Begründung und Darstellung einer allgemeinen Theorie der Hängebrücken mit Hilfe der Matrizenrechnung

Autor(en): **Egerváry, E.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **16 (1956)**

PDF erstellt am: **23.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-15063

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Begründung und Darstellung einer allgemeinen Theorie der Hängebrücken mit Hilfe der Matrizenrechnung

Bases of a general theory of suspension bridges using a matricial method of calculation

Bases d'une théorie générale des ponts suspendus, faisant appel au calcul matriciel

E. Egerváry, Mitglied der Akademie Budapest

Die zur Erforschung des statischen Verhaltens eines aus starren oder elastischen Körpern zusammengesetzten Systems geeigneten mathematischen Hilfsmittel werden bekanntlich durch die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems bestimmt. Diejenigen Probleme der technischen Festigkeitslehre, bei welchen das Hookesche Elastizitätsgesetz zu Grunde gelegt wird, führen bei Systemen von endlich vielen Freiheitsgraden zu linearen, algebraischen Gleichungen, bei Systemen von unendlich vielen Freiheitsgraden aber zu linearen Differentialgleichungen.

Es ist eine historische Tatsache, daß die Auflösungstheorie der linearen Differentialgleichungen — im besonderen mit Hilfe der Greenschen Funktion, bzw. der Eigenfunktionen — sich früher entwickelt hat, als die analoge Auflösungstheorie der linearen, algebraischen Gleichungen mit Hilfe der Matrizenrechnung. Diesem Umstande ist es wohl zuzuschreiben, daß in der Theorie der Hängebrücken fast ausschließlich Modelle mit unendlich vielen Freiheitsgraden zu Grunde gelegt worden sind, die zu einer linearen Differentialgleichung führen, während die Verwendung von Modellen mit endlich vielen Freiheitsgraden, die zu einem linearen, algebraischen Gleichungssystem führen, kaum über den ersten Anfang hinausgekommen ist.

Bei der Auswahl des geeigneten mathematischen Modells für eine Hängebrücke hat man zwischen Kabelbrücke und Kettenbrücke scharf zu unterscheiden.

Eine Kabelbrücke, als Verknüpfung eines eindimensionalen biegsamen Kontinuums mit einem elastischen Balken durch endlich viele starre Hängestäbe, kann — bei einigermaßen beträchtlicher Anzahl der Hängestäbe — sicherlich durch das einfachere Modell ersetzt werden, bei dem Kabel und

Balken durch eine Hängemembrane gekoppelt sind, und dieses Modell führt sofort auf die wohlbekannte, zuerst von E. MELAN aufgestellte lineare Differentialgleichung.

Eine Kettenbrücke aber, deren Kettenglieder und Hängestäbe als starre (oder höchstens in ihrer Längsrichtung dehnungsfähige) Stäbe zu betrachten sind, läßt sich viel genauer und vorteilhafter als ein System von endlich vielen Freiheitsgraden behandeln, wenn man die zusätzliche (lebende) Belastung — deren mathematisch genaue Verteilung weder bekannt noch praktisch von Belang ist — durch statisch äquivalente, an den unteren Endpunkten der Hängestäbe angreifende Einzelkräfte ersetzt. Dieses „finitisierte" Modell einer Kettenbrücke führt — bei Anwendung der elementarsten Sätze der technischen Festigkeitslehre — auf ein System von linearen, algebraischen Gleichungen, bei welchen die Anzahl der Unbekannten der Anzahl der Hängestäbe gleich ist.

In der vorliegenden Arbeit wird das System der Gleichgewichtsgleichungen einer finitisierten Kettenbrücke mit matrizentheoretischen Hilfsmitteln aufgestellt und gelöst. Dabei wird auch die — von einzelnen Autoren schon angedeutete — Tatsache ins klare Licht gestellt, dass der aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen her bekannten GREENschen Funktion, bzw. deren Bilinearreihe die Inverse der Koeffizientenmatrix des obigen Gleichungssystems, bzw. deren kanonische Darstellung (Spektralzerlegung) als finite Urformen entsprechen.

