

# Schwingungen der Brücken aus Stahl und Stahlbeton

Autor(en): **Koloušek, Vladimir**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **16 (1956)**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-15069>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Schwingungen der Brücken aus Stahl und Stahlbeton

*Vibrations in steel and reinforced concrete bridges*

*Vibration dans les ponts métalliques et en béton armé*

Ing. Dr. VLADIMIR KOLOUŠEK, Professor der Eisenbahnhochschule, Praha

## Einleitung

Eines der interessantesten Probleme der Brückendynamik ist die Frage der periodischen Triebräderwirkung der Lokomotive. Diese Aufgabe wurde theoretisch von TIMOSHENKO<sup>1)</sup> und später sehr ausführlich von INGLIS<sup>2)</sup> gelöst, welcher die Ergebnisse der langjährigen Messungen verarbeitete, die durch den Ausschuß „Bridge Stress Committee“ auf britischen Eisenbahnen durchgeführt wurden<sup>3)</sup>. Die genannten Autoren halten die Einflüsse der periodischen Kräfte der Triebräder, die sogenannten „hammer blows“, für die Hauptursache der Brückenschwingungen. Zu ähnlichen Resultaten gelangen auch andere Verfasser, z. B. B. BRÜCKMANN<sup>4)</sup>. Ebenso machen KLÖPPEL und LIE<sup>5)</sup> bei Lösung der Hängebrücken Gebrauch von den Ergebnissen von INGLIS. Die sowjetischen Instruktionen für Nachrechnung von älteren Eisenbahnbrücken<sup>6)</sup> geben kritische Geschwindigkeiten an, die aus der Resonanz der Eigenfrequenz mit der Triebräderumdrehungszahl abgeleitet sind. Die amerikanische Forschung untersucht ebenfalls die Einflüsse der Hammerblows<sup>7)</sup>.

---

<sup>1)</sup> S. TIMOSHENKO: *Vibration Problems in Engineering*, New York 1929.

<sup>2)</sup> C. E. INGLIS: *A Mathematical Treatise on Vibrations in Railway-Bridges*, Cambridge 1934.

<sup>3)</sup> Department of Scientific and Industrial Research. Report of the Bridge Stress Committee, London 1928.

<sup>4)</sup> B. BRÜCKMANN: *Einschwingvorgänge von Brückenhauptträgern*, München 1939.

<sup>5)</sup> KLÖPPEL und LIE: *Lotrechte Schwingungen von Hängebrücken*. *Ingenieur-Archiv* 1942, S. 211.

<sup>6)</sup> *Handbuch des Eisenbahners*. T. IV. Moskau 1951. S. 615.

<sup>7)</sup> RUBLE: *Impact in Railroad Bridges*. *Proc. Am. Society Civil Engineering* VII 1955 J. 81, No. 736.

Andererseits schreibt eine ganze Reihe von Verfassern diesen Einflüssen wenig Bedeutung zu. HARTMANN<sup>8)</sup> ist der Meinung, daß diese Kräfte kein großes Aufschwingen der Brücke bewirken können, da sich die Eigenschwingungsfrequenz der Brücke bei der Überfahrt der Lokomotive beständig ändert und deswegen die Resonanz der Umdrehungszahl der Triebräder mit dieser Frequenz nur sehr kurze Zeit andauern kann. Derselben Ansicht ist P. DELPUECH<sup>9)</sup>. A. A. CH. RONSSE und R. DESPRETS<sup>10)</sup> kommen ebenfalls zum Ergebnis, daß die Triebräderwirkungen vernachlässigt werden können.

Um die ziemlich großen Unterschiede in den Ansichten über dieses wichtige Problem zu erklären, führten die tschechoslowakischen Eisenbahnen eigene Forschungen durch. Es wurden einerseits Stahlbrücken untersucht, wobei schon frühere fremde Resultate zur Verfügung standen, andererseits Stahlbetonbrücken, die bisher — soweit uns bekannt — in dynamischer Hinsicht nicht gründlich behandelt wurden.

### Stählerne Eisenbahnbrücken

Wir wollen vorerst sehr kurz die Ergebnisse, zu denen INGLIS auf Grund der britischen Messungen gelangte, wiederholen. INGLIS teilt Brücken in drei Kategorien. Es sind erstens Brücken kleiner Stützweite (etwa bis 15 m), bei welchen die periodischen Triebräderkräfte ähnliche Einflüsse ausüben wie wenn sie als statische Belastung wirkten. Zweitens sind es Brücken mittlerer Stützweite (etwa zwischen 15—80 m), bei welchen die periodischen Kräfte nicht nur die Brückenkonstruktion, sondern auch die Lokomotive auf ihren eigenen Federn zum Schwingen bringen.

Endlich sind es Brücken großer Stützweite, über 80 m. Diese Brücken kann man so berechnen, daß der Einfluß der sich bewegenden Masse der Lokomotive vernachlässigt und nur die Wirkung der beweglichen, konstanten Kraft — d. h. des Lokomotivgewichtes — berücksichtigt wird. Mit dieser Kraft ist eine harmonisch veränderliche Kraft, d. h. die senkrechte Komponente der Zentrifugalkräfte der Triebräder, verbunden. Die Masse der Loko-

<sup>8)</sup> MELAN-HARTMANN: Der Brückenbau. Stahlbrücken, Wien 1951.

<sup>9)</sup> DELPUECH: Flexion dynamique et oscillations des ponts. Annales des Ponts et Chaussées 1951, No. 1, S. 5.

<sup>10)</sup> A. A. CH. RONSSE und R. DESPRETS: Etude des sollicitations statiques et dynamiques des ponts-rails. Bulletin de l'Association Internationale du Congrès de Chemins de Fer 1929, S. 2558—2562. In diesem Aufsatz wird behauptet, daß die Gesamtgröße der senkrechten Komponente der periodischen, durch Rotation der Triebräder erweckten Kräfte, von der gegenseitigen Entfernung und der Zahl der Triebachsen abhängig sei und daß sich diese Kräfte, z. B. bei Lokomotiven mit drei Triebachsen, in der Regel aufheben. Gleiche Erwägungen werden von R. DESPRETS in der Nachricht für Internationale Eisenbahnvereinigung von 1933 und in der Abhandlung „Essai sur l'évolution de la technique des ponts“ (Annales des Travaux Publics, Numéro Jubilaire, Bruxelles 1948) wiederholt.

motive wird also von ihrem Gewicht getrennt und stabil in die Mitte der Spannweite gestellt. — Im Buche von C. E. INGLIS<sup>11)</sup> ist die genaue Berechnung wiedergegeben, bei welcher auch die Bewegung der Lokomotivmasse auf der Brücke in Erwägung gezogen wird. Diese Lösung gibt beinahe gleiche Resultate, wie die angenäherte Berechnung. Die erwähnte Einteilung der Brücken entspricht den Verhältnissen in Großbritannien in der Zeit der Durchführung von Messungen. Die Zentrifugalkräfte der Triebräder waren dort bedeutend größer als bei den kontinentalen Eisenbahnen, wo die Bestimmungen der „Technischen Einheit“ gelten, welche das Vergrößern des Raddruckes durch Zentrifugalkraft höchstens auf 15% des statischen Druckes beschränken.

Die Berechnung der Brücken großer Stützweite, mit denen wir uns in erster Linie beschäftigen werden, kann noch weiter vereinfacht werden. Da die Länge der Lokomotive gegenüber der Spannweite klein ist, werden die einzelnen Raddrücke durch ihre Resultierende ersetzt. Die Masse der Brücke je Längeneinheit ändert sich nur wenig, so daß sie als konstant angenommen werden kann. Die Änderung des Trägheitsmomentes ist gewöhnlich ziemlich groß; es ist jedoch möglich, einen Träger mit veränderlichem Querschnitt oder auch einen Fachwerkträger, angenähert durch einen Träger mit konstantem Querschnitt, zu ersetzen, welcher in der Mitte der Spannweite dieselbe Durchbiegung infolge des Eigengewichtes aufweist wie der ursprüngliche. Das Aufschwingen der Brücke, welches durch das Einfahren der beweglichen Kraft auf die Brücke verursacht wird, kann vernachlässigt werden, weil es eine kleine Amplitude hat und ganz abgedämpft wird, bevor die Lokomotive in die Mitte der Spannweite gelangt, wo ihre statische Wirkung am größten ist. Wir können also angenähert die dynamischen Einflüsse der beweglichen Kraft von konstanter Größe vernachlässigen und nur ihre statische Wirkung berechnen.

Die Dämpfung einer schwingenden Brücke ist durch sehr mannigfaltige Faktoren bewirkt, und es ist deshalb schwierig, deren Einfluß durch eine einfache mathematische Formel auszudrücken. Gute Ergebnisse gibt die Annahme, daß die Größe der Dämpfung von der Geschwindigkeit der Trägerelemente und von deren Masse abhängt. Auf das Trägerelement von der Masse  $\mu dx$  wirkt dann eine Dämpfungskraft, welche durch die Formel

$$2\mu\omega_b dx \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \quad (1)$$

ausgedrückt werden kann, wobei  $v(x,t)$  die senkrechte Auslenkung des Querschnittes  $x$  in der Zeit  $t$  bedeutet.  $2\omega_b$  ist ein Dämpfungsbeiwert;  $\omega_b$  hat das

<sup>11)</sup> Siehe INGLIS<sup>2)</sup>. (In der letzten Zeit wurde die Berechnung noch ausführlicher von K. NISE und S. KUNII in „A Theory for the Forced Vibration of Railway Bridge under the Axiom of the Moving Loads“ Quart. Journ. Mech. and Applied Mat. Vol. IX. 1956 durchgeführt.)

Maß der Kreisfrequenz. Da die Dämpfung klein ist, beeinflußt sie wenig die erste Eigenfrequenz der Brücke. Diese Frequenz kann man deshalb nach der Formel

$$n_{(1)} = \frac{\pi}{2l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}} \quad (2)$$

wie die erste Eigenschwingungszahl eines Trägers von konstantem Querschnitt bei ungedämpfter Schwingung berechnen. Die erste Eigenkreisfrequenz ist

$$\omega_{(1)} = 2\pi n_{(1)}. \quad (3)$$

Wenn der Träger im Querschnitt, der vom linken Trägerende um  $x=a$  entfernt ist, mit einer konzentrierten Masse belastet wird, sinkt seine erste Eigenfrequenz auf

$$n_{(1)a} = n_{(1)} \sqrt{\frac{\mu l}{\mu l + 2m \sin^2 \frac{\pi a}{l}}}. \quad (4)$$

Wenn sich die Masse  $m$  auf dem Träger mit einer Geschwindigkeit  $c$  bewegt, ist  $a=ct$  und die Eigenfrequenz der Brücke ändert sich fortwährend. Bei der Berechnung der erzwungenen Schwingung der Brücken großer Spannweite kann jedoch diese Änderung angenähert vernachlässigt werden<sup>12)</sup>. Die Eigenfrequenz wird dann so gerechnet, als ob sich die Masse  $m$  stets in der Mitte der Spannweite befinde, und zwar nach der Formel

$$n'_{(1)} = n_{(1)} \sqrt{\frac{\mu}{\mu'}}, \quad (5)$$

wobei

$$\mu' = \mu + \frac{2m}{l}. \quad (6)$$

Entsprechende Eigenfrequenz ist

$$\omega'_{(1)} = 2\pi n'_{(1)}. \quad (7)$$

Der Dämpfungsbeiwert verkleinert sich dabei auf

$$\omega'_b = \omega_b \frac{\mu}{\mu'}. \quad (8)$$

Bei der Berechnung der Einflüsse einer beweglichen Last mit dem Gewicht  $G=mg$  wird dann nur die Bewegung der Kraft in Betracht gezogen. Die Durchbiegung infolge dieser Belastung wird dann angenähert wie die statische gerechnet. Es ergibt sich im Querschnitte  $x$  und in der Zeit  $t = \frac{a}{c}$

$$v(x, t) = \tilde{v} \sin \omega t \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (9)$$

wobei

$$\omega = \frac{\pi c}{l} \quad (10)$$

<sup>12)</sup> Siehe INGLIS <sup>2)</sup> S. 87.

und

$$\tilde{v} = \frac{2G}{\mu l \omega_{(1)}^2} = \frac{2G}{\mu' l \omega_{(1)'}^2} \quad (11)$$

ist die statische Durchbiegung in der Mitte der Spannweite, wenn die Kraft  $G$  an derselben Stelle wirkt.

Wenn sich gemeinsam mit  $G$  auch eine harmonisch veränderliche Kraft  $P \sin \Omega t$  bewegt, kann diese durch stetige Belastungen nach der Fourierschen Reihe ersetzt werden<sup>13)</sup>, wobei es genügt, nur das erste Glied

$$p(x, t) = \frac{2P}{l} \sin \Omega t \sin \frac{\pi x}{l} \quad (12)$$

zu erwägen mit

$$\Omega = 2\pi N, \quad (13)$$

wobei mit  $N$  die Frequenz der Kraft bezeichnet wird, d. h. im gegebenen Falle die Umdrehungszahl der Triebräder der Lokomotive in einer Sekunde. Die Bewegungsgleichung eines Trägers bei der gedämpften Schwingung gewinnt dann die Form

$$\mu' \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + 2\mu' \omega_b' \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + EJ \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} = \frac{2P}{l} \sin \Omega t \sin \omega t \cdot \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (14)$$

Maximale Auslenkungen entstehen bei der Resonanz der Eigenfrequenz der Brücke mit der Umdrehungszahl der Triebräder, also wenn  $\Omega = \omega_{(1)'}$  oder  $N = n_{(1)'}$ . Die Gl. (14) hat dann nach Auslassen der kleinen Glieder die Lösung:

$$v(x, t) = \frac{P \cos \omega_{(1)'} t}{\mu' l \omega_{(1)'} (\omega^2 + \omega_b'^2)} [\omega (\cos \omega t - e^{-\omega_b' t}) - \omega_b' \sin \omega t] \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (15)$$

Wir benutzten die oben erörterte Theorie bei der Untersuchung der gemessenen Brücken, die verschiedene Spannweiten von 20 m bis 110 m aufwiesen. Bei Prüfungen der schwingenden Brücken, deren Spannweite größer als 40 m war, wurde keine Schwingung der Lokomotiven auf den eigenen Federn beobachtet. Dies wahrscheinlich deswegen, weil die periodischen Kräfte unserer Lokomotiven kleiner sind als die der britischen, welche bei den Messungen des „Bridge Stress Committee“ gebraucht wurden. Wir benutzten dann die oben eingeführten Formeln bei der Berechnung der schwingenden Brücken von größerer Spannweite als 40 m. Die Ergebnisse der Berechnung und der experimentellen Messung sind im folgenden Beispiel wiedergegeben.

