aligned} &\left\{ B_x - \frac{D^2}{4 D_y} [e_x + e_y + \nu(e_x - e_y)]^2 \right\} w'''' \\ &+ \left\{ B_y - \frac{D^2}{4 D_x} [e_x + e_y + \nu(e_x - e_y)]^2 \right\} w'''' \\ &+ \left\{ 2 B + B_{xy} + B_{yx} + 2 \nu e_x e_y D + (e_x + e_y)^2 \frac{(1-\nu) D}{2} \right\} w'''' = p. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Cette équation est la meilleure équation du quatrième ordre du type de HUBER qu'on peut obtenir par le processus d'approximations successives. En effet, en effectuant l'approximation suivante, on vérifierait aisément qu'on aboutit à une équation du sixième ordre, c'est-à-dire sans intérêt pour le but que nous poursuivons.

Or, en comparant la solution (2.16) avec la solution (2.14) de GIENCKE, on voit que la rigidité torsionnelle apparente H^* est la même dans les deux cas, tandis que les rigidités flexionnelles apparentes de l'équation (2.16) sont diminuées par rapport à celles de l'équation de GIENCKE. Des exemples numériques montrent qu'elles peuvent prendre des valeurs négatives, ce qui est évidemment absurde⁵⁾.

On constate donc que l'équation (2.16) est moins bonne que l'équation (2.14) ou, en d'autres termes, que *le processus d'approximations successives décrit dans ce paragraphe ne conduit pas à des approximations sans cesse améliorées, mais au contraire à des solutions s'écartant sans cesse davantage de la réalité.*

2.3. Prise en compte approchée de la dissymétrie des nervures basée sur des considérations énergétiques

Le théorème du minimum de l'énergie potentielle dit que, si nous *imposons* à la plaque une déformée $w = w(x, y)$ *déterminée*, les déplacements u et v prendront des valeurs telles que l'énergie potentielle totale soit minimum.

Considérons donc à nouveau l'expression (1.21) de cette énergie potentielle. La partie de cette expression qui ne dépend que de w étant invariable par hypothèse, les valeurs de u et v doivent rendre minimum la partie de V qui dépend de u et v , c'est-à-dire :

$$V' = \frac{1}{2} \iint \left\{ D_x u'^2 + D_y v'^2 + \frac{1-\nu}{2} D (u' + v')^2 + 2\nu D u' v' - 2 D_x e_x u' w'' - 2 D_y e_y v' w'' \right\} dx dy. \quad (2.17)$$

Si nous voulons aboutir à une équation du type de HUBER de la forme

$$B_x^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 H^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_y^* \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p, \quad (2.18)$$

⁵⁾ Par exemple, dans le cas fréquent où la plaque ne comporte des nervures que dans le sens des x ,

$$B_y = B = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}, \quad D_y = D \frac{E h}{12(1-\nu^2)}, \quad e_y = 0.$$

La rigidité flexionnelle apparente pour la flexion dans le sens des y vaudrait :

$$\begin{aligned} B_y - \frac{D^2}{4 D_x} [e_x + e_y + \nu(e_x - e_y)]^2 &= \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} - \frac{E h}{1-\nu^2} \frac{D(1+\nu)^2 e_x^2}{4 D_x} = \\ &= \frac{E h^3}{12(1-\nu)^2} \left[1 - \frac{3 D(1+\nu)^2 e_x^2}{h^2 D_x} \right]. \end{aligned}$$

Dans le cas de nervures à section rectangulaire de hauteur d et d'aire unitaire égale à celle de la dalle, on aurait $D_x \approx 2 D$, $e_x \approx d/2$ et le crochet vaudrait $\left[1 - \frac{8}{3} \frac{h^2}{d^2(1+\nu)^2} \right]$.

Il serait négatif pour toutes les valeurs de d supérieures à $\frac{h}{1+\nu} \sqrt{\frac{8}{3}} \approx 1,26 h$!

nous devons exprimer les déplacements u et v en fonction de w . La discussion faite au paragraphe 2.3 nous montre que l'excentricité des axes neutres des deux familles de nervures est intermédiaire entre 0 et e_x (ou e_y); il est donc raisonnable de poser

$$u = a_x w'; \quad v = a_y w', \quad (2.19)$$

où a_x et a_y sont des constantes⁶⁾.

En substituant ces expressions dans l'expression (2.17) de V' , on trouve:

$$V' = \frac{1}{2} \iint \left\{ D_x a_x^2 w''^2 + D_y a_y^2 w'^2 + \frac{1-\nu}{2} D (a_x + a_y)^2 w'' w' + 2\nu D a_x a_y w'' w' - 2 D_x e_x a_x w''^2 - 2 D_y e_y a_y w'^2 \right\} dx dy.$$

Les conditions pour que V' soit minimum sont

$$\frac{\partial V'}{\partial a_x} = 0; \quad \frac{\partial V'}{\partial a_y} = 0.$$