Um die Analogie und den Zusammenhang zwischen den scheinbar wesentlich verschiedenen Methoden und Lösungsformeln möglichst klar hervortreten zu lassen, werden wir die Grundgleichungen einer Kettenbrücke mit *einem* Hängestab, mit n Hängestäben und mit *unendlich vielen* Hängestäben parallel diskutieren. Dabei wird es sich herausstellen, daß die Diskussion einer Kettenbrücke mit *einem* Hängestab der Lösung einer allereinfachsten Übungsaufgabe aus der technischen Mechanik gleichwertig ist, aber dennoch die daraus entspringenden einfachen Lösungsformeln auch für eine Kettenbrücke mit n Hängestäben ihre Gültigkeit bewahren, wenn die darin vorkommenden skalaren Größen durch entsprechende Matrizen ersetzt werden.

Darüber hinaus werden wir zeigen, daß die auf diese Weise für die n-gliedrige Kettenbrücke aufgestellten matrizentheoretischen Lösungsformlen bei dem Grenzprozesse $n \to \infty$ in die von TIMOSHENKO, KÁRMÁN, BLEICH u. a. für Hängebrücken mit unendlich vielen Hängestäben angegebenen Lösungsformeln übergehen.

*

Wir haben bis jetzt allgemein von Grundgleichungen der Hängebrücken gesprochen. In Wirklichkeit gibt es bekanntlich bei jedem Problem der Elastizitätstheorie zwei Arten von Grundgleichungen, nämlich Spannungsgleichungen und Verschiebungsgleichungen.

Die Spannungsgleichung einer Hängebrücke, welche die Biegungsspannungsmatrix des Balkens (Versteifungsträgers) als Unbekannte enthält, hat eine besonders einfache Form. Bei endlich vielen Hängestäben ist die Gleichungsmatrix eine symmetrische Kontinuante, welche bekanntlich verhältnismäßig leicht invertierbar ist. Bei unendlich vielen Hängestäben ist die Spannungsgleichung eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren GREENsche Funktion (Einflußfunktion) bei konstantem Querschnittsträgheitsmoment explizit angebbar ist, bei variablem Querschnittsträgheitsmoment durch eine unendliche Reihe dargestellt werden kann.

Die Verschiebungsgleichung einer Hängebrücke, welche die Durchbiegungsmatrix, bzw. Durchbiegungsfunktion des Brückenbalkens als Unbekannte enthält, hat sowohl in Matrizen- als auch in Differentialform einen wesentlich komplizierteren Bau. Durch Anwendung einer Matrizenidentität, deren infinitesimales Analogon schon von D. HILBERT angegeben worden ist, wird es aber gelingen, die Lösung der Verschiebungsgleichung auf diejenige der Spannungsgleichung zurückzuführen. Damit werden auch die von KÁRMÁN, BLEICH u. a. gefundenen Reihenentwicklungen in den Rahmen der allgemeinen Theorie eingefügt.

Die kanonische Darstellung der Gleichungsmatrizen sowie die als deren Grenzfall zu betrachtenden BLEICHschen Reihenentwicklungen haben bei variablem Querschnittsträgheitsmoment vorwiegend theoretisches Interesse, weil kein einziger Spezialfall bekannt zu sein scheint, in dem die Eigenwerte und Eigenmatrizen, bzw. Eigenfunktionen, in einer zur praktischen Rechnung geeigneten Form bekannt wären. So scheint zur Zeit das Invertieren der in den Gleichgewichtsgleichungen auftretenden Kontinuantmatrizen das brauchbarste Hilfsmittel zur Berechnung von ungleichmäßigen Kettenbrücken.

Bei einer gleichmäßigen Kettenbrücke aber, wo die Hängestäbe äquidistant sind und der Brückenbalken ein konstantes Querschnittsträgheitsmoment hat, dürften die explizit bekannten Eigenwerte und Eigenmatrizen der Gleichungsmatrix als das geeignetste Hilfsmittel zur praktischen Berechnung bezeichnet werden, weil sie dann automatisch die Fourier-Entwicklung der gesuchten Biegespannung, bzw. Durchbiegung liefern.

Wenn bei der Erörterung eines Problems zwei verschiedene Lösungsmethoden wie hier die Matrizenmethode und die Differentialmethode einander gegenübergestellt werden, so ist eine vergleichende Betrachtung ihrer praktischen Anwendbarkeit naheliegend. Es besteht kein Zweifel darüber, daß für eine Kettenbrücke mit wenigen Hängestäben die Matrizenmethode die Verformungen und Spannungen der Brücke viel genauer beschreiben wird als die Differentialmethode.