Bei den Messungen wurden mechanische Registriertensometer Meyer (Trüb-Teuber) und mechanische, registrierende Durchbiegungsmesser angewandt. Die Resultate wurden ebenfalls durch elektrische Widerstandstensiometer (strain-gages) kontrolliert. Es zeigte sich, daß die mechanischen Apparate zum Aufzeichnen der verhältnismäßig langsamen, durch die periodischen Triebräderkräfte verursachten Schwingungen völlig ausreichen.

<sup>13)</sup> INGLIS <sup>2)</sup> S. 88.

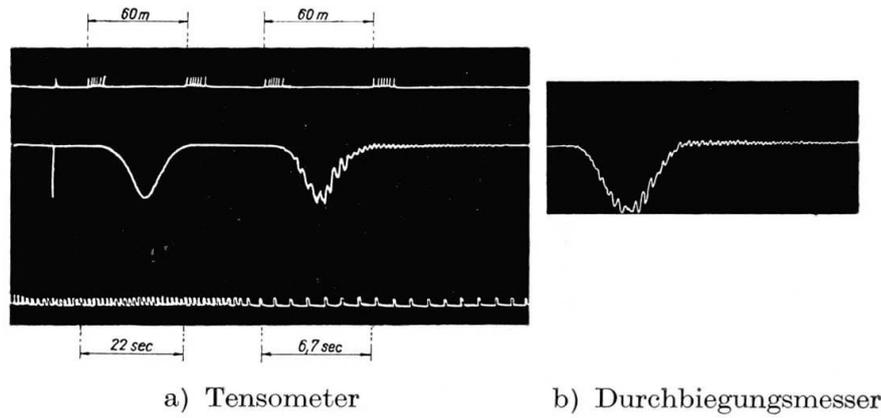


Fig. 1. Überfahrt einer Zweizylinderlokomotive über eine Stahlbrücke von 46,86 m Stützweite. Geschwindigkeit 32 km pro Stunde (in der Tensometeraufnahme auch 10 km pro Stunde).

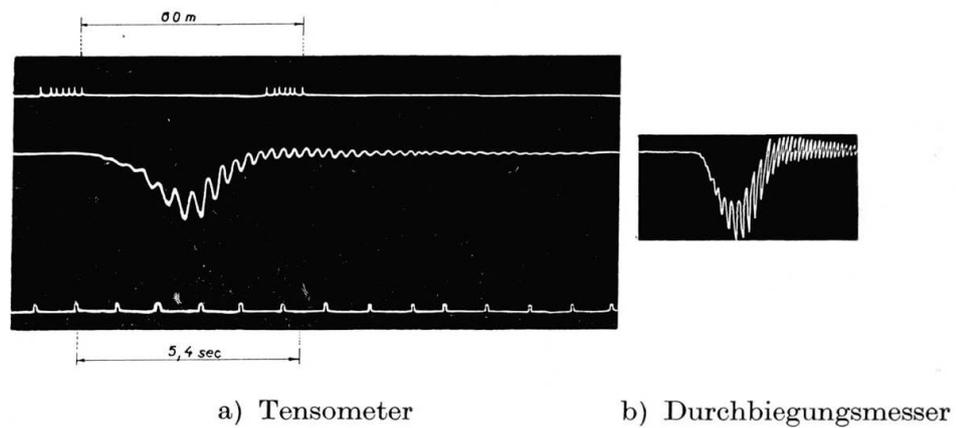


Fig. 2. Überfahrt einer Zweizylinderlokomotive über eine Stahlbrücke von 46,86 m Stützweite. Geschwindigkeit 40 km pro Stunde.

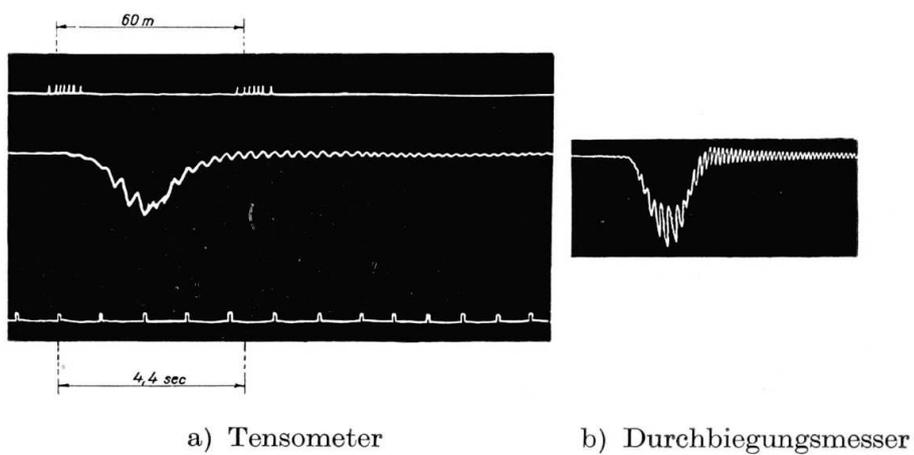


Fig. 3. Überfahrt einer Zweizylinderlokomotive über eine Stahlbrücke von 46,86 m Stützweite. Geschwindigkeit 49 km pro Stunde.

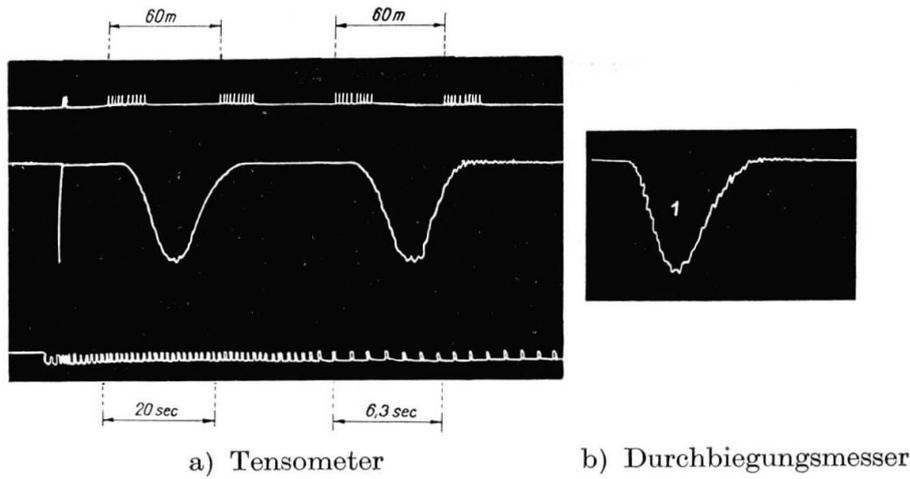


Fig. 4. Überfahrt einer Dreizylinderlokomotive. Geschwindigkeit 34 km pro Stunde.

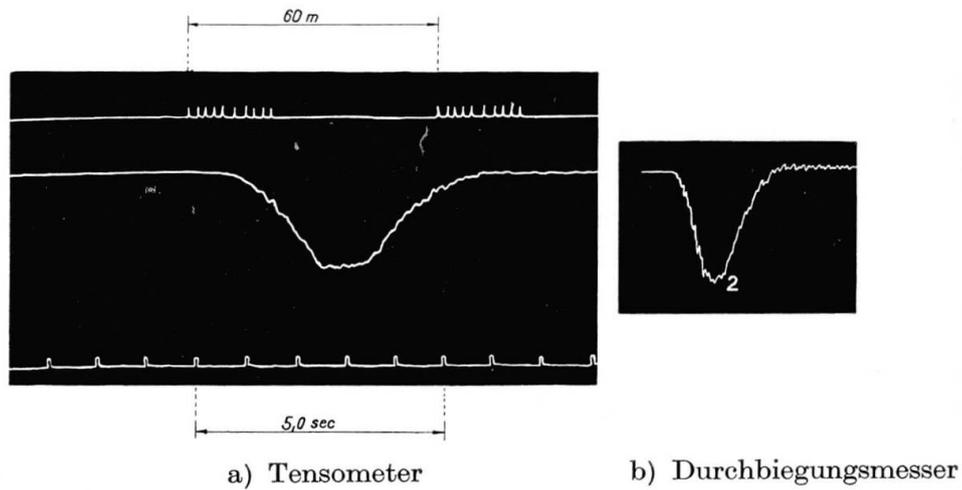


Fig. 5. Überfahrt einer Dreizylinderlokomotive. Geschwindigkeit 43 km pro Stunde.

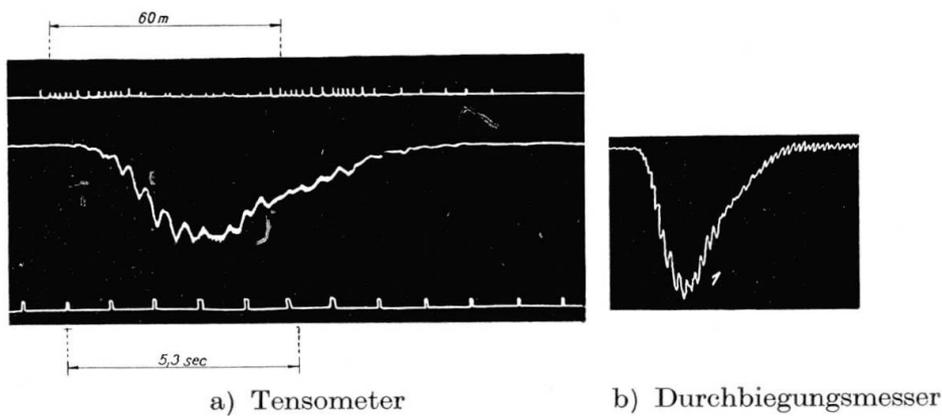


Fig. 6. Überfahrt von zwei Zweizylinderlokomotiven mit drei angehängten Wagen über eine stählerne Brücke von 46,86 m Stützweite.

Die durch die Tensometer aufgezeichneten Diagramme sind in den Fig. 1 a bis 6 a ersichtlich. Sie enthalten die Aufzeichnungen von drei Zeigern. Die untere ist vom Zeitzeiger, die mittlere ist die Spannungslinie und die obere zeigt das Einschalten von zwei elektrischen Kontakten, welche auf der Schiene vor und hinter der Brücke befestigt sind und die durch den Raddruck eingeschaltet werden. Aus den Diagrammen kann man das Zeitintervall abmessen, welches der bekannten Entfernung der beiden Kontakte entspricht, und so die Geschwindigkeit der Lokomotive feststellen. Die Diagramme des Durchbiegungsmessers sind auf den Fig. 1 b bis 6 b reproduziert.

Bei den Prüfungen wurde erstens eine Zweizylindertenderlokomotive mit fünf Triebachsen benützt im Gewicht von  $G = 97$  t. Die Lokomotiven dieser Reihe üben die gesamte Zentrifugalkraft

$$P = 0,24 \div 0,30 N^2 \quad (16)$$

aus. Die Umdrehungszahl wird in  $s^{-1}$  eingesetzt,  $P$  in Tonnen. (Die untere Grenze in der Formel (16) entspricht den Angaben des Erzeugers. Bei Lokomotiven dieser Reihe verschiedenen Alters bestehen jedoch gewisse Abweichungen.) Der Räderumfang  $O$  beträgt 3,96 m.

Außerdem wurden Dreizylinderlokomotiven mit dem Gewicht 97 t mit einem Tender von 60 t benutzt, deren Triebräder nur ganz kleine periodische Kräfte erzeugen. Zu den weiteren Prüfungsfahrten wurden zwei Zweizylinderlokomotiven mit drei angehängten Wagen mit je 40 t gebraucht.

Eine der gemessenen Brücken mit zwei Fachwerkhauptträgern von 46,86 m Stützweite hat die ständige Last  $\mu g = 3,85$  t/m und daher das gesamte Eigengewicht  $G_0 = 46,86 \cdot 3,85 = 181$  t. Trägheitsmoment  $J = 0,510 m^4$ .

Die theoretische Eigenfrequenz der unbelasteten Brücke ist nach (2)

$$n_{(1)} = \frac{\omega_{(1)}}{2\pi} = \frac{\pi}{2 \cdot 46,86^2} \sqrt{\frac{21 \cdot 10^6 \cdot 0,51 \cdot 9,81}{3,85}} = 3,73 s^{-1}.$$

Die wirkliche Eigenfrequenz kann aus der freien Schwingung, mit der die Konstruktion nach der Überfahrt der Lokomotive schwingt, festgestellt werden. Aus den Fig. 2 a, 3 a ist ersichtlich, daß 11 Schwingungen in 3 Sekunden entstehen, so daß

$$n_{(1)} = \frac{11}{3} \cong 3,7 s^{-1}.$$

Aus denselben Figuren kann auch der Dämpfungsbeiwert abgelesen werden. Nach 10 Schwingungen verkleinert sich die Amplitude der freien Schwingung auf die Hälfte. Das logarithmische Dekrement der unbelasteten Brücke ist also

$$\vartheta = -\frac{\ln 0,5}{10} = 0,0693$$

und

$$\omega_b = n_{(1)} \vartheta = 3,7 \cdot 0,0693 = 0,257 s^{-1}.$$

Die Eigenfrequenz der mit einer Zweizylinderlokomotive belasteten Brücke ist nach (5)

$$n'_{(1)} = n_{(1)} \sqrt{\frac{G_0}{G_0 + 2G}} = 3,7 \sqrt{\frac{181}{181 + 2,97}} \cong 2,57 \text{ s}^{-1}.$$

Das entspricht der kritischen Geschwindigkeit der Lokomotive  $c = n'_{(1)} O = 2,57 \cdot 3,96 \text{ m s}^{-1} = 37 \text{ km pro Stunde}$ . Die tatsächliche Geschwindigkeit ist ein wenig größer, wie aus Fig. 2 ersichtlich, und zwar etwa 40 km pro Stunde, was der Frequenz  $n'_{(1)} = 2,81 \text{ s}^{-1}$  und der Eigenkreisfrequenz  $\omega'_{(1)} = 17,6 \text{ s}^{-1}$  entspricht. Nach (4) wurde das Ersatzgewicht je Längeneinheit  $g\mu' = 6,7 \text{ t/m'}$  und nach (8) der reduzierte Dämpfungsbeiwert errechnet. Diese Werte, mit welchen weiter gerechnet wird, entsprechen der Lage der Lokomotive nicht in der Mitte, sondern etwa im Drittel der Spannweite (siehe Fig. 9). Es ist dann

$$c = 2,81 \cdot 3,96 = 11,15 \text{ m s}^{-1}$$

$$\omega = \frac{\pi c}{l} = 0,748 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_b' = 0,148 \text{ s}^{-1}$$

und die harmonisch veränderliche Kraft hat nach der oberen Grenze in der Formel (16) die Amplitude

$$P = 0,3 \cdot 2,81^2 = 2,37 \text{ t}.$$

Nach Einsetzen in (15) ergibt sich für die Auslenkung in der Mitte (17)

$$x = \frac{l}{2} \quad v_P \left( \frac{l}{2}, t \right) = \cos 74,0 \frac{a}{l} \left[ 0,00540 \left( \cos \frac{\pi a}{l} - e^{-0,625 \frac{a}{l}} \right) - 0,00107 \sin \frac{\pi a}{l} \right] \text{ m}.$$

Dazu ist noch die Durchbiegung infolge der Belastung durch  $G$  nach (9) zuzurechnen, welche in der Mitte der Spannweite

$$v_G \left( \frac{l}{2}, t \right) = \tilde{v} \sin \omega t = 0,0196 \sin \frac{\pi x}{l} \text{ m} \quad (18)$$

ist. Die Summe der beiden Werte (17) und (18) ist in Abhängigkeit von der Lage der Last in Fig. 7 dargestellt. Das Diagramm entspricht bis auf den Maßstab der Aufzeichnung des Durchbiegungsmessers Stoppani in Fig. 2 b.