Développons les calculs, en admettant qu'il s'agit d'une plaque à bord fixe, de sorte que

$$\iint w'' w' dx dy = \iint w'^2 dx dy.$$

On trouve, en ordonnant par rapport à a_x et a_y

$$\begin{aligned} a_x \iint \left[D_x w''^2 + \frac{(1-\nu)D}{2} w'^2 \right] dx dy + \frac{(1+\nu)D}{2} a_y \iint w''^2 dx dy \\ = e_x D_x \iint w''^2 dx dy, \\ \frac{(1+\nu)D}{2} a_x \iint w'^2 dx dy + a_y \iint \left[D_y w'^2 + \frac{(1-\nu)D}{2} w''^2 \right] dx dy \\ = e_y D_y \iint w'^2 dx dy. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Les rigidités flexionnelles et torsionnelle apparentes s'obtiennent, soit en introduisant les expressions (2.19) de u et v dans l'équation (1.16) et en déterminant les coefficients de w'''' , w'''' et le demi coefficient de w'''' , soit en introduisant les expressions (2.19) de u et v dans l'expression (1.21) de l'énergie potentielle interne et déterminant les coefficients de w''^2 , w'^2 et le demi-coefficient w''^2 . Par ces deux méthodes, on trouve les formules:

⁶⁾ Le type le plus général de solution approchée qui conduit à une équation de HUBER est

$$u' = a w'' + b w'; \quad v' = c w'' + d w'.$$

où a , b , c , d sont des constantes. Le développement des calculs basés sur ces formules nous a montré que les résultats obtenus sont peu différents de ceux obtenus à partir des lois (2.19); le supplément de précision est payé par une complication considérable des calculs.

$$\begin{aligned} B_x^* &= B_x + (e_x - a_x)^2 D_x; & B_y^* &= B_y + (e_y - a_y)^2 D_y; \\ H^* &= B + \frac{B_{xy} + B_{yx}}{2} + \frac{1-\nu}{4} D (a_x + a_y)^2 + \nu D a_x a_y. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Les équations (2.20) représentent un système de 2 équations linéaires par rapport aux inconnues a_x, a_y ; les coefficients de ces équations dépendent de la déformée $w = w(x, y)$ prise par la plaque. Les valeurs de a_x, a_y obtenues en résolvant le système varient donc essentiellement d'un problème à l'autre. Il revient au même de dire qu'il n'y a pas d'expressions générales des rigidités B_x^*, B_y^*, H^* de la plaque de HUBER approximativement équivalente à la plaque réelle, *mais seulement des expressions valables pour un mode de sollicitation déterminé*. Ainsi, par exemple, soumettons la plaque à la flexion pure dans le sens des x ($M_x = \text{constante}, M_y = 0$). La plaque prend une déformée en surface anticlastique caractérisée par $w'' = c^{ste}, w' = c^{ste}, w' = 0$. En introduisant ces valeurs des dérivées dans les égalités (2.20), on trouve

$$a_x = e_x; \quad a_y = e_y,$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} B_x^* &= B_x; & B_y^* &= B_y; \\ H^* &= B + \frac{B_{xy} + B_{yx}}{2} + \frac{1-\nu}{4} D (e_x + e_y)^2 + \nu D e_x e_y. \end{aligned}$$

Dans le cas extrême opposé où la plaque est soumise à la torsion pure ($M_x = M_y = 0, M_{xy} \neq 0$), elle se déforme en paraboloïde hyperbolique caractérisé par $w'' = w' = 0, w' \neq 0$. Les équations (2.20) donnent alors $a_x = a_y = 0$ et il en résulte que

$$\begin{aligned} B_x^* &= B_x + e_x^2 D_x > B_x, \\ B_y^* &= B_y + e_y^2 D_y > B_y, \end{aligned}$$

tandis que l'expression (2.21) de la rigidité torsionnelle H^* se réduit à la valeur de HUBER

$$H = B + \frac{B_{xy} + B_{yx}}{2},$$

qui est le minimum de toutes les valeurs que peut prendre H^* .

En résumé, les valeurs expérimentales des rigidités B_x^, B_y^*, H^* que l'on obtient par deux essais de flexion pure et un essai de torsion pure sont toujours des valeurs minima.* Dans un problème de déformation statique ou de vibrations, une plaque à nervures dissymétriques présente des rigidités effectives apparentes, variables d'un point à l'autre et toujours supérieures aux valeurs expérimentales dont question ci-dessus.

Or la technique expérimentale de détermination des rigidités que l'on vient de décrire est essentiellement celle proposée par HOPPMANN (3, 4). Il en résulte que la méthode de HOPPMANN peut conduire à de sérieux écarts vis-à-vis du comportement réel de la plaque si l'excentricité des nervures est

très accusée, comme dans une plaque orthotrope en acier pour tablier de pont, par exemple. Dans ses expériences, Hoppmann a étudié des plaques à nervures peu saillantes, pour lesquelles les corrections intervenant dans les valeurs de B_x , B_y et H sont négligeables.

2.4. Calcul des rigidités apparentes d'une plaque à nervures dissymétriques servant de pont à poutres multiples

L'application la plus importante de la théorie qui précède est le dimensionnement correct des ponts à poutres multiples.

Comme on le sait, ces ponts sont généralement simplement appuyés sur deux bords parallèles et libres sur les deux autres bords. D'autre part, il a été montré que la mise en charge la plus dangereuse pour les poutres est pratiquement celle pour laquelle le pont est chargé de forces variant sinusoïdalement dans le sens de la portée.