Bei großen Kettenbrücken mit 30 und mehr Hängestäben wird die Abweichung zwischen den mit diesen beiden Methoden gewonnenen Ergebnissen voraussichtlich so geringfügig, daß sie gegenüber der Unsicherheit der Materialkonstanten wohl vernachlässigt werden kann. Wenn man aber berücksichtigt,

daß die Lösungsformeln der Differentialgleichungen immer praktisch unbequeme Grenzprozesse (bei Verwendung der GREENschen Funktion bestimmte Integrale mit Parameter, bei Verwendung der Eigenfunktionen unendliche Reihen) enthalten, so wird man geneigt sein, die Anwendung der finiten Matrizenmethode auch in diesem Falle als vorteilhaft zu betrachten.

Wie bei jedem System, welches ein durch vertikale Kräfte gespanntes Kabel oder Kette enthält, so hat man auch bei einer Hängebrücke — neben der Auflösung einer linearen Matrizen- oder Differentialgleichung — noch die durch die zusätzliche Belastung hervorgerufene Änderung der Kabel- bzw. Kettenspannung, d. h. die zusätzliche Horizontalspannung zu berechnen. Diese Berechnung wird allgemein so durchgeführt, daß für die unbekannte relative Spannungsänderung mit Hilfe von kinematischen und elastizitätstheoretischen Überlegungen eine Gleichung aufgestellt wird, deren algebraisch größte Wurzel die gesuchte relative Spannungsänderung liefert.

Die Berechnung der Spannungsänderung ist auch im Falle einer finitisierten Kettenbrücke keine lineare Aufgabe. Selbst bei einer Kettenbrücke mit einem einzigen Hängestab hat man eine algebraische Gleichung zweiten Grades zu lösen. Bei einer Hängebrücke mit n Hängestäben ergibt sich eine algebraische Gleichung $n+1$-ten Grades, bei einer Kabelbrücke eine transzendente Gleichung. Für die approximative Lösung dieser Gleichungen sind verschiedene Methoden vorgeschlagen worden.

Bei einer gleichmäßigen Kettenbrücke kann die Bestimmungsgleichung für die relative Spannungszunahme auf eine solche Form gebracht werden, die die Existenz einer einzigen positiven Wurzel erkennen läßt und unschwer approximativ gelöst werden kann.

Bei einer ungleichmäßigen Kettenbrücke wird wohl das bequemste Verfahren das sein, die gegebene Brücke durch eine hinsichtlich der Spannungsänderung annähernd äquivalente gleichmäßige Brücke zu ersetzen und die darin eintretende relative Spannungsänderung nach bekannten Methoden approximativ zu berechnen.

Um die vorliegende Arbeit möglichst lesbar zu gestalten, haben wir sie folgendermaßen in Abschnitte eingeteilt.

I. Im ersten Abschnitt wird eine möglichst knappe Darstellung derjenigen Begriffe und Sätze der Matrizentheorie gegeben, welche in den folgenden Abschnitten gebraucht werden. Auch der Zusammenhang zwischen den Kontinuantmatrizen und den linearen Differentialgleichungen wird flüchtig erörtert.

II. Im zweiten Abschnitt werden die wohlbekannten Gleichgewichtsgleichungen einer durch vertikale Einzelkräfte beanspruchten Kette bzw. Balken angeführt und in Matrizenform dargestellt.

III. Der dritte Abschnitt bringt die elementare Berechnung der Biegespannung und der Durchbiegung einer zweigliedrigen Kettenbrücke mit einem

einzigen Hängestab. Gleichzeitig wird auch die Gleichung zweiten Grades, welche die zusätzliche Horizontalspannung bestimmt, aufgestellt.

IV. Im vierten Abschnitt zeigen wir, daß die im Abschnitt III für die zweigliedrige Kettenbrücke hergeleiteten elementaren Lösungsformeln auch für die n-gliedrige Kettenbrücke gültig bleiben, wenn die skalaren Größen durch entsprechende Matrizen ersetzt werden. Auch die Bestimmungsgleichung für die zusätzliche Horizontalspannung wird in Matrizenform erhalten.

V. In diesem Abschnitt wird der Grenzübergang von einer n-gliedrigen Kettenbrücke zu einer unendlich vielgliedrigen Kabelbrücke durchgeführt.

Im Abschnitt VI werden diejenigen Vereinfachungen und praktischen Vorteile angegeben, die sich im Falle einer gleichmäßigen Ketten- oder Kabelbrücke einstellen.

Abschnitt VII bringt endlich einige Beispiele über die Anwendung der geschilderten Methoden.