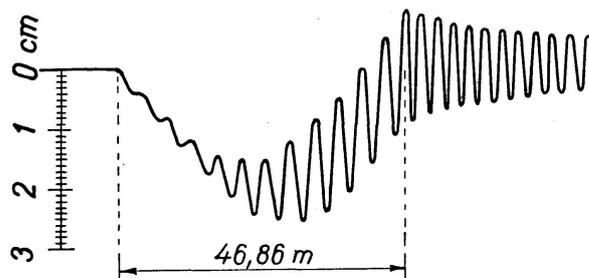


Fig. 7. Theoretische Durchbiegungslinie.

In den Fig. 1 bis 3 sind die Fahrten der Zweizylinderlokomotive bei verschiedenen Geschwindigkeiten aufgezeichnet. Links ist das Diagramm der Spannung im Untergurt, rechts das der Durchbiegung in der Mitte der Spannweite. Es ist ersichtlich, daß die dynamischen Einwirkungen bei kleinen Geschwindigkeiten klein sind, mit der wachsenden Geschwindigkeit fortschreitend ansteigen und ihr Maximum im Resonanzgebiet erreichen (Fig. 2). Bei noch größeren Geschwindigkeiten als der kritischen sinkt die dynamische Einwirkung und gleichzeitig erscheint die Interferenz zwischen der erzwungenen Schwingung (mit der Frequenz  $N$ ) und der Eigenschwingung der Konstruktion (Fig. 3).

Die bei weiteren Fahrten benutzte Dreizylinderlokomotive hatte mit dem Tender das Gesamtgewicht von 153 t; ihre Triebräder sind gut ausgewuchtet, so daß die bei der Fahrt entstehende Zentrifugalkraft gering ist. Die dynamischen Wirkungen einer solchen Lokomotive auf die Brücke sind klein, wie es aus den oszillographischen Aufzeichnungen in den Fig. 4 bis 5 ersichtlich ist.

Die an die Lokomotiven angehängten Wagen verkleinern die dynamischen Einflüsse; das zeigt sich in Fig. 6, wo die Fahrt von zwei gekuppelten Zweizylinderlokomotiven mit 3 Wagen aufgezeichnet ist. Die vorne fahrenden Lokomotiven brachten am Anfang die Brücke in ziemlich starke Schwingung; nach der Einfahrt der Wagen auf die Konstruktion wurde das Schwingen unregelmäßig und die Amplitude der Auslenkungen verkleinerte sich bedeutend. Diese Erscheinung ist dadurch verursacht, daß die Wagen auf ihren verhältnismäßig weichen Federn schwingen und deren starke Dämpfung dann die Schwingung unterdrückt<sup>14)</sup>.

Die Aufnahme des Spannungsverlaufes im Untergurt einer anderen gemes-

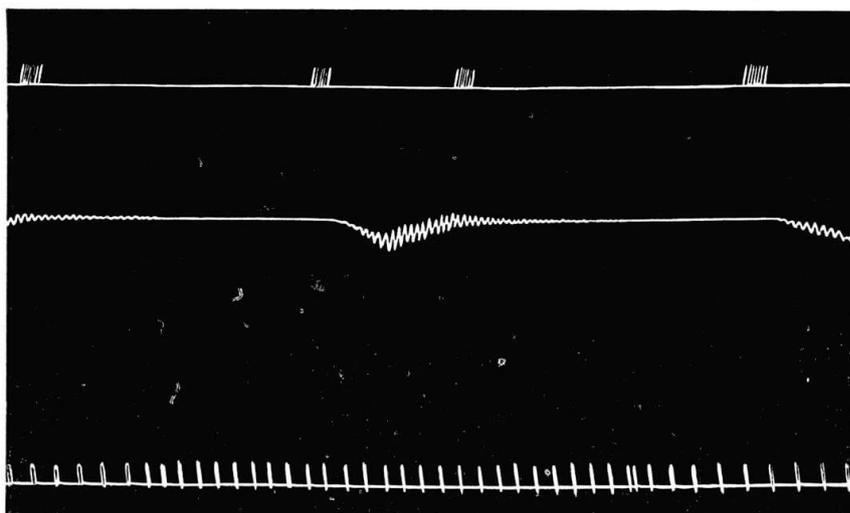


Fig. 8. Tensometeraufnahme bei Überfahrt einer Zweizylinderlokomotive über eine stählerne Brücke von 75 m Stützweite mit Geschwindigkeit 43 km pro Stunde.

<sup>14)</sup> Vergleiche INGLIS <sup>2)</sup> S. XXIII.

senen Brücke von 75 m Spannweite ist in Fig. 8 wiedergegeben. Hier erreicht die dynamische Vergrößerung fast die Hälfte der Spannungen bei der statischen Belastung.

Es ist ersichtlich, daß die Resultate der Messung gut mit der Theorie übereinstimmen. Diese Übereinstimmung wurde bei allen gemessenen Brücken, deren Zahl bedeutend war, festgestellt. Es ist daher auffallend, daß die Timoshenko-Ingles-Theorie verhältnismäßig oft einer ablehnenden Kritik unterworfen wird.

Der Grund dafür liegt erstens darin, daß der Einfluß der Eigenfrequenzänderung der Brücke während der fortschreitenden Belastung der Brücke durch eine Lokomotive überschätzt wird. Diese Frequenz kann sich in weiten Grenzen ändern, wie es aus Fig. 9a ersichtlich ist, wo der Verlauf der Eigenfrequenz der Brücke im numerischen Beispiel in Abhängigkeit von der Lage der Lokomotive aufgetragen ist. Diese Frequenz ändert sich jedoch am meisten, wenn sich die Lokomotive in der Nähe der Stützen befindet, und dann ist, wie aus Fig. 9b ersichtlich, die Größe der harmonisch veränderlichen Ersatzbelastung am kleinsten. Wenn sich die Lokomotive in der Mitte der Spannweite befindet und die Belastung den größten Wert erreicht, ändert sich die Eigenfrequenz wenig. Die Bewegung der Masse der Lokomotive längs der Brücke hat deshalb einen verhältnismäßig kleinen Einfluß auf die dynamische Vergrößerung der maximalen statischen Durchbiegung. Die Änderung der Eigenfrequenz verursacht die Verkleinerung der dynamischen Auslenkungen hauptsächlich, wenn sich die Lokomotive dem Brückenende nähert. Das ist in den Fig. 2b und 7 ersichtlich. Beide Diagramme stimmen in der maximalen Amplitude überein; die gerechnete freie Schwingung nach der Überfahrt der Lokomotive ist jedoch ein wenig größer als die gemessene.

Zweitens wird der Einfluß der stufenweisen Belastung der Brücke durch einzelne Lokomotivachsen überschätzt. So begründet sich z. B. die Behaup-

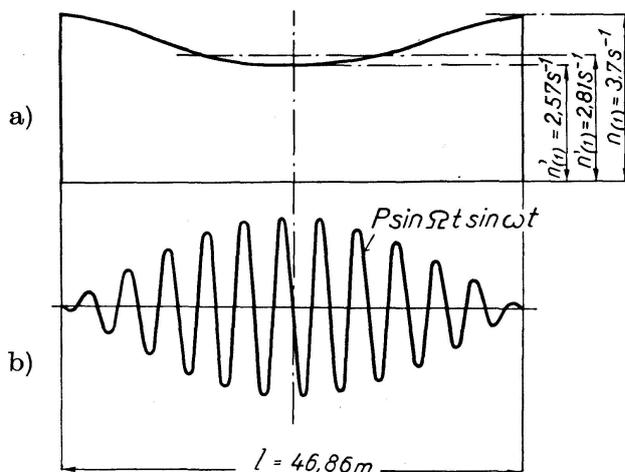


Fig. 9a. Änderung der Eigenfrequenz einer Brücke bei Überfahrt einer Lokomotive.

Fig. 9b. Verlauf der senkrechten periodischen Belastung.

tung der in Fußnote 10 erwähnten Abhandlung auf einem Irrtum. Wenn wir berücksichtigten, daß die Räderpaare der Lokomotive sukzessiv in den Intervallen  $\frac{\lambda}{c}$  auf die Brücke einfahren, wobei  $\lambda$  die Entfernung der Triebachsen und  $c$  die Geschwindigkeit der Lokomotive bedeutet, dann hätte der Ausdruck (12) die Form

$$p(x, t) = \frac{2P}{nl} \sin \Omega t \sin \frac{\pi x}{l} \left[ \sin \omega t + \sin \omega \left( t - \frac{\lambda}{c} \right) + \right. \\ \left. + \sin \omega \left( t - \frac{2\lambda}{c} \right) + \dots + \sin \omega \left( t - \frac{n\lambda}{c} \right) \right] \quad (19)$$

wobei  $n$  die Zahl der Triebachsen bedeutet. Dabei wird einfachheitshalber vorausgesetzt, daß alle Triebräder mit der gleichen periodischen Kraft wirken. Da bei größerer Spannweite der Wert  $\frac{\omega\lambda}{c} = \frac{\pi\lambda}{l}$  gering ist, kann man den ganzen Ausdruck in Klammern durch  $n \sin \omega t$  ersetzen, wobei  $t$  vom Zeitpunkt gemessen wird, wenn der Schwerpunkt der Lokomotive sich am Anfang der Brücke befindet, d. h. man kann sich alle Triebachsen in einem Punkt konzentriert denken, wie es in der Berechnung vorausgesetzt wurde. Im Aufsatz der Fußnote 10 wird jedoch irrtümlicherweise mit der Belastung

$$p(x, t) = \frac{2P}{nl} \sin \frac{\pi x}{l} \sin \omega t \left[ \sin \Omega t + \sin \Omega \left( t - \frac{\lambda}{c} \right) + \sin \Omega \left( t - \frac{2\lambda}{c} \right) + \dots \right]$$

gerechnet. Die Verfasser des Aufsatzes setzen die Phasenverschiebung bei den periodischen Kräften der einzelnen Triebachsen voraus. Der Wert  $\frac{\Omega\lambda}{c} = \frac{2\pi\lambda}{l}$  ist nicht mehr gering und die Verfasser gelangen zur unrichtigen Behauptung, daß die periodischen Kräfte der Triebachsen sich gegenseitig stören und sich z. B. bei Lokomotiven mit drei Triebachsen praktisch vollkommen aufheben.

Tatsächlich bewegen sich jedoch die Gegengewichte aller Räder auf jeder Seite der Lokomotive angenähert in derselben Phase und ihre Einflüsse addieren sich einfach und die Einflüsse von beiden Seiten dann vektoriell. Die Entfernung der Achsen hat bei längeren Brücken nur sehr geringen Einfluß.

Schließlich werden wahrscheinlich oft bei den Messungen Lokomotiven gebraucht, welche keine großen periodischen Kräfte erzeugen. Auch bei Zweizylinderlokomotiven können die rotierenden Massen gut ausgewuchtet werden,



Fig. 10. Freie Schwingung einer Brücke mit zwei nebeneinanderliegenden einfachen Feldern.

so daß die vertikalen periodischen Kräfte gering sind. Das hat dann zur Folge, daß auch kein Aufschwingen der Brücken beobachtet werden kann.

Zum Schluß soll eine zwar nicht wichtige, aber interessante Erscheinung erwähnt werden, welche immer bei Brücken von zwei oder mehr Feldern mit einfachen Hauptträgern beobachtet wurde. Nach Überfahrt der Brücke klingt die Schwingung auf die in Fig. 10 ersichtliche Art ab. Benachbarte Felder der Brücke arbeiten wie gekoppelte Oszillatoren. Ein Feld übergibt seine Energie dem Nachbarfeld mittels der Schienen.

## Die Eisenbahnbrücken aus Stahlbeton

### A. Allgemeines

Die im ersten Abschnitt enthaltene Theorie kann auf kompliziertere Systeme erweitert werden<sup>15) 16)</sup>. Anstatt der harmonischen Analyse kann man die Entwicklung nach den Eigenschwingungsformen anwenden.

Bei einem System mit krummen Stäben entsteht das Schwingen nicht nur in senkrechter, sondern in ganz allgemeiner Richtung. Wenn der Querschnitt veränderlich ist, ändert sich auch das Trägheitsmoment und die Masse des Stabes. Gl. (14) kann deshalb nicht angewendet werden.