La déformée du pont sous une ligne de charges sinusoïdale est complexe et dépend de l'excentricité « e » de cette ligne de charges par rapport à l'axe longitudinal du pont. Pour obtenir des valeurs des excentricités a_x , a_y , qui soient valables en toute généralité, nous prendrons comme problème de base celui du pont infiniment large, simplement appuyé sur ses deux bords parallèles, et chargé d'une ligne de forces sinusoïdales le long de l'axe des x comme le montre la figure 3; nous admettrons que les valeurs obtenues sont applicables au pont réel de largeur finie.

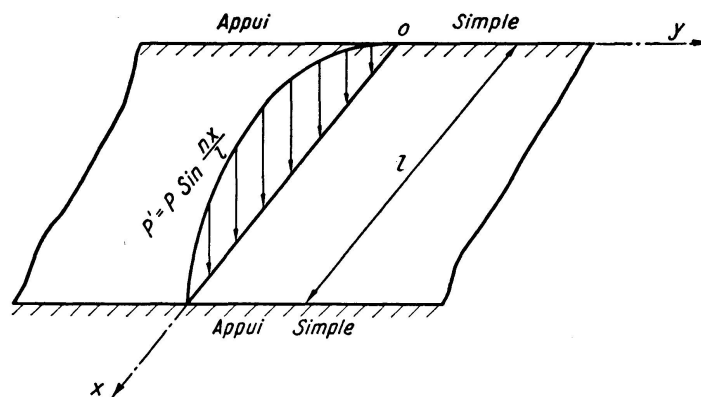


Fig. 3.

Soit
$$B_x^* w'''' + 2H^* w'''' + B_y^* w'''' = p$$

l'équation de la plaque de HUBER équivalente en moyenne (pour le problème étudié!) à la plaque nervurée réelle.

Nous avons montré dans une publication antérieure [9] que cette plaque de HUBER prenait la déformée

$$w(x, y) = \frac{p}{B_y^* \omega^3 2 \sqrt{2(1+\alpha)}} e^{-w \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} y} \sin \frac{\pi x}{2} \cdot \left\{ \cos \omega \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} y + \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \sin \omega \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} y \right\}$$

où les symboles ω et α sont définis par les relations

$$\omega = \frac{\pi}{l} \sqrt[4]{\frac{B_x^*}{B_y^*}}; \quad \alpha = \frac{H^*}{\sqrt{B_x^* B_y^*}}.$$

La déformée ci-dessus est de la forme

$$w(x, y) = \sin \frac{\pi x}{l} A a p e^{-k y} (\cos a y + B \sin a y)$$

avec les notations

$$k = \omega \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}, \quad a = \omega \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}, \quad B = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}},$$

$$A a = \frac{P}{B_y^* \omega^3 2 \sqrt{2(1+\alpha)}}$$

d'où l'on déduit directement

$$k^2 + a^2 = \omega^2; \quad k^2 - a^2 = \omega^2 \alpha.$$

et par conséquent

$$\alpha = \frac{k^2 - a^2}{k + a^2}, \quad B = \frac{k}{a},$$

Posons pour simplifier

$$e^{-k y} \cos a y = f_1(y); \quad e^{-k y} \sin a y = f_2(y)$$

et remarquons que l'on a

$$f_1(0) = 1; \quad f_2(0) = 0.$$

Les dérivées successives des fonctions f sont:

$$\begin{aligned} \dot{f}_1 &= -(k f_1 + a f_2); & \ddot{f}_1 &= (k^2 - a^2) f_1 + 2 k a f_2; \dots \\ \dot{f}_2 &= -k f_2 + a f_1; & \ddot{f}_2 &= (k^2 - a^2) f_2 - 2 k a f_1; \dots \end{aligned}$$

avec les notations f , la déformée de la plaque s'écrit:

$$w(x, y) = A a p (f_1 + B f_2) \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Tous calculs faits, on obtient comme valeurs des intégrales nécessaires:

$$\begin{aligned} \iint w''^2 dx dy &= 2 \int_0^l dx \int_0^\infty w''^2 dy = \frac{\pi^4}{l^4} \frac{a^2 + 5 k^2}{a^2 + k^2} = \omega^4 \frac{B_y^*}{B_x^*} (3 + 2 \alpha), \\ \iint w'^2 dx dy &= (a^2 + k^2)^2 = \omega^4, \\ \iint w''^2 dx dy &= \frac{\pi^2}{l^2} (a^2 + k^2) = \omega^4 \sqrt{\frac{B_y^*}{B_x^*}}. \end{aligned}$$

En introduisant ces valeurs dans les équations (2.20), on trouve, après division par $D_x B_x^*$ et $D_y B_y^*$ respectivement:

$$\begin{aligned} a_x \left[(3 + 2\alpha) + \frac{(1-\nu)D}{2D_x} \sqrt{\frac{B_x^*}{B_y^*}} \right] + \frac{(1+\nu)D}{2D_x} a_y \sqrt{\frac{B_x^*}{B_y^*}} &= e_x (3 + 2\alpha), \\ a_y \left[1 + \frac{(1-\nu)D}{2D_y} \sqrt{\frac{B_y^*}{B_x^*}} \right] + \frac{(1+\nu)D}{2D_y} a_x \sqrt{\frac{B_y^*}{B_x^*}} &= e_y. \end{aligned} \quad (2.22)$$

On peut résoudre ce système par rapport à a_x et a_y .

Notons que l'évaluation de $(a_x + a_y)$ par les formules (2.22) ne peut se faire que par approximations successives. On se donne des valeurs approchées de a_x et a_y , à l'aide desquelles on calcule des valeurs approchées de B_x^* , B_y^* et H^* par les formules (2.21). Puis on détermine des valeurs meilleures de a_x et a_y en résolvant le système (2.22); et ainsi de suite. Pratiquement, il suffit de chercher la correction à apporter à H^* .

2.5. Calcul des tensions dans une plaque à nervures dissymétriques

La dissymétrie des nervures se marque non seulement dans la valeur des rigidités apparentes de la plaque, mais encore dans la répartition des tensions dans cette plaque.

En remplaçant, dans les formules (1.6) et (1.7) donnant les tensions, ϵ_x , ϵ_y et γ_{xy} par leurs valeurs (1.12), on obtient les relations:

Dans la plaque isotrope

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} [u' + \nu v' - z(w'' + \nu w'')], \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} [v' + \nu u' - z(w'' + \nu w'')], \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} (u' + v' - 2z w''). \end{aligned}$$

Dans les nervures

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E(u' - z w''), \\ \tau_y &= E(v' - z w''). \end{aligned}$$

Les τ dans les nervures peuvent s'obtenir par la théorie classique de la torsion, en partant de l'angle de torsion unitaire

$$\theta = w''.$$

Pour avoir une théorie approchée homogène, on doit faire, dans les formules ci-dessus

$$u = a_x w', \quad v = a_y w'$$

conformément aux relations (2.19). Ces formules s'écrivent alors:

Dans la plaque isotrope:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} [(a_x - z) w'' + \nu (a_y - z) w''], \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} [(a_y - z) w'' + \nu (a_x - z) w''], \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} (a_x + a_y - 2z) w''.\end{aligned}\quad (2.23)$$

Dans les nervures:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= E (a_x - z) w'' \\ \sigma_y &= E (a_y - z) w''\end{aligned}\quad (2.24)$$

plus les tensions tangentielles déterminées comme il a été dit ci-dessus. Les efforts et moments dans la plaque nervurée s'obtiennent de même en remplaçant, dans les équations (1.14) et (1.15), u et v par les valeurs $a_x w'$ et $a_y w'$; on trouve ainsi:

$$\begin{aligned}N_x &= D_x (a_x - e_x) w'' + \nu D a_y w'', \\ N_y &= D_y (a_y - e_y) w'' + \nu D a_x w'', \\ N_{xy} &= \frac{1-\nu}{2} D (a_x + a_y) w''.\end{aligned}\quad (2.25)$$

$$\begin{aligned}M_x &= -[B_x + (e_x^2 - e_x a_x) D_x] w'' - \nu B w'', \\ M_y &= -[B_y + (e_y^2 - e_y a_y) D_y] w'' - \nu B w'', \\ M_{xy} &= [(1-\nu) B + B_{xy}] w''; \quad M_{yx} = -[(1-\nu) B + B_{yx}] w''.\end{aligned}\quad (2.26)$$

Nous nous proposons ci-après de comparer numériquement les valeurs du paramètre de torsion $\alpha \equiv \frac{H}{\sqrt{B_x B_y}}$ obtenues 1. par la théorie classique de HUBER; 2. par GIENCKE, et enfin 3. par notre méthode approchée dans le cas d'une plaque infiniment longue formant panneau de tablier orthotrope en acier. Nous empruntons cet exemple à la publication de TRENKS [11]. Les dimensions de la section droite de la plaque sont définies à la figure 4. La portée est $l = 4$ m. La charge sinusoidale appliquée vaut

$$p' = p \sin \frac{\pi x}{l} \quad \text{avec } p = 1 \text{ t/m crt.}$$

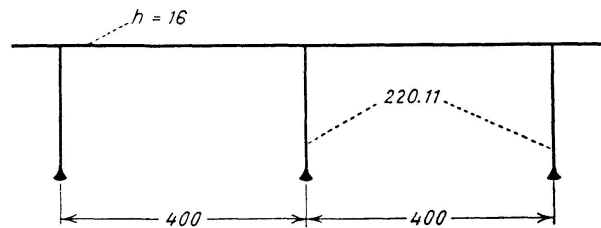


Fig. 4.

On a directement par la figure

$$\frac{D}{E} = \frac{D_y}{E} = \frac{h}{1-\nu^2} = 17,58 \text{ mm}^2/\text{mm},$$

$$\frac{B}{E} = \frac{B_y}{E} = \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} = 375 \text{ mm}^4/\text{mm}.$$

TRENKS donne les valeurs suivantes:

$$\frac{B_x + e_x^2 D_x}{B_y + e_y^2 D_y} = 600; \quad \frac{\Omega_{\text{nervure par unité de longueur}}}{h} = 0,5; \quad \frac{d_x}{t} = 10,$$

où d_x est la distance au plan moyen de la dalle du centre de gravité d'une nervure.