Nehmen wir ein Längenelement des Stabes mit der Länge  $ds$  im Querschnitt  $s$  und in der Zeit  $t$  in Betracht, das die Masse  $\mu(s) ds$  besitzt. (Die Masse  $\mu(s)$  ist von der Lage des Querschnittes  $s$  abhängig.) Das Element sei aus seiner

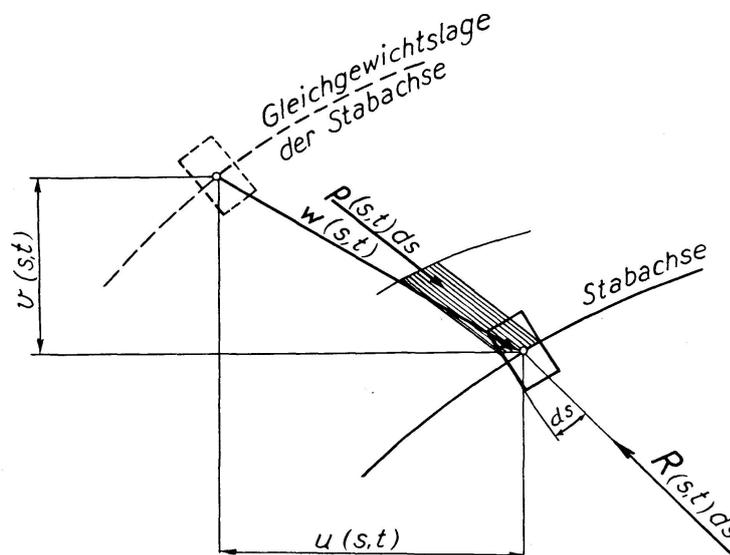


Fig. 11. Das Element eines krummen Stabes.

<sup>15)</sup> S. T. A. ÖDMAN: Differential equation for calculation of vibrations produced in load-bearing structures by moving loads. Preliminary Publication. Third Congress IABSE. Liège 1948.

<sup>16)</sup> V. KOLOUŠEK: Baudynamik der Durchlaufträger und Rahmen. Leipzig 1953. S. 110—128.

Gleichgewichtslage um  $\mathbf{w}(s, t)$  ausgelenkt. (Die Vektoren werden mit fetten Buchstaben bezeichnet.) Dabei wirkt auf das Element eine elastische Rückstellkraft  $\mathbf{R}(s, t) ds$ , welche ihm eine Beschleunigung  $\frac{\partial^2 \mathbf{w}(s, t)}{\partial t^2}$  erteilt. Es gilt dann nach dem d'Alembertschen Prinzip für freie ungedämpfte Schwingung die vektorielle Bewegungsgleichung

$$-\mu(s) ds \frac{\partial^2 \mathbf{w}(s, t)}{\partial t^2} + \mathbf{R}(s, t) ds = 0. \quad (20)$$

Wenn man die Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes und kleine Auslenkungen voraussetzt, kann ein System mit krummen Stäben in unendlich vielen Eigenformen harmonisch schwingen. Die Amplitude der Auslenkung im Querschnitt  $s$  bei beliebiger ( $j$ -ter) Eigenschwingungsform sei mit  $\mathbf{w}_{(j)}(s)$  bezeichnet. Auf das Längenelement wirkt dabei die elastische Rückstellkraft  $\mathbf{R}_{(j)}(s)$  und das System schwingt in dieser Form harmonisch mit der Eigenkreisfrequenz  $\omega_{(j)}$ . Es gilt dabei

$$\mathbf{w}(s, t) = \mathbf{w}_{(j)}(s) \sin \omega_{(j)} t \quad (21)$$

$$\mathbf{R}(s, t) = \mathbf{R}_{(j)}(s) \sin \omega_{(j)} t \quad (22)$$

Nach Einsetzen in (20) ergibt sich

$$-\mu(s) \omega_{(j)}^2 \mathbf{w}_{(j)}(s) = \mathbf{R}_{(j)}(s). \quad (23)$$

Wenn das System durch eine äußere, in der Zeit veränderliche Belastung beansprucht wird, entsteht die erzwungene Schwingung. Die Bewegungsgleichung eines schwingenden Elementes mit der Länge  $ds$  im Querschnitt  $s$  und in der Zeit  $t$ , auf welches die Belastung  $\mathbf{p}(s, t) ds$  wirkt, kann in der vektoriellen Form wie folgt geschrieben werden:

$$\mu(s) ds \frac{\partial^2 \mathbf{w}(s, t)}{\partial t^2} + 2 \omega_b \mu(s) \frac{\partial \mathbf{w}(s, t)}{\partial t} ds - \mathbf{R}(s, t) ds = \mathbf{p}(s, t) ds. \quad (24)$$

Die Belastung  $\mathbf{p}(s, t)$  kann nach den Eigenschwingungsformen in eine unendliche Reihe entwickelt werden

$$\mathbf{p}(s, t) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{(j)}(t) \mu(s) \mathbf{w}_{(j)}(s) \quad (25)$$

wobei  $p_{(j)}(t)$  eine in der Zeit veränderliche generalisierte Belastungskordinate bedeutet und die rechte Seite des Ausdruckes (25) eine vektorielle Summe ist. Die Werte  $p_{(j)}(t)$  errechnen sich nach der Formel:

$$p_{(j)}(t) = \frac{\int \mathbf{p}(s, t) \cdot \mathbf{w}_{(j)}(s) ds}{\int \mu(s) w_{(j)}^2(s) ds}, \quad (26)$$

wobei  $w_{(j)}(s)$  das Modul von  $\mathbf{w}_{(j)}(s)$  bezeichnet. Das Vektorprodukt im Integral des Zählers ist skalar. Der Ausdruck (26) ergibt sich aus Gl. (25), wenn beide Seiten mit  $\mathbf{w}_{(j)}(s)$  skalarweise multipliziert und für alle Stäbe des Systems

integriert werden. Mit Rücksicht auf die Orthogonalität der Eigenschwingungsformen gilt

$$\int \mu(s) \mathbf{w}_{(j)}(s) \cdot \mathbf{w}_{(i)}(s) ds = 0$$

für alle  $i \neq j$ .

Ebenfalls können die Auslenkungen und die elastischen Kräfte durch Reihen entwickelt werden

$$\mathbf{w}(s, t) = \sum_{j=1}^{\infty} q_{(j)}(t) \mathbf{w}_{(j)}(s), \quad (27)$$

$$\mathbf{R}(s, t) = \sum_{j=1}^{\infty} q_{(j)}(t) \mathbf{R}_{(j)}(s) = - \sum_{j=1}^{\infty} q_{(j)}(t) \mu(s) \omega_{(j)}^2 \mathbf{w}_{(j)}(s), \quad (28)$$

wobei  $q_{(j)}(t)$  generalisierte Koordinaten der Auslenkung bezeichnen. Nach Einsetzen der Formeln (25), (27) und (28) in die Gl. (24) ergibt sich

$$\frac{d^2 q_{(j)}(t)}{dt^2} + 2\omega_b \frac{dq_{(j)}(t)}{dt} + \omega_{(j)}^2 q_{(j)}(t) = p_{(j)}(t). \quad (29)$$

Aus dieser Gleichung kann man die generalisierten Koordinaten  $q_{(j)}(t)$  errechnen und nach Einsetzen dieser Werte in (27) die Auslenkungen  $\mathbf{w}(s, t)$  ermitteln.

Bei der Lösung der statisch unbestimmten Systeme der Eisenbahnbrücken ist weiter notwendig, den Einfluß einer Masse  $m$  (z. B. der Masse einer Lokomotive), welche sich im Querschnitt  $s=a$  befindet, auf die Eigenschwingungszahl festzustellen. Ähnlich wie bei dem einfachen Balken kann eine solche Masse angenähert durch stetig verteilte Masse ersetzt werden, um die sich die eigene stetig verteilte Masse  $\mu(s)$  vergrößert. Die konzentrierte Masse  $m$  wirkt bei der Schwingung mit der inertialen Kraft. Setzen wir voraus, daß das System in der ersten Eigenschwingungsform schwingt und nehmen wir angenähert an, daß sich diese Form nicht ändert, wenn die Masse  $m$  hinzugefügt wird. Die inertielle Kraft der Masse  $m$  ist dann nach (27)

$$-m \frac{\partial^2 \mathbf{w}(a, t)}{\partial t^2} = -m \frac{\partial^2 q_{(1)}(t)}{\partial t^2} \mathbf{w}_{(1)}(a). \quad (30)$$

Diese inertielle Kraft wirkt auf den Stab wie eine konzentrierte Last im Querschnitt  $s=a$  und kann durch eine Reihe ähnlich wie die stetige Belastung  $\mathbf{p}(s, t)$  nach den Formeln (25) und (26) entwickelt werden. Mit Rücksicht auf die Voraussetzung, daß sich die erste Eigenform, in der das System schwingt, nicht ändert, genügt es in der Formel (25) nur das erste Glied der Reihe zu erwägen, welches nach Einsetzen von (26) und (30) den Wert

$$-m \frac{\partial^2 q_{(1)}(t)}{\partial t^2} \frac{\mu(s) w_{(1)}^2(a)}{\int \mu(s) w_{(1)}^2(s) ds} \mathbf{w}_{(1)}(s) \quad (31)$$

erreicht. Die Formel (31) stellt jedoch die inertielle Kraft einer stetig verteilten Masse  $\mu(s) m \frac{w_{(1)}^2(a)}{\int \mu(s) w_{(1)}^2(s) ds}$  dar. Das System schwingt dann so, als ob über ihm eine Gesamtmasse

$$\mu'(s) = \mu(s) \left[ 1 + m \frac{w_{(1)}^2(a)}{\int \mu(s) w_{(1)}^2(s) ds} \right] \quad (32)$$

stetig verteilt wäre. Für den einfachen Träger, der mit der Masse  $m$  in der Mitte der Spannweite belastet wird, geht (32) in die Formel (6)  $\mu' = \mu + \frac{2m}{l}$  über.

### B. Die Lösung eines eingespannten, durch Rahmen versteiften Bogens

Die im vorhergehenden Abschnitt eingeführte Methode wurde bei Berechnung einer Stahlbetonbrücke nach Fig. 12a mit 15 gleichen Feldern von 51,5 m Lichtweite angewendet. Die Brücke trägt zwei Gleise, von denen jedes auf einer selbständigen Konstruktion liegt; die Pfeiler sind für beide Konstruktionen gemeinsam. Die Tragkonstruktion wird von einem eingespannten, durch Rahmen versteiften Bogen gebildet. Zuerst wurde dieses System so gerechnet, als ob beide Widerlager des Bogens vollkommen eingespannt und unverschieblich seien.

Die erste Aufgabe, d. h. die Ermittlung der Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen des Systems, wurde durch die Methode der schrittweisen Näherung gelöst. Zu diesem Zwecke wurde das System in 30 Elemente geteilt. Es sind in jeder Hälfte 15 Elemente mit den Massen  $m_1, m_2$  bis  $m_{15}$  (Fig. 12a). Für die Schwerpunkte aller dieser Teile wurden Einflußlinien der Durchbie-

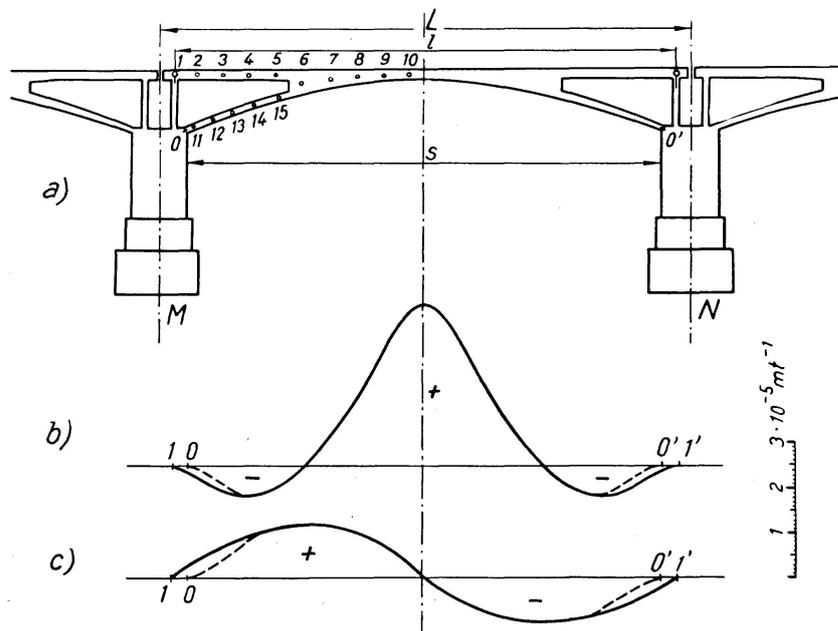


Fig. 12a. Ein durch Rahmen versteifter Bogen.

Fig. 12b. Einflußlinie der senkrechten Durchbiegung des Gewölbescheitels für senkrechte Belastung.

Fig. 12c. Einflußlinie der waagrechten Durchbiegung des Punktes 1 für senkrechte Belastung.

Bemerkung: Die volle Linie bezeichnet den Balken, die strichlierte den Bogen.

gung ermittelt. Es sind in jedem Punkte 4 Einflußlinien, und zwar für die senkrechte, bzw. waagrechte Durchbiegung infolge der senkrechten, bzw. waagrechten Belastung. Die Einflußlinien wurden mit der Methode Beggs-Blažek durch Messung auf einem Zelluloidmodell gewonnen und rechnerisch mit der Deformationsmethode kontrolliert. Der Unterschied der gerechneten Koordinaten gegenüber den gemessenen ist kleiner als 2%. Das Elastizitätsmodul wurde mit  $E = 4\,200\,000 \text{ t/m}^2$  in die Berechnung eingeführt. In Fig. 12b ist die Einflußlinie der senkrechten Durchbiegung in der Gewölbemitte für senkrechte Belastung aufgetragen und in Fig. 12c die Einflußlinie der waagrechten Durchbiegung im Punkte 1 ebenfalls für die senkrechte Belastung.