On en déduit:

$$\Omega_{\text{nervure par unité de longueur}} = 8 \text{ mm}^2/\text{m}.$$

$$d_x = 160 \text{ mm}.$$

$$\frac{1}{E} (B_x + e_x^2 D_x) = 600 \left(\frac{B_y + e_y^2 D_y}{E} \right) = 600 \frac{B}{E} = 600 \times 375 = 225\,000 \text{ mm}^4/\text{m}. \quad (\text{a})$$

La distance de l'axe neutre au plan moyen de la dalle isotrope est donné par l'égalité

$$\Omega_{\text{nervure}} \times d_x = \left(\Omega_{\text{nervure}} + \frac{\Omega_{\text{tôle}}}{1-\nu^2} \right) \times e_x$$

d'où

$$e_x = \frac{8 \times 160}{8 + 17,58} = 50,1 \text{ mm}.$$

Dès lors, on déduit de l'égalité (a)

$$\begin{aligned} \frac{B_x}{E} &= 225\,000 - e_x^2 \frac{D_x}{E} = 225\,000 - e_x^2 \left(\Omega_{\text{nervure}} + \frac{l_{\text{tôle}}}{1-\nu^2} \right) \\ &= 225\,000 - \overline{50,1^2} (8 + 17,58) = 160\,600 \text{ mm}^4/\text{mm}. \end{aligned}$$

La rigidité torsionnelle vaut, selon HUBER

$$H = B = 375 E \text{ kg mm}^2/\text{m}.$$

Le paramètre de torsion de la plaque correspondant vaut

$$\alpha_H = \frac{H}{\sqrt{B_x B_y}} = \frac{375}{\sqrt{160\,600 \times 375}} = 0,0483.$$

Selon GIENCKE, la rigidité torsionnelle vaudrait, d'après la formule (2.14)

$$\begin{aligned} H^* &= B + \nu e_x e_y D + (e_x + e_y)^2 \frac{(1-\nu) D}{4} \\ &= 375 E + \overline{50,1^2} \frac{0,7 \times 17,58 E}{4} = 8125 E \text{ kg mm}^2/\text{mm}, \end{aligned}$$

et le paramètre de torsion aurait pour valeur

$$\alpha_G = \frac{8125}{\sqrt{160\,600 \times 375}} = 1,045.$$

Appliquons maintenant notre méthode approchée. Adoptons provisoirement

$$B_x^* = B_x; \quad B_y^* = B_y, \quad \alpha = 0,30.$$

Les équations (2.22) s'écrivent:

$$8,585 a_x + 9,26 a_y = 180,5$$

$$0,0314 a_x + 1,017 a_y = 0.$$

On en tire:

$$a_x = 21,4 \text{ mm}; \quad a_y = -0,679 \text{ mm}$$

puis

$$\frac{H^*}{E} = \frac{1}{E} \left[B + \frac{D(1-\nu)}{4} (a_x + a_y)^2 \right] = 375 + 1368 = 1743 \text{ mm}^4/\text{mm},$$

$$\frac{B_x^*}{E} = \frac{1}{E} [B_x + D_x (e_x - a_x)^2] = 160\,600 + 20\,600 = 181\,200 \text{ mm}^4/\text{mm}.$$

$$\frac{B_y^*}{E} = \frac{1}{E} (B + D a_y^2) = 375 + 17,58 \times 0,679^2 = 383 \text{ mm}^4/\text{mm},$$

$$\alpha_M \equiv \frac{H^*}{\sqrt{B_x^* B_y^*}} = \frac{1743}{\sqrt{181\,200 \times 383}} = 0,211.$$

Ces valeurs sont suffisamment précises pour la pratique. Si l'on désire des valeurs très précises, on peut réécrire les équations (2.22) avec les valeurs de B_x^* , B_y^* et α_M trouvées en dernier lieu; on obtient les équations

$$8,672 a_x + 9,75 a_y = 171,5$$

$$0,0299 a_x + 1,016 a_y = 0$$

dont les racines sont:

$$a_x = 20,5 \text{ mm}; \quad a_y = -0,603 \text{ mm}.$$

c'est-à-dire pratiquement identiques aux valeurs trouvées en première approximation.

Chapitre II. Coques cylindriques à nervures dissymétriques

§ 3. Equations fondamentales

3.1. Introduction

Il est aisé d'étendre la théorie développée au chapitre I au cas plus général d'une coque cylindrique renforcée par deux familles de nervures orthogonales, disposées d'un côté de la tôle suivant les parallèles et génératrices de la coque, respectivement. Cette théorie est basée sur les mêmes hypothèses qu'au § 1.1.

3.2. Notations

On choisit comme origine des axes un point du feuillet moyen de la tôle isotrope faisant partie de la coque orthotrope. Les axes x, y, z , sont disposés comme l'indique la figure 5. On désigne par u, v, w , les déplacements élastiques d'un point du feuillet moyen dans le sens de x, y, z , respectivement.

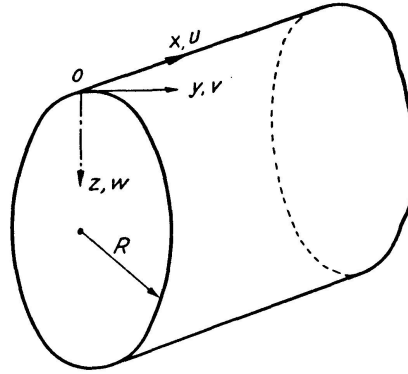


Fig. 5.

Pour le surplus, on utilise à nouveau les notations introduites aux chiffres 1.2.1 à 1.2.5 du paragraphe 1.

3.3. Equations d'équilibre

La coque nervurée est supposée chargée de forces normales à son feuillet moyen, réparties avec l'intensité $p(x, y)$.

L'équilibre de translation d'un élément de coque parallèlement au feuillet moyen donne les deux équations:

$$N'_x + N_{yx} = 0; \quad N'_{xy} + N_y = 0, \quad (3.1)$$

où l'on désigne, comme dans le cas des plaques, par $()'$ et $()''$ des dérivées partielles par rapport à x et y respectivement. L'équilibre de translation normalement au feuillet moyen et l'équilibre de rotation donnent les 3 équations suivantes:

$$T'_x + T_y + \frac{N_y}{R} + p = 0, \quad -M'_{xy} + M_y - T_y = 0, \quad M'_x + M_{yx} - T_x = 0.$$

En éliminant les efforts tranchants entre ces trois relations, on trouve l'égalité

$$M''_x + (-M_{xy} + M_{yx})' + M_y'' + \frac{N_y}{R} + p = 0. \quad (3.2)$$

3.4. Etat de déformation de la coque nervurée

REISSNER [12] et ZERNA [13] ont montré que, vu les hypothèses simplificatrices faites dans l'introduction (chiffre 1.1), il n'y avait pas d'intérêt à retenir,

dans les expressions des déformations, les termes en w , w'' , w' et w'' qui sont utilisés par FLÜGGE dans sa théorie des coques cylindriques [14, 15]. En conséquence, les déformations en un point du feuillet moyen sont données par les expressions simples

$$\bar{\epsilon}_x = u'; \quad \bar{\epsilon}_y = v' - \frac{w}{R}; \quad \bar{\gamma}_{xy} = u' + v'.$$

En vertu de l'hypothèse 3) faite au paragraphe 1.1, les déformations en un point quelconque de la coque valent:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \bar{\epsilon}_x - z w'' = u' - z w'', \\ \epsilon_y &= \bar{\epsilon}_y - z w'' = v' - \frac{w}{R} - z w'', \\ \gamma_{xy} &= \bar{\gamma}_{xy} - 2z w' = u' + v' - 2z w'. \end{aligned} \quad (3.3)$$

3.5. Expressions explicites des efforts unitaires

En remplaçant dans les expressions de définition des efforts unitaires données au paragraphe 1.2.6 les tensions par leurs expressions (1.6) ou (1.7) en fonction des déformations, puis les déformations par leurs expressions (3.3) en fonction des déplacements, on aboutit aux relations suivantes:

$$\begin{aligned} N_x &= D_x (u' - e_x w'') + \nu D \left(v' - \frac{w}{R} \right), \\ N_y &= D_y \left(v' - \frac{w}{R} - e_y w'' \right) + \nu D u'', \\ N_{xy} &= N_{yx} = \frac{1-\nu}{2} D (u' + v'). \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} M_x &= -B_x w'' - \nu B w'' + e_x D_x (u' - e_x w''), \\ M_y &= -B_y w'' - \nu B w'' + e_y D_y \left(v' - \frac{w}{R} - e_y w'' \right), \\ M_{xy} &= [(1-\nu) B + B_{xy}] w', \\ M_{yx} &= -[(1-\nu) B + B_{yx}] w'. \end{aligned} \quad (3.5)$$

On peut constater que ces expressions sont les mêmes que celles trouvées dans le cas d'une plaque, sauf que v' est remplacée partout par $(v' - \frac{w}{R})$.

3.6. Equations fondamentales de la coque cylindriques nervurée

En remplaçant les efforts N et M par leurs expressions explicites (3.4) et (3.5) dans les équations d'équilibre (3.1) et (3.2), on obtient les équations fondamentales de la coque cylindrique nervurée sous la forme

$$\begin{aligned}
D_x(u'' - e_x w''') + \frac{D}{2}(1-\nu)u'' + \frac{D}{2}(1+\nu)v'' - \frac{\nu D}{R}w' &= 0, \\
D_y(v'' - e_y w''') + \frac{(1+\nu)D}{2}u'' + \frac{(1-\nu)D}{2}v'' - \frac{D_y}{R}w' &= 0, \\
(B_x + e_x^2 D_x)w'''' + (2B + B_{xy} + B_{yx})w'''' + (B_y + e_y^2 D_y)w'''' & \\
- e_x D_x u''' - e_y D_y v''' + \frac{2e_y D_y}{R}w'' - \frac{D_y}{R}v' - \frac{\nu D}{R}u' + \frac{D_y}{R^2}w &= p.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

3.7. Equation en w seul

Proposons-nous d'éliminer u et v entre les trois équations (3.6) de manière à obtenir une équation aux dérivées partielles ne contenant plus que le déplacement w normal à la coque.