Als Ausgangslinie für die Ermittlung der ersten symmetrischen Eigenschwingungsform wurde die Durchbiegungslinie infolge des Eigengewichtes gewählt. (Diese Wahl zeigte sich nicht sehr zweckmäßig, da die Näherungen langsam konvergierten.) Die senkrechten Koordinaten  ${}^1v_k$  dieser Linie sind in Fig. 13a und die waagrechten  ${}^1u_k$  in Fig. 13b aufgetragen. Diese Koordinaten wurden mit den Massen der zugehörigen Elemente  $m_k$  multipliziert und mit den so gewonnenen Lasten  $m_k {}^1v_k$ ,  $m_k {}^1u_k$  werden die Einflußlinien belastet und dadurch eine neue Durchbiegungskurve (2. Näherung) mit Koordinaten  ${}^2v_k$ ,  ${}^2u_k$  gewonnen. Der Fortgang wurde solange wiederholt, bis sich die letzte Näherung  ${}^nv_k$ ,  ${}^nu_k$  von der vorletzten  ${}^{n-1}v_k$ ,  ${}^{n-1}u_k$  in ihrer Form nicht mehr unterschied. Die erste Eigenkreisfrequenz ist dann durch die Formel

$$\omega_{(1)}^2 = \frac{{}^{n-1}v_k}{{}^nv_k} = \frac{{}^{n-1}u_k}{{}^nu_k} \quad (33)$$

gegeben. Die Linie  ${}^nv = v_{(1)}(s)$ ,  ${}^nu = u_{(1)}(s)$  stellt die erste Eigenschwingungsform dar. Die Gesamtverschiebung  $\boldsymbol{w}_{(1)}(s)$  ist die vektorielle Summe der vertikalen und horizontalen Auslenkung ( $v_{(1)}(s)$  und  $u_{(1)}(s)$ ).

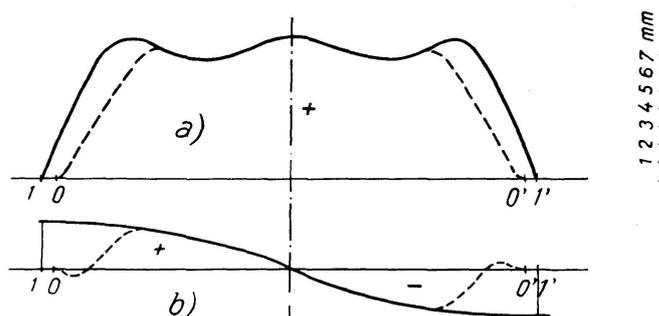


Fig. 13. Durchbiegung infolge Eigengewicht.

a. Senkrechte Koordinaten. b. Waagrechte Koordinaten.

Bemerkung: Die tatsächlichen senkrechten Durchbiegungen sind positiv in Richtung von oben nach unten. In den Abbildungen sind jedoch in Zusammenstimmung mit den Aufzeichnungen des Durchbiegungsmessers die positiven Durchbiegungen in umgekehrter Richtung von unten nach oben aufgetragen. Die tatsächliche waagrechte Durchbiegung wird positiv im Sinne von links nach rechts angenommen.

Die senkrechten Koordinaten der letzten drei Näherungen sind in Fig. 14a ersichtlich, die waagrechten Koordinaten der letzten Näherung  ${}^n u_k$  sind in die senkrechte Richtung umgedreht und in Fig. 14b aufgetragen. Es ist ersichtlich, daß die waagrechten Koordinaten im gegebenen Falle von kleiner Bedeutung sind. Aus dem Verhältnis der Koordinaten der letzten zwei Näherungen in einem Punkte (z. B. im Punkte  $k=10$  in Fig. 14a) ergibt sich

$$\omega_{(1)}^2 = \frac{{}^{n-1}v_{10}}{{}^n v_{10}} = \frac{2386}{2,19} = 1090 \text{ s}^{-2},$$

d. h.  $\omega_{(1)} = 33,0 \text{ s}^{-1}.$

Auf ähnliche Weise wird die erste Eigenform der antimetrischen Schwingung gewonnen, man geht dabei jedoch von einer antimetrischen Durchbiegungskurve aus. Die senkrechten Koordinaten der letzten Näherung, die gleichfalls die erste antimetrische Eigenschwingungsform vorstellt, sind in Fig. 15a aufgetragen, dagegen die umgedrehten waagrechten in Fig. 15b. Für die erste Eigenkreisfrequenz der antimetrischen Schwingung ergibt sich  $\omega_{(1)}^* = 16,6 \text{ s}^{-1}.$

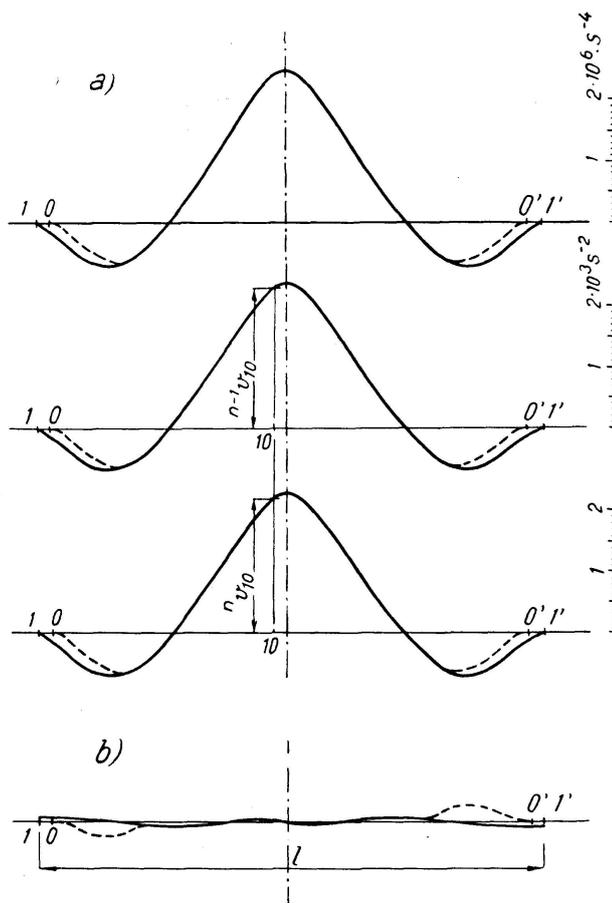


Fig. 14. Erste symmetrische Eigenschwingungsform eines durch Rahmen versteiften Bogens.

- a) Senkrechte Koordinaten bei den letzten drei Näherungen.  
 b) Waagrechte Koordinaten (in die senkrechte Richtung umgedreht).

Aus der Einflußlinie der Durchbiegung in Fig. 12b kann man die statische Durchbiegung in der Mitte der Spannweite infolge Belastung durch eine Lokomotive in ungünstigster Lage ermitteln. Für die bei den Messungen gebrauchte Zweizylinderlokomotive von 97 t Gewicht ergibt sich die Durchbiegung  $\tilde{v} = 3,0$  mm.

Die Brücke wurde dann gemessen und es zeigte sich, daß die Ergebnisse der theoretischen Untersuchung mit den gemessenen nicht übereinstimmen. Die errechnete Grundfrequenz der symmetrischen eigenen Schwingung war offensichtlich höher als die auf experimentelle Weise festgestellte Grundfrequenz, während die gemessene Durchbiegung in der Mitte der Spannweite unter der Lokomotive ( $\tilde{v} = 2,0$  mm) bedeutend kleiner war als die gerechnete Durchbiegung. Dies, obwohl sich eine verhältnismäßig große Nachgiebigkeit der Widerlager zeigte, welche im Gegenteil die Vergrößerung der Durchbiegung verursachen sollte. Es zeigte sich, daß die Stahlbetonkonstruktion selbst zweimal so steif ist als in der statischen Berechnung vorausgesetzt wurde, und zwar in erster Linie deswegen, weil die ziemlich mächtigen Parapetmauern vollkommen monolithisch mit der Tragkonstruktion zusammenwirken. Die Erhöhung der Steifigkeit der Tragkonstruktion hat dann zur Folge, daß alle Felder der Brücke vielmehr als ein durchlaufendes System wirken. Die Steifigkeit des Untergrundes unter den Pfeilerfundamenten hat sich zwar absolut nicht verkleinert, aber im Verhältnis zur erhöhten Steifigkeit der Konstruktion sank sie auf die Hälfte. Es ist also nicht möglich die Nachgiebigkeit der Pfeiler zu vernachlässigen, und die ganze Konstruktion muß als durchlaufend berechnet werden.

### C. Berechnung eines durchlaufenden, durch Rahmen versteiften Bogens

Bei der statischen, mittels der Deformationsmethode durchgeführten Berechnung wurde vorausgesetzt, daß drei Felder mitwirken, und zwar das

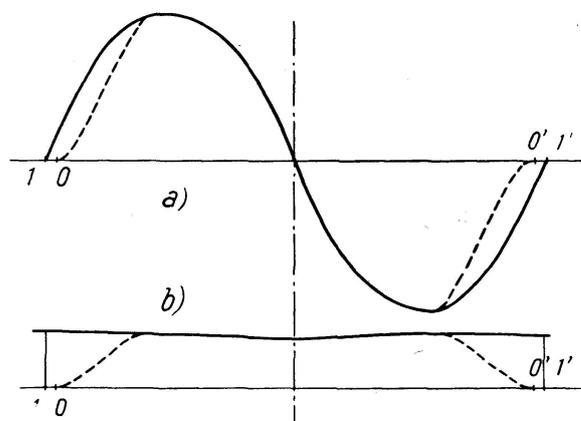


Fig. 15. Erste antimetrische Eigenform.

- a) Senkrechte Koordinaten.
- b) Waagrechte Koordinaten.

belastete und die beiden benachbarten. Die Belastung der weiter entfernten Felder hat unbedeutende statische Einflüsse. In Fig. 17b ist die Einflußlinie der Durchbiegung in der Mitte des mittleren Gewölbes aufgezeichnet. Diese Einflußlinie wurde durch die Achsdrücke einer Lokomotive von 97 t Gewicht in verschiedenen Lagen belastet. Die so ermittelten Durchbiegungen sind in Abhängigkeit von der Lage des Schwerpunktes der Lokomotive in Fig. 17c aufgetragen. Diese Kurve entspricht den Aufzeichnungen der registrierenden Tensometer in der Mitte des mittleren Gewölbes bei langsamen Fahrten der Lokomotiven (Fig. 22 a, b).

Es ist selbstverständlich, daß die Nachgiebigkeit des Untergrundes bei der dynamischen Untersuchung noch viel klarer zum Ausdruck kommen muß als bei der statischen. Bei der statischen Nutzlast eines Feldes in einem Gleis entsteht eine waagrechte Kraft nur im Kämpfer eines Gewölbes. Bei der Schwingung der Konstruktion nach Fig. 16 wirken jedoch auf den Pfeiler mit zusätzlichen waagrechten Kräften gleicher Richtung alle vier Gewölbe (in beiden Feldern und beiden Gleisen), die sich an den Pfeiler stützen. Das Neigen des Pfeilers bei der Schwingung der Brücke ist deshalb verhältnismäßig groß.

Die erste Aufgabe bei der dynamischen Lösung ist wieder das Feststellen

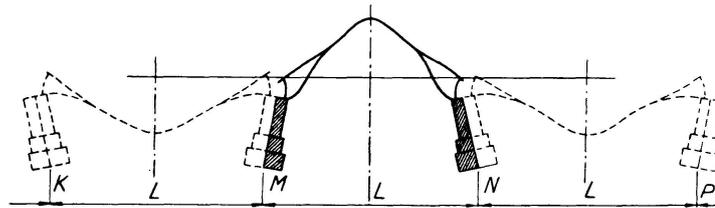


Fig. 16. Schema der ersten Eigenschwingungsform eines durchlaufenden, durch Rahmen versteiften Bogens.

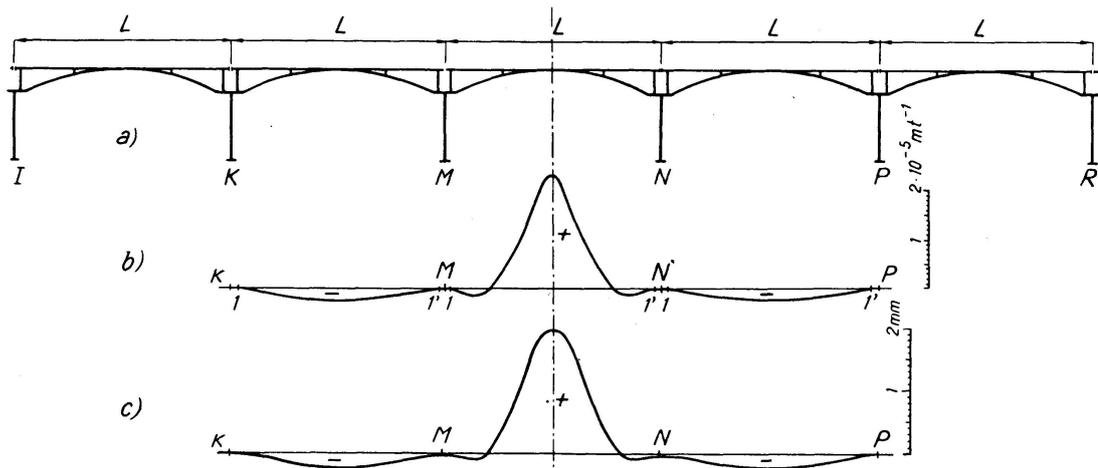


Fig. 17a. Schema eines durchlaufenden Systems.

Fig. 17b. Einflußlinie der Durchbiegung in der Mitte des mittleren Feldes.

Fig. 17c. Durchbiegung in der Mitte des mittleren Feldes unter einer fahrenden Lokomotive von 97 t Gewicht.

der eigenen Frequenzen und Schwingungsformen. Die Deformationsgleichungen eines kontinuierlichen Systemes mit  $n$  gleichen Feldern sind zyklisch symmetrisch<sup>17</sup>. Es folgt daraus, daß anstatt der ersten Eigenfrequenz der symmetrischen Schwingung hier eine ganze Gruppe von  $n$  Grundfrequenzen erscheint, welche zueinander sehr nahe liegen. Ebenso entspricht der ersten antimetrischen Eigenform eines vollkommen eingespannten Gewölbes eine Gruppe von  $n$  Eigenformen des durchlaufenden Systems. Wir beschränken uns jedoch weiter nur auf die Eigenformen der „symmetrischen“ Gruppe, weil wir uns hauptsächlich mit den Schwingungen des Gewölbescheitels befassen. (So z. B. schwingt ein gerader, durchlaufender, in beiden Randstützen vollkommen eingespannter Träger von 4 Feldern mit 4 ersten Eigenfrequenzen

$$n_{(1)} = \frac{1,83}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}, \quad n_{(2)} = \frac{2,45}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}, \quad n_{(3)} = \frac{3,16}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}, \quad n_{(4)} = \frac{3,56}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}};$$

die niedrigste von diesen Frequenzen ist sehr nahe bei der ersten Eigenschwingungszahl eines einfachen Trägers, während die höchste der ersten Eigenfrequenz eines auf beiden Enden vollkommen eingespannten Trägers gleich ist.)