On peut écrire les deux premières équations (3.6) sous la forme

$$D_x u'' + A v'' + C u'' = M, \quad D_y v'' + A u'' + C v'' = N, \tag{3.7}$$

en introduisant les notations

$$A = \frac{D}{2}(1+\nu); \quad C = \frac{D}{2}(1-\nu), \tag{3.8}$$

$$M = D_x e_x w''' + \frac{\nu D}{R}w'; \quad N = D_y e_y w''' + \frac{D_y}{R}w'. \tag{3.9}$$

Les équations (3.7) présentent une certaine symétrie dont on peut tirer parti pour séparer les variables u et v . En dérivant la première équation (3.7) deux fois par rapport à x puis deux fois par rapport à y , puis la 2e équation (16) une fois par rapport à x et une fois par rapport à y , on trouve les relations:

$$D_x u'''' + A v'''' + C u'''' = M'' \tag{a}$$

$$D_x u'''' + A v'''' + C u'''' = M'' \tag{b}$$

$$D_y v'''' + A u'''' + C v'''' = N'' \tag{c}$$

Ajoutons (a) multiplié par C à (b) multiplié par D_y et soustrayons-en (c) multiplié par A ; on parvient à éliminer la variable v et on obtient la relation

$$C D_x u'''' + (C^2 + D_x D_y - A^2) u'''' + C D_y u'''' = C M'' + D_y M'' - A N''$$

Cette relation peut se mettre sous la forme condensée

$$\varphi(u) = C M'' + D_y M'' - A N'' \tag{3.10}$$

en introduisant l'opérateur différentiel linéaire du quatrième ordre

$$\varphi(\cdot) \equiv C D_x(\cdot)'''' + (C^2 + D_x D_y - A^2)(\cdot)'''' + C D_y(\cdot)'''' \tag{3.11}$$

En effectuant sur les équations (3.7) les manipulations symétriques de celles décrites ci-dessus, on obtient une équation aux dérivées partielles en v seul

$$\varphi(v) = C N'' + D_x N'' - A M'' \quad (3.12)$$

symétrique de (3.10).

Il est maintenant aisé d'obtenir l'équation ne contenant plus que w ; en effet, appliquons l'opérateur φ aux deux membres de la troisième équation (3.6); il vient:

$$\begin{aligned} & \varphi[(B_x + e_x^2 D_x) w'''' + (2B + B_{xy} + B_{yx}) w'''' + (B_y + e_y^2 D_y) w'''] \\ & + \varphi \left[\frac{2e_y D_y}{R} w'' + \frac{D_y}{R^2} w \right] - e_x D_x \varphi(u''') - e_y D_y \varphi(v''') \\ & - \frac{D_y}{R} \varphi(v') - \frac{\nu D}{R} \varphi(u') = \varphi(p). \end{aligned}$$

En remplaçant $\varphi(w''')$, $\varphi(v''')$, $\varphi(v')$ et $\varphi(u')$ par les valeurs obtenues par différentiation des relations (3.11) et (3.12), on obtient l'équation suivante aux dérivées partielles du huitième ordre en w :

$$\begin{aligned} & \varphi[(B_x + e_x^2 D_x) w'''' + (2B + B_{xy} + B_{yx}) w'''' + (B_y + e_y^2 D_y) w'''] \\ & + \varphi \left[\frac{2e_y D_y}{R} w'' + \frac{D_y}{R^2} w \right] - e_x D_x (C M'''' + D_y M'''' - A N''') \\ & - e_y D_y (C N'''' + D_x N'''' - A M''') - \frac{D_y}{R} (C N'' + D_x N'' - A M'') \\ & - \frac{\nu D}{R} (C M''' + D_y M'' - A N'') = \varphi(p). \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.8. Equations fondamentales du voilement d'une coque cylindrique à nervures dissymétriques

Les équations établies au chiffre 3—7 ne conviennent que pour étudier des situations d'équilibre stable, mais on peut aisément les compléter pour leur permettre de représenter des phénomènes de voilement.

Appelons N_x , N_y et N_{xy} , respectivement, les résultantes par unité de longueur des efforts normaux axiaux et circonférentiels et des efforts tangentiels provoqués dans la coque non voilée par les forces extérieures. Si nous nous limitons à la considération des petites déformations, nous pouvons admettre que les efforts en question gardent leurs valeurs dans la coque infiniment peu voilée.

Si on admet de plus l'approximation de DONNELL [16], on peut voir que les résultantes et moments intérieurs gardent leurs expressions antérieures (3.4) et (3.5). Les conditions d'équilibre (3.1) restent inchangées, tandis que la condition (3.2) doit s'écrire, pour $p=0$:

$$M_x'' + (-M_{xy} + M_{yx})' + M_y'' + \frac{N_y}{R} + N_x w'' + N_y w'' + 2 N_{xy} w'' = 0.$$

On constate que cette équation peut s'obtenir en remplaçant dans (3.2) p par le terme

$$N_x w'' + N_y w'' + 2 N_{xy} w'' . \quad (3.14)$$

Par conséquent les équations différentielles du voilement sont les équations (3.6) [ou l'équation (3.13)] dans lesquelles on remplace p par le terme ci-dessus.

Remarque: Il est clair que, dans la théorie développée ci-dessus, on a étudié avec raffinement l'effet de l'excentricité des nervures tandis qu'on adoptait par ailleurs pour le jeu des forces dans la coque voilée une approximation assez sommaire, à savoir celle de DONNELL. Une telle manière de faire n'est peut-être pas très équilibrée. Nous l'adoptons néanmoins parce que nous croyons que les termes provenant de l'excentricité des nervures sont *plus importants* que les termes «de FLÜGGE» et que ce sont eux qu'il faudrait conserver d'abord si l'on veut envisager des effets du *second ordre*.