Ein kontinuierliches Gewölbe von 15 Feldern wird deshalb 15 Grundfrequenzen aufweisen, von denen die niedrigste sich der niedrigsten Eigenfrequenz eines kontinuierlichen Bogens von unendlich vielen Feldern nähert, während die höchste der ersten Eigenfrequenz eines Gewölbes mit vollkommen starren Stützen gleichkommt.

Wenn wir die niedrigste Frequenz einer Konstruktion mit unendlich vielen Feldern ermitteln wollen, genügt es, nur ein Feld in Betracht zu ziehen. Dies

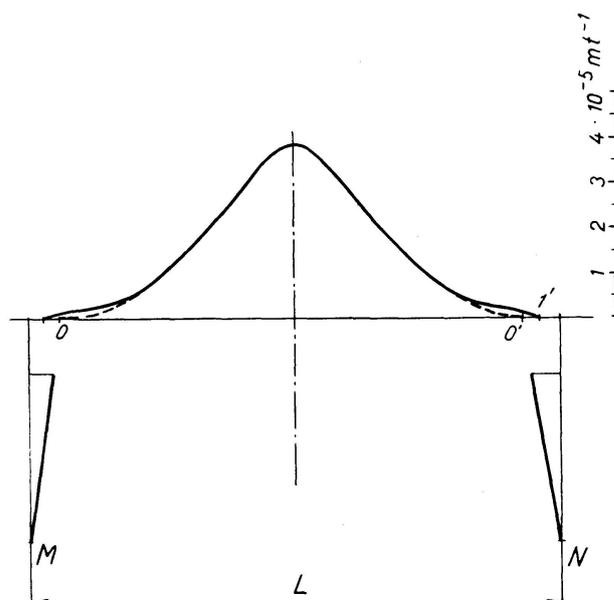


Fig. 18. Einflußlinie der Durchbiegung für ein System nach Abb. 16.

<sup>17)</sup> V. KOLOUŠEK: Baudynamik der Durchlaufträger und Rahmen, Leipzig 1953.

folgt aus Fig. 16, wo die erste Eigenschwingungsform schematisch dargestellt wird. Zur schwingenden Tragkonstruktion werden die anliegenden Pfeilerhälften gerechnet. Dieser Teil des Systems ist in Fig. 16 voll ausgezogen ( $L = 57,5$  m).

Es wurden wieder Einflußlinien der Durchbiegung festgestellt, und zwar für den Scheitel des Gewölbes, für 15 Schwerpunkte der Längenelemente und für das Neigen des Pfeilers. Die Einflußlinie der Durchbiegung im Gewölbescheitel für die senkrechte Belastung des Feldes und waagrechte Belastung der Pfeiler ist in Fig. 18 aufgetragen. (Die Einflußkoordinaten sind positiv im Sinne gegen die Wirkung der Kräfte.)

Die erste Eigenschwingungsform und die erste Eigenfrequenz werden wieder durch schrittweise Näherungen ähnlich wie beim eingespannten Bogen im vorhergehenden Abschnitt bestimmt. Die senkrechten Koordinaten im Felde und die waagrechten für Pfeiler der ersten Eigenform sind in Fig. 19a aufgetragen. Aus dem Verhältnis der beiden letzten Näherungen ergibt sich jetzt die Eigenkreisfrequenz  $\omega_{(1)} = 23,1 \text{ s}^{-1}$ , d. h.  $n_{(1)} = 3,68 \text{ s}^{-1}$ .

Die letzte (d. h. die fünfzehnte) Eigenform der ersten Gruppe ist in Fig. 19b dargestellt. Sie ist angenähert dieselbe wie die erste Eigenform des eingespannten Gewölbes nach der Fig. 14. Da die Steifigkeit der Konstruktion in Wirklichkeit ungefähr zweimal so groß ist als ursprünglich vorausgesetzt wurde, entspricht dieser Eigenform eine viel größere Eigenkreisfrequenz als bei der Berechnung des starr eingespannten Bogens, und zwar  $\omega_{(15)} = 46,6 \text{ s}^{-1}$ , d. h.  $n_{(15)} = 7,4 \text{ s}^{-1}$ . Zwischen den Frequenzen  $n_{(1)}$  und  $n_{(15)}$  gibt es weitere 13 Eigenschwingungszahlen, mit denen das System harmonisch schwingen kann.

Wir wollen noch angenähert nach (32) die vergrößerte Ersatzmasse errechnen, wenn sich in der Mitte eines Gewölbes die Masse einer Lokomotive im

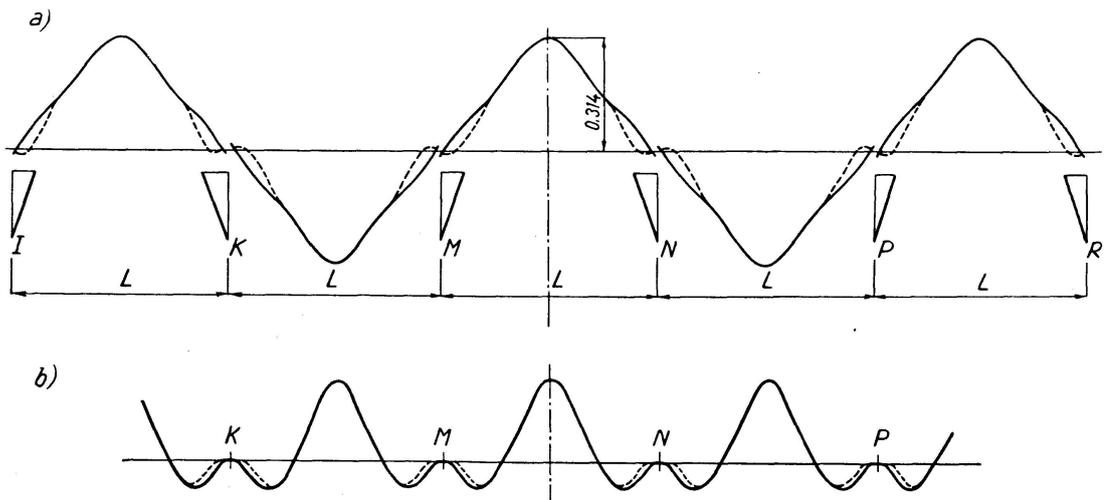


Fig. 19a. Die senkrechten Koordinaten der Durchbiegung im Felde und die waagrechten Koordinaten des Neigens der Pfeiler bei der ersten Eigenschwingungsform.

Fig. 19b. Die senkrechten Koordinaten der Durchbiegung bei der höchsten Eigenschwingungsform der ersten Gruppe.

Gewicht von 97 t befindet. Die Auslenkung bei der ersten Eigenform nach Fig. 19a ist in der Mitte des Feldes  $w_{(1)}(a) = v_{(1)}\left(\frac{l}{2}\right) = 0,314$ . Durch numerische Integration wird für ein Feld und beide Gleise

$$\int \mu(s) w_{(1)}^2(s) ds = 2 \sum_{k=1}^{30} m_k [v_{(1)}^2(s_k) + u_{(1)}^2(s_k)] = 12,3 t m^{-1} s^2 \quad (34)$$

gewonnen. Wenn jedoch gleichzeitig alle 15 Felder schwingen, ist diese Summe 15mal so groß und es ergibt sich nach (32)

$$\frac{\mu'(s)}{\mu(s)} = \left(1 + \frac{97 \cdot 0,314^2}{9,81 \cdot 15 \cdot 12,3}\right) = 1,005 \cong 1.$$

Man kann also die Masse der Lokomotive vernachlässigen. Dieses Resultat gilt natürlich nur unter der oben angenommenen Voraussetzung, daß sich die erste Eigenform bei Belastung durch eine Lokomotive nicht ändert.

Die Berechnung der Eigenfrequenzen und Eigenformen durch die Methode der schrittweisen Näherung ist zeitraubend. Noch viel mühsamer wäre jedoch die Berechnung der erzwungenen Schwingung unter einer fahrenden Lokomotive, die periodische Kräfte erzeugt. Man kann dabei die Gleichungen (24) bis (29) benutzen.

Es bewege sich auf dem Träger eine senkrechte, harmonisch veränderliche Kraft  $P \sin \Omega t$  mit einer konstanten Geschwindigkeit  $c$ . Wenn wir die Zeit vom Eintritt der Kraft auf das Feld messen, ist diese Kraft im Zeitpunkt  $t$  um  $a = ct$  vom linken Ende des Feldes entfernt. Es gilt dann nach (26) und (34)

$$p_{(j)}(t) = \frac{P \sin \Omega t v_{(j)}(a)}{\int \mu(s) w_{(j)}^2(s) ds} = \frac{P \sin \Omega t v_{(j)}(a)}{2n \sum_k m_k [v_{(j)}^2(s_k) + u_{(j)}^2(s_k)]}. \quad (35)$$

Dabei bezeichnet  $v_{(j)}(a)$  die Auslenkung des Balkens bei  $j$ -ter Eigenschwingungsform an der Stelle  $a$ , wo sich die Last befindet;  $n = 15$  ist die Zahl der Felder der Konstruktion. Den Ausdruck (35) kann man in die Gl. (29) einsetzen und durch numerische oder graphische Integration die Werte  $q_{(j)}(t)$  errechnen. Die Auslenkungen im beliebigen Querschnitt kann man dann nach der Formel (27) ermitteln.

Wenn  $\Omega = \omega_{(1)}$  und wenn die Eigenfrequenzen nicht nahe beieinander liegen würden, könnten wir voraussetzen, daß an der Schwingung nur die erste Eigenschwingungsform teilnimmt und es genüge dann nur  $p_{(1)}(t)$  zu ermitteln und in Gl. (27) mit dem ersten Glied allein zu rechnen. Da jedoch bei einem kontinuierlichen System die Eigenfrequenzen sehr nahe beieinander liegen, ist es nicht möglich, auch im Falle der Resonanz, die höheren Glieder in (27) zu vernachlässigen. Es handelt sich nämlich nicht um die Berechnung einer Amplitude der stationären Schwingung, sondern um ein allmähliches Aufschwingen, bei dem die höheren Eigenformen eine wichtige Rolle spielen. Wenn wir diese höheren Eigenformen vernachlässigen würden, bekämen wir unvergleichlich kleinere Auslenkungen als bei einer genauen Berechnung. Der

Ausdruck (35) verkleinert sich nämlich bedeutend, wenn  $n$  im Nenner eine große Zahl ist. Die Berechnung der erzwungenen Schwingung würde also erfordern, vorerst alle  $n$  Grundfrequenzen und die zugehörigen Eigenschwingsformen zu ermitteln und die Gl. (29) für alle  $j=1$  bis  $n$  zu rechnen. Da diese Arbeit nicht durchgeführt werden konnte, war es nötig, die Aufgabe nur angenähert zu lösen. Dabei beschränkten wir uns auf den Resonanzfall  $\Omega = \omega_{(1)}$  und stellten die Durchbiegung nur im Scheitel des Gewölbes fest.

Wie aus der Formel (35) ersichtlich ist, sind die Belastungsglieder bei einem durchlaufenden Bogen von  $n$  Feldern  $n$ -mal kleiner als bei einem Bogen, der von den übrigen Feldern isoliert wäre. Die Zahl der Belastungsglieder ist im Gegenteil  $n$ -mal so groß, weil sich die Zahl der Eigenfrequenzen  $n$ -mal vermehrte. Bei einem Gewölbe, das durch die bewegliche Kraft unmittelbar belastet wird, addieren sich die Einflüsse der Belastungen fast aller Eigenformen, mindestens wenn sich die Last in der Nähe der Feldmitte befindet. Wir werden deshalb dieses Gewölbe angenähert so rechnen, als ob es von den anderen Feldern isoliert wäre und allein durch die Kraft  $P \sin \Omega t$  zum Schwingen gebracht würde, und zwar von der ersten Eigenform. Dadurch vergrößert sich  $n$ -mal die Größe des Belastungsgliedes (35), andererseits wird jedoch nur eines von  $n$  Belastungsgliedern in Erwägung gezogen. Die Energie, die zum Aufschwingen der benachbarten Felder verbraucht wird, werden wir angenähert wie eine durch Dämpfung verlorene Energie behandeln. Es wird deshalb weiter mit einem vergrößerten Dämpfungsbeiwert  $\omega_b$  gerechnet. (Ähnliche Annahmen sind der Baudynamik nicht ganz fremd. Z. B. werden die Maschinenfundamente häufig ohne Rücksicht darauf gerechnet, daß mit dem Fundament gleichzeitig die Masse des umliegenden Bodens mitschwingt; das Mitwirken der Umgebung wird jedoch durch einen erhöhten Dämpfungskoeffizienten in Betracht gezogen.)

Rechnen wir jetzt unter diesen Bedingungen das Schwingen des Scheitels des Gewölbes  $MN$ , vorausgesetzt, daß sich in diesem Felde eine harmonisch veränderliche Kraft  $P \sin \Omega t$  bewegt. Das Belastungsglied  $p_{(1)}(t)$  hat nach (35) den Wert

$$p_{(1)}(t) = \frac{P \sin \Omega t v_{(1)}(a)}{2 \sum_k m_k [v_{(1)}^2(s_k) + u_{(1)}^2(s_k)]}. \quad (36)$$

Die senkrechte Durchbiegung  $v_{(1)}(a)$  des Balkens bei der ersten Eigenschwingsform (Fig. 19a) kann durch die Fouriersche Reihe entwickelt werden, wobei die Koeffizienten dieser Reihe mit Hilfe der numerischen Integration ermittelt werden. Es ergibt sich

$$v_{(1)}(a) = B_1 \sin \frac{\pi a}{l} + B_2 \sin \frac{3\pi a}{l} \dots = 0,272 \sin \frac{\pi a}{l} - 0,032 \sin \frac{3\pi a}{l} + \dots, \quad (37)$$

wobei  $a$  vom Punkte 1 gemessen wird und die Spannweite  $l=54,3$  m die doppelte Entfernung des Punktes 1 zur Gewölbemitte vorstellt (Fig. 12a). In der

Formel (37) hat das zweite Glied geringe Bedeutung und kann vernachlässigt werden. Nach Einsetzen von (37) in (36) und dann in (29) ergibt sich mit Rücksicht auf (34)

$$\frac{d^2 q_{(1)}(t)}{dt^2} + 2\omega_b \frac{dq_{(1)}(t)}{dt} + \omega_{(1)}^2 q_{(1)}(t) = A P \sin \Omega t \sin \omega t \quad (38)$$

wobei  $\omega t = \frac{\pi a}{l} = \frac{\pi c t}{l}$  und  $A = \frac{B_1}{2 \sum_k m_k [v_{(1)}^2(s_k) + u_{(1)}^2(s_k)]} = \frac{0,272}{12,3} = 0,0221$ .

Die Gleichung (38) hat eine partikuläre Lösung

$$q_{(1)}(t) = C_1 \sin \Omega t \sin \omega t + C_2 \sin \Omega t \cos \omega t + C_3 \cos \Omega t \sin \omega t + C_4 \cos \Omega t \cos \omega t \quad (39)$$

wobei  $C$  Konstanten sind, die aus der Formel (38) ermittelt werden können, wenn (39) in (38) eingesetzt wird. Die Gleichung (38) wird nun nur dann erfüllt, wenn die Gleichungen der Tabelle I gelten.

Tabelle I

$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	
$\omega_{(1)}^2 - \Omega^2 - \omega^2$	$-2\omega\omega_b$	$-2\Omega\omega_b$	$2\Omega\omega$	$= AP$
$2\omega\omega_b$	$\omega_{(1)}^2 - \Omega^2 - \omega^2$	$-2\Omega\omega$	$-2\Omega\omega_b$	$= 0$
$2\Omega\omega_b$	$-2\Omega\omega$	$\omega_{(1)}^2 - \Omega^2 - \omega^2$	$-2\omega\omega_b$	$= 0$
$2\Omega\omega$	$2\Omega\omega_b$	$2\omega\omega_b$	$\omega_{(1)}^2 - \Omega^2 - \omega^2$	$= 0$

Diese Gleichungen vereinfachen sich noch, wenn man berücksichtigt, daß  $\Omega = \omega_{(1)}$  ist und daß  $\omega$  und  $\omega_b$  gegenüber  $\omega_{(1)}$  unbedeutend klein sind.

Es gilt dann

$$\begin{aligned} -C_3 \omega_b + C_4 \omega &= \frac{A}{2\omega_{(1)}} P, \\ -C_3 \omega - C_4 \omega_b &= 0, \\ C_1 \omega_b - C_2 \omega &= 0, \\ C_1 \omega + C_2 \omega_b &= 0, \end{aligned}$$

und daraus

$$C_1 = C_2 = 0 \quad (40)$$

$$C_3 = -\frac{A}{2\omega_{(1)}} P \frac{\omega_b}{\omega^2 + \omega_b^2}, \quad (41)$$

$$C_4 = \frac{A}{2\omega_{(1)}} P \frac{\omega}{\omega^2 + \omega_b^2}. \quad (42)$$

Das allgemeine Integral der Gl. (38) besteht aus der partikulären Lösung (39) und aus dem allgemeinen Integral der verkürzten homogenen Gleichung. Mit Rücksicht auf (40) bis (42) und nach Einsetzen  $\Omega = \omega_{(1)}$  ergibt sich

$$q_{(1)}(t) = C_3 \cos \omega_{(1)} t \sin \omega t + C_4 \cos \omega_{(1)} t \cos \omega t + q_0 e^{-\omega_b t} \sin(\omega_{(1)} t + \varphi_0) \quad (43)$$

wobei  $q_0$  und  $\varphi_0$  die Integrationskonstanten bezeichnen.

Wenn das System im Zeitpunkt  $t=0$ , in dem die Last auf den Träger aufgebracht wird, sich in Ruhe befindet, sind die Anfangsbedingungen  $q(0)=0$  und  $\frac{dq(0)}{dt}=0$ . Nach Einsetzen dieser Werte in die Gl. (43) und in ihre Ableitung, ergibt sich

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}, \quad q_0 = -C_4. \quad (44)$$

Die Auslenkung der ersten Eigenschwingungsform in der Mitte der Spannweite sei  $v_{(1)}\left(\frac{l}{2}\right)$ . Wenn wir diesen Wert für  $w_{(1)}(s)$  in die Gl. (27) einsetzen, folgt mit Rücksicht auf (40) bis (44) für die senkrechte Durchbiegung des Scheitels im Zeitpunkt  $t$ :

$$\begin{aligned} v\left(\frac{l}{2}, t\right) &= q_{(1)}(t) v_{(1)}\left(\frac{l}{2}\right) = \\ &= \frac{A v_{(1)}\left(\frac{l}{2}\right) P \cos \omega_{(1)} t}{2 \omega_{(1)} (\omega^2 + \omega_b^2)} [\omega (\cos \omega t - e^{-\omega_b t}) - \omega_b \sin \omega t]. \end{aligned} \quad (45)$$

Diese Gleichung entspricht Gl. (15), die für einen geraden Träger von konstantem Querschnitt gilt.

Wenn die Lokomotive das Feld verläßt, schwingt das System noch mit einer freien Schwingung weiter. Diese Eigenschwingung klingt jedoch viel schneller ab, als es nach der angenäherten theoretischen Untersuchung erfolgte. Wenn sich nämlich die Lokomotive dem Feldende nähert, ist der Anteil aller Eigenformen nicht mehr positiv. Dies ist aus Fig. 19b ersichtlich. Die Koordinaten der dort dargestellten Eigenform werden in der Nähe der Stützen negativ. Wir dürfen deshalb die restliche freie Schwingung überhaupt vernachlässigen.

Eine Lokomotive bringt nicht nur das Feld, welches sie eben befährt, sondern auch die benachbarten Felder in Schwingung. Die Amplituden müssen jedoch im Nachbarfeld kleiner sein als im belasteten. Das ist wieder aus Fig. 19 ersichtlich. Im belasteten Felde addieren sich die Durchbiegungen fast aller Eigenformen, während im Nachbarfeld z. B. die Auslenkung der Eigenform von Fig. 19b eine entgegengesetzte Richtung hat. Der genaue Verlauf der Durchbiegung bei der Belastung des Nachbarfeldes könnte wieder nur durch eine genaue Berechnung festgestellt werden. Bei einer angenäherten Berechnung werden wir voraussetzen, daß das Aufschwingen im Nachbarfelde ähnlich wie im belasteten Felde verläuft, daß jedoch dabei die Auslenkungen  $k$ -mal kleiner sind. Vom Reduktionsbeiwert  $k$  wissen wir jedoch bloß, daß er kleiner als Eins ist. Wenn ein noch weiter entferntes Feld belastet wird, werden die Auslenkungen noch stärker reduziert. Es wird dabei wieder ein ähnlicher Verlauf der Schwingung angenommen wie in den vorhergehenden Fällen, aber es wird ein Reduktionsbeiwert  $k^2$  eingeführt.

Der auf eine angenäherte Weise errechnete Verlauf der Schwingung ist

also von der ziemlich willkürlichen Wahl der beiden Koeffizienten — des Dämpfungsbeiwertes  $\omega_b$  und des Reduktionskoeffizienten  $k$  — abhängig. (Bei der strengen Lösung war nur ein Wert  $\omega_b$  unbekannt, den man überdies ziemlich leicht auf experimentellem Wege bestimmen konnte.) Glücklicherweise hat die Wahl der beiden Beiwerte, wie aus der weiteren Berechnung ersichtlich, einen verhältnismäßig kleinen Einfluß auf die dynamische Vergrößerung der maximalen statischen Durchbiegung, zumindest im Gewölbescheitel.

Bei den experimentellen Messungen wurde die Brücke wieder mit einer Zweizylindertenderlokomotive von 97 t Gewicht belastet. Die Zentrifugalkraft der Triebräder wurde mit

$$P = 0,3 N^2 t$$

in der Berechnung eingeführt. Der Triebradumfang ist  $O = 3,96$  m. Weitere Fahrten wurden mit einer Dreizylindertenderlokomotive von 124 t Gewicht mit Triebradumfang  $O = 5,1$  m durchgeführt.

Bei einer kritischen Geschwindigkeit von

$$c = n_{(1)} \cdot O = 3,68 \cdot 3,96 = 14,55 \text{ m s}^{-1} = 52 \text{ km pro Stunde}$$

erzeugen die Triebachsen der Zweizylinderlokomotive eine harmonisch veränderliche Kraft, deren Amplitude

$$P = 0,3 \cdot 3,68^2 = 4,06 \text{ t}$$

ist. Weiter ergibt sich

$$\frac{\omega_{(1)} l}{c} = \frac{2 \pi l}{O} = 86,3$$

und

$$\omega = \frac{\pi c}{l} = \frac{\pi \cdot 14,55}{54,3} = 0,842 \text{ s}^{-1}.$$

Außerdem wurde das logarithmische Dekrement auf  $\vartheta = 0,3$  geschätzt, so daß

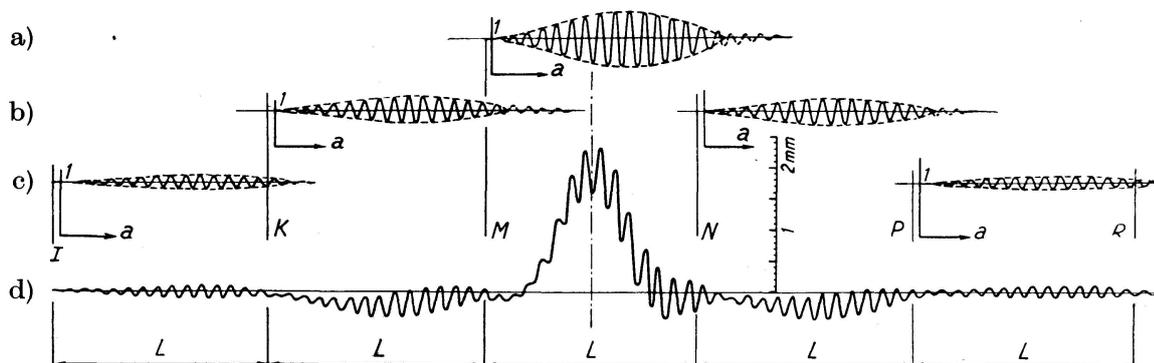


Fig. 20 a. Das Aufschwingen des Gewölbescheitels des belasteten Feldes.

Fig. 20 b. Das Aufschwingen bei Belastung der Nachbarfelder.

Fig. 20 c. Das Aufschwingen bei Belastung der weiteren Felder.

Fig. 20 d. Theoretische dynamische Durchbiegungskurve.

$$\omega_b \cong \vartheta n_{(1)} = 0,3 \cdot 3,68 = 1,104 \text{ s}^{-1}.$$

Wenn man diese Werte und  $A = 0,0221$  sowie  $v_{(1)} \left(\frac{l}{2}\right) = 0,314$  in die Formel (45) einsetzt, ergibt sich nach einer kleinen Umformung

$$v\left(\frac{l}{2}, t\right) = \cos 86,3 \frac{a}{l} \left[ 0,000266 \left( \cos \frac{\pi a}{l} - e^{-4,12 \frac{a}{l}} \right) - 0,000349 \sin \frac{\pi a}{l} \right]. \quad (46)$$

Man mißt dabei  $a$  vom Punkte 1 des Feldes  $MN$  und  $l = 54,3$  m ist die zweifache Entfernung vom Punkte 1 zur Feldmitte. Der Ausdruck (46) ist graphisch in Fig. 20a dargestellt.

Wenn die periodische Kraft die Nachbarfelder  $KM$  und  $NP$  belastet, schwingt der Scheitel des Gewölbes  $MN$  wiederum nach der Gl. (46), deren rechte Seite jedoch mit dem Reduktionsbeiwert  $k$  multipliziert wird. Es wurde  $k$  mit 0,5 abgeschätzt und der so gewonnene Verlauf der dynamischen Auslenkung graphisch in Abhängigkeit von  $a$  dargestellt (Fig. 20b).  $a$  wird jetzt vom Punkte 1 des Feldes  $KM$ , bzw.  $NP$  gemessen. Analog wurde der Verlauf der Auslenkung bei der Belastung des Feldes  $IK$  und  $PR$  ermittelt. Die rechte Seite des Ausdruckes (46) wurde dabei mit  $k^2 = 0,25$  multipliziert (Fig. 20c). Die Kurven in Fig. 20a, b, c sind auf die Kurve der statischen Durchbiegung unter einer fahrenden Lokomotive (Fig. 17c) superponiert. Die so gewonnene Kurve (Fig. 20d) entspricht den Aufzeichnungen eines registrierenden Durchbiegungsmessers in den Fig. 22d, e und 23.

Um den Einfluß der Wahl der Beiwerte  $\omega_b$  und  $k$  auf die Lösung zu zeigen, wurde noch eine Berechnung für ein halbes logarithmisches Dekrement und für  $k = 0,4$  durchgeführt. Das Ergebnis ist in Fig. 21 aufgezeichnet.

In den Fig. 22a, b, c, d, e, f sind die gemessenen Durchbiegungen in der Mitte des Feldes  $MN$  bei verschiedenen Geschwindigkeiten der Zweizylinderlokomotive dargestellt. Es ist ersichtlich, daß bei langsamen Fahrten die dynamischen Einflüsse klein sind. Bei einer Geschwindigkeit von ungefähr 47 km pro Stunde entsteht zum ersten Male die Resonanz. Die theoretische kritische Geschwindigkeit liegt ein wenig höher bei 52 km pro Stunde. Die Übereinstimmung ist jedoch verhältnismäßig gut, wenn man erwägt, wie sehr die

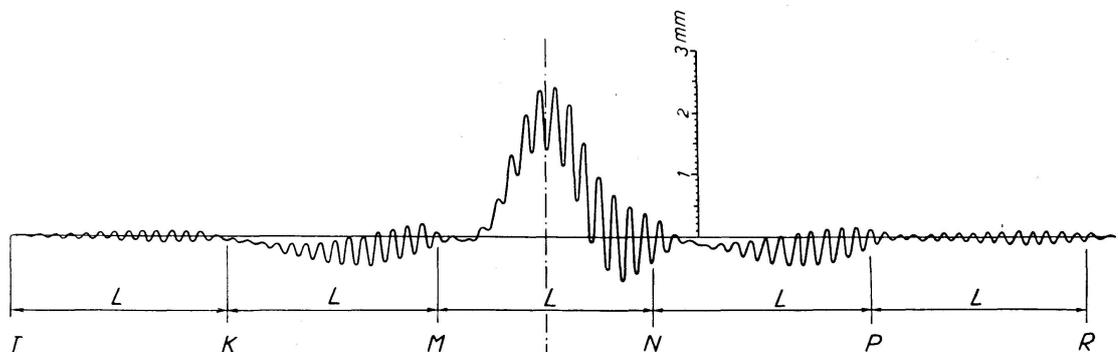


Fig. 21. Theoretische dynamische Durchbiegungskurve bei geänderten Voraussetzungen für die Dämpfung und für das Mitwirken der Felder.