Bibliographie

1. M. T. HUBER, Comptes Rendus, vol. 170, pp. 511—513, 1920.
— Bauingenieur, vol. 5, 1923, pp. 354—360 et pp. 392—395.
2. S. R. BODNER, Journ. Appl. Mech., vol. 22, pp. 269—277, 1957.
3. W. HOPPMANN, Journ. Appl. Mech., vol. 77, pp. 267—271, 1955.
4. W. HOPPMANN, Proc. Soc. Exp. Stress Analysis, vol. XIV, n° 1, 1956.
5. N. J. HUFFINGTON, Journ. Appl. Mech., vol. 23, pp. 15—20, 1956.
6. E. GIENCKE, Der Stahlbau, vol. 24, pp. 128—129, 1955.
7. A. PFLÜGER, Ing. Archiv, vol. 16, pp. 111—120, 1947.
8. W. CORNELIUS, Stahlbau, vol. 21, pp. 21—24, pp. 43—48, pp. 60—64, 1952.
9. CH. MASSONNET, Mém. A.I.P.C., vol. X, pp. 147—182, 1950.
10. CH. MASSONNET, Ann. Trav. Publ. Belgique, 68 pp., Oct. 1954.
11. K. TRENS, Der Bauingenieur, vol. 29, pp. 372—377, 1954.
12. F. B. HILDEBRAND, E. REISSNER et G. B. THOMAS, N.A.C.A. Techn. Note n° 1833, mars 1949.
13. W. ZERNA, Zeitsch. angew. Math. Mech., vol. 32, pp. 266—267, 1952.
14. W. FLÜGGE, Ing.-Archiv, vol. III, pp. 463—506, 1932.
15. W. FLÜGGE, Statik und Dynamik der Schalen, 2e édition, Berlin, J. Springer, 1957.
16. L. H. DONNELL, N.A.C.A. Technical Report, n° 479, 1933.

Résumé

L'auteur développe la théorie des plaques formées d'une dalle isotrope renforcées par deux familles orthogonales de nervures fixées d'un côté de cette dalle. Il montre que dans une telle structure, le déplacement transversal

w obéit à une équation du huitième ordre. Il n'est pas possible de trouver une équation du quatrième ordre de HUBER représentant rigoureusement, pour tous les cas de charge, le comportement de la plaque réelle. Par contre, il est possible de trouver, pour un cas de charge déterminé, une plaque de HUBER équivalente en moyenne à la plaque réelle. L'auteur montre comment on peut trouver les rigidités de cette plaque de HUBER dans le cas où la plaque étudiée est très large et forme pont à poutres multiples. Il montre que la valeur de la rigidité torsionnelle apparente proposée par GIENCKE est excessive.

La théorie précédente est ensuite étendue aux coques cylindriques renforcées par deux familles orthogonales de nervures fixées d'un côté de la coque. Les équations générales obtenues seront appliquées à des cas concrets dans un mémoire ultérieur.

Zusammenfassung

Der Verfasser entwickelt hier die Theorie der, durch zwei orthogonale Scharen von einseitig fixierten Steifen verstärkten, isotropen Platte. Er zeigt, daß in einem solchen Tragwerk die Querverschiebung W einer Gleichung achter Ordnung gehorcht. Es ist nicht möglich, eine Hubersche Gleichung vierter Ordnung zu finden, die für alle Belastungsfälle genau das Verhalten der reellen Platte beschreibt. Dagegen ist es möglich, für einen bestimmten Belastungsfall eine Hubersche Platte zu finden, die im Mittel der gegebenen Platte entspricht. Der Verfasser zeigt, wie man die Steifigkeitswerte dieser Huberschen Platte, dort wo das untersuchte Tragwerk sehr breit ist und eine Brücke mit mehreren Hauptträgern bildet, bestimmen kann. Er zeigt auch, daß der Wert der scheinbaren Torsionssteifigkeit, wie er von GIENCKE vorgeschlagen wurde, zu hoch ist.

Diese Theorie wird weiterhin auf Zylinderschalen mit einseitig fixierten, orthogonalen Steifenscharen erweitert. Die hier aufgestellten allgemeinen Gleichungen werden in einer späteren Abhandlung auf konkrete Fälle angewendet werden.

Summary

The author develops the theory of plates consisting of an isotropic slab reinforced by two orthogonal series of ribs fixed to one side of the slab. He shows that in a structure of this kind the transverse displacement w follows an eighth-order equation. It is impossible to find a HUBER fourth-order equation which represents strictly, for all cases of loading, the behaviour of the actual plate. On the other hand, it is possible to find, for a given case of loading, a HUBER plate which is equivalent, on an average, to the actual plate.

The author shows how it is possible to determine the rigidities of this HUBER plate for the case where the plate being studied is very wide and forms a multi-girder bridge. He shows that the value for the apparent torsional rigidity suggested by GIENCKE is excessive.

The foregoing theory is then extended to cylindrical shells stiffened by two orthogonal series of ribs fixed to one side of the shell. The general equations obtained will be applied to concrete cases in a subsequent paper.