Durchbiegungen von der Nachgiebigkeit des Untergrundes unter den Pfeilerfundamenten abhängen, dessen Elastizität unvollkommen ist und in der Berechnung nur angenähert berücksichtigt werden kann. Bei größerer Geschwindigkeit sinken wieder die dynamischen Auslenkungen. Auf manchen Abbildungen (Fig. 22) kann man eine elastische Hysteresis beobachten. Diesen Einfluß, welcher übrigens nur klein ist und bei größeren Geschwindigkeiten sich nur wenig geltend macht, kann man eben der unvollkommenen Elastizität des Untergrundes zuschreiben. Im ganzen verhält sich aber das System sehr elastisch.

Die Fig. 23 zeigt deutlich den Einfluß der Belastung in weiter entfernten

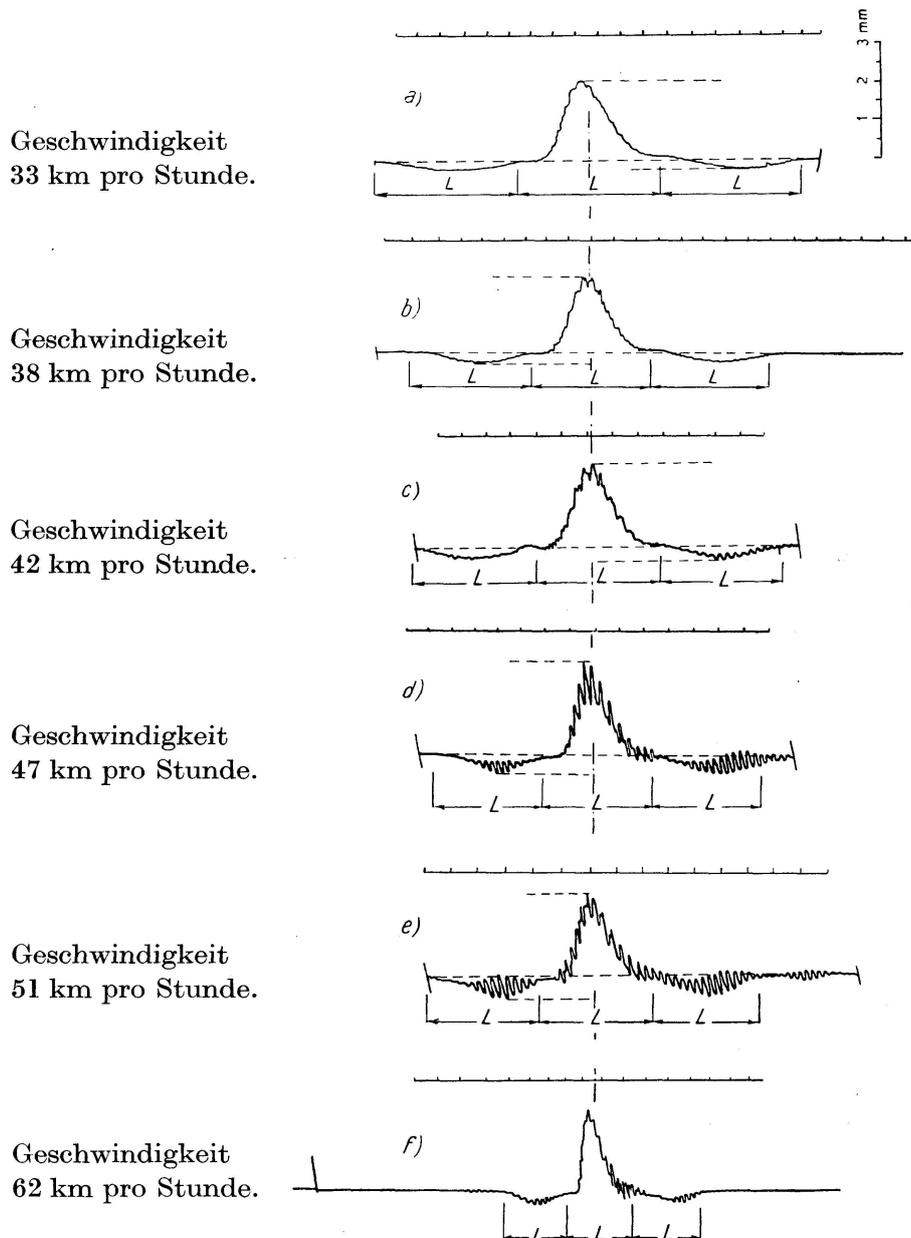


Fig. 22. Aufzeichnungen eines registrierenden Durchbiegungsmessers im Scheitel des mittleren Gewölbes bei verschiedenen Geschwindigkeiten der Zweizylinderlokomotive.

Feldern. In Fig. 24 ist der Verlauf der Spannung im Gewölbekämpfer aufgezeichnet, der mit Hilfe eines Straingage-Tensometers aufgetragen wurde.

In Fig. 25 a, b sind die Durchbiegungen bei der Fahrt einer Dreizylinderlokomotive aufgezeichnet. Es wurden bei keiner Geschwindigkeit Schwingun-

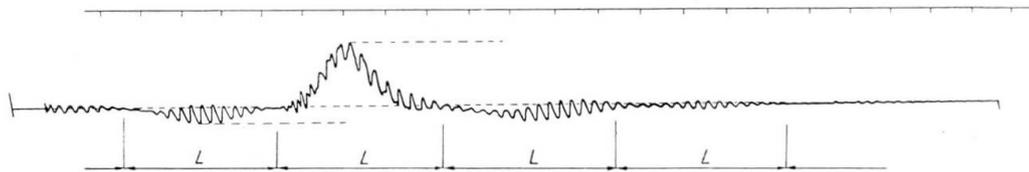


Fig. 23. Einfluß der Kontinuität des Systemes (Geschwindigkeit 52 km pro Stunde).

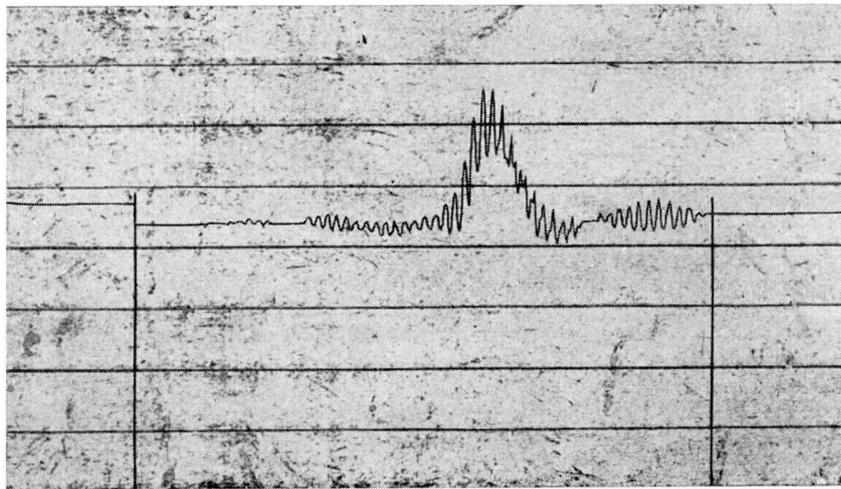
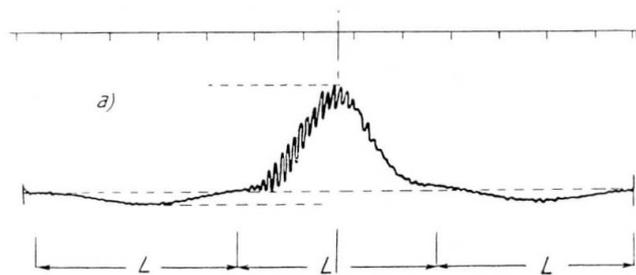


Fig. 24. Spannung im Gewölbekämpfer (Strain-gage). Geschwindigkeit 47 km pro Stunde.

Geschwindigkeit  
50 km pro Stunde.



Geschwindigkeit  
75 km pro Stunde.

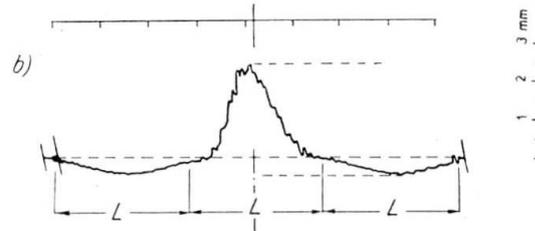


Fig. 25. Aufzeichnungen des registrierenden Durchbiegungsmessers bei Überfahrt einer Dreizylinderlokomotive.

gen beobachtet, welche die Frequenz auswiesen, die der Umdrehungszahl der Triebräder gleich wäre. Es zeigte sich jedoch bei einer Geschwindigkeit von ungefähr 50 km pro Stunde, d. h. bei  $N = 2,7 s^{-1}$ , eine ziemlich starke Schwingung (Fig. 25a) mit einer Frequenz von etwa  $7,7 s^{-1}$ . Das ist ungefähr gleich der Eigenfrequenz  $n_{(15)}$ , mit welcher die Gewölbe mit unnachgiebigen Widerlagern schwingen (Fig. 19b). Diese Frequenz ist ungefähr dreimal so groß als die Umdrehungszahl der Triebräder. Die Ursachen dieser Schwingungen sind bis jetzt nicht ganz klar. Bei einer Geschwindigkeit von 75 km pro Stunde sind die dynamischen Einflüsse wieder gering.

### Zusammenfassung

In der Beurteilung der dynamischen Einflüsse auf Eisenbahnbrücken herrscht keine Einheit. Ein Teil der Forscher (Timoshenko, Inglis usw.) sieht deren Ursache in erster Linie in den periodischen Kräften der Triebräder der Lokomotiven, während die anderen diese Einflüsse nicht für wichtig halten. Die dynamischen Einflüsse auf Brücken aus Stahlbeton wurden bis jetzt wenig untersucht. Die Ergebnisse der Messungen und theoretischen Untersuchungen, die in dieser Abhandlung wiedergegeben sind, sollen zur Klärung der erwähnten Probleme beitragen.

Im ersten Kapitel sind die Einflüsse auf stählerne Brücken behandelt. Die theoretischen Resultate werden mit den Aufzeichnungen der verschiedenen Meßapparate verglichen. Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung der Theorie mit den Messungen. Weiter wird auf einige Fehler hingewiesen, welche sich oft in der Literatur in Beurteilung der dynamischen Einflüsse wiederholen.

Im zweiten Kapitel sind die dynamischen Einflüsse auf die Brücken aus Stahlbeton untersucht. Zuerst werden die Eigenschwingungsformen und Eigenschwingungszahlen eines Bogens, der durch Rahmen versteift wird, gerechnet.

Weiter werden die Eigenformen und Eigenzahlen eines kontinuierlichen Gewölbes ermittelt. Die Ergebnisse dienen zur Feststellung der erzwungenen Schwingungen dieser Brücken unter sich bewegenden Fahrzeugen. Die Ergebnisse sind mit denjenigen der Messungen verglichen und es zeigt sich eine gute Übereinstimmung.

### Summary

There is no agreement among the different ways of estimating the dynamic effects in railway bridges. Some of the investigators (Timoshenko, Inglis, etc.) impute the vibrations mainly to the periodical loading due to the driving axles of the locomotives while others are of the opinion that this loading is unimportant. The dynamic effects in reinforced concrete bridges have, up to now, been very little investigated. The experimental and theoretical results presented by the author should contribute to solve those problems.

The dynamic effects in steel bridges are studied in the first chapter. Theoretical results are compared with graphs obtained with different measuring apparatus. There is good agreement between theoretical and measured values. Errors frequently found in the literature dealing with dynamic effects are reported.

The second chapter deals with dynamic effects in reinforced concrete bridges. Forms and frequencies of natural vibrations in a frame-stiffened arch are calculated. Forms and frequencies of continuous arches are then determined. These results enable determining the vibrations in these bridges, caused by the passage of vehicles. Measured and calculated results are compared, a good agreement being found.

### Résumé

Il n'existe pas d'unité dans la manière d'apprécier les effets dynamiques dans les ponts de chemin de fer. Certain chercheurs (Timoshenko, Inglis, etc.) attribuent les vibrations principalement à la sollicitation periodique exercée par les roues motrices des locomotives, tandis que d'autres affirment que cette sollicitation n'a pas d'importance. On a peu étudié, jusqu'à présent, les effets dynamiques sur les ponts en béton armé. Les résultats des mesures et des études théoriques, communiqués par l'auteur doivent contribuer à résoudre ces problèmes.

Dans le premier chapitre, l'on étudie les effets dynamiques dans les ponts métalliques. On compare les résultats théoriques et les graphiques obtenus au moyen des différents appareils de mesure. Il existe une coïncidence satisfaisante entre la théorie et les valeurs mesurées. On indique encore quelques erreurs fréquemment rencontrées dans la littérature concernant les opinions au sujet des effets dynamiques.

Dans un second chapitre on traite des effets dynamiques dans les ponts en béton armé. On calcule d'abord les formes et les fréquences de vibrations propres d'un arc raidi par des cadres. On détermine ensuite les formes et les fréquences de voûtes continues. Ces résultats permettent de déterminer les vibrations de ces ponts, causées par le passage des véhicules. En comparant les résultats mesurés avec ceux que l'on a calculé, on constate un accord satisfaisant.