Abschnitt I [1]

§ 1. Wählt man als leitende Idee bei der Einführung der Matrizen ihre Anwendbarkeit zur Lösung linearer Gleichungssysteme, so kann man sich zunächst folgende Aufgabe stellen.

Die Koeffizienten a_{ij}, die Unbekannten x_i und die Störungsglieder b_i eines geordneten linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{1}$$

sollen derart in Symbole $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}$ zusammengefaßt werden, daß man erstens mit diesen Symbolen *möglichst genau so* rechnen kann wie mit gewöhnlichen Zahlen, zweitens das Gleichungssystem (1) und seine Lösung mit diesen Symbolen in der Form

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} \tag{2}$$

darstellbar sei.

Für diesen Zweck wird es genügen, die Begriffe: Spaltenmatrix, Zeilenmatrix und quadratische Matrix einzuführen.

Spaltenmatrix n-ter Ordnung ist die Zusammenfassung von n geordneten Zahlen (Elementen) $a_1, a_2, \ldots a_n$ in ein vertikales Schema von der Form

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Zeilenmatrix ist die Zusammenfassung von n geordneten Zahlen $b_1, b_2, \ldots b_n$ in ein horizontales Schema von der Form

$$\boldsymbol{b}^* = [b_1 b_2 \ldots b_n].$$

Eine quadratische Matrix n-ter Ordnung ist die Zusammenfassung von n^2 doppelt geordneten Zahlen $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{nn}$ in ein schachbrettartiges Schema von der Form

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Das Gleichheitszeichen zwischen zwei Matrizen bedeutet, daß sie gleichviel Spalten und Zeilen enthalten und ihre homologen (an gleicher Stelle befindlichen) Elemente gleich sind.

Eine Matrix, deren alle Elemente gleich 0 sind, wird Nullmatrix genannt und mit 0 bezeichnet.

Eine quadratische Matrix mit den Elementen δ_{ij} ($\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und $= 0$ für $i \neq j$) heißt Einheitsmatrix und wird mit $\boldsymbol{E}$ bezeichnet. Die Rechenregeln für die Addition und Subtraktion von Matrizen lauten:

$$[a_1 a_2 \ldots a_n] \pm [b_1 b_2 \ldots b_n] = [a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, \ldots a_n \pm b_n] \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ \vdots \\ a_n \pm b_n \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & & \\ & & a_{nn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & & \\ & & \\ & & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & & \\ & & \\ & & a_{nn} \pm b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Eine beliebige Matrix wird mit einer Zahl (Skalar) multipliziert, indem man jedes Element der Matrix mit der betreffenden Zahl multipliziert.

Das Produkt von zwei Matrizen ist nur dann erklärt, wenn die Spaltenanzahl des ersten (linken) Faktors mit der Zeilenanzahl des zweiten (rechten) Faktors übereinstimmt (Konformitätsbedingung zweier benachbarter Faktoren). In dieser Arbeit werden nur folgende Matrizenprodukte vorkommen

$$[a_1 a_2 \ldots a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu; \qquad \begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma a_{1\nu} b_\nu \\ \Sigma a_{2\nu} b_\nu \\ \vdots \\ \Sigma a_{n\nu} b_\nu \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11}\, b_{12} \ldots b_{1n} \\ b_{21}\, b_{22} \ldots b_{2n} \\ \vdots \\ b_{n1}\, b_{n2} \ldots b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma a_{1\nu} b_{\nu 1}\, \Sigma a_{1\nu} b_{\nu 2} \ldots \Sigma a_{1\nu} b_{\nu n} \\ \Sigma a_{2\nu} b_{\nu 1}\, \Sigma a_{2\nu} b_{\nu 2} \ldots \Sigma a_{2\nu} b_{\nu n} \\ \vdots \\ \Sigma a_{n\nu} b_{\nu 1}\, \Sigma a_{n\nu} b_{\nu 2} \ldots \Sigma a_{n\nu} b_{\nu n} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Aus diesen Multiplikationsformeln folgen die charakteristischen Eigenschaften der Einheitsmatrix $\boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}; \qquad \boldsymbol{E}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}.$$

Auch das Produkt von drei und mehreren Matrizen kann nach diesen Regeln gebildet werden, wenn die Konformitätsbedingungen zwischen je zwei benachbarten Faktoren erfüllt sind. So ist z. B.

$$\boldsymbol{a}^* \boldsymbol{B} \boldsymbol{c} = \sum_{u=1}^{n} \sum_{v=1}^{n} b_{uv} a_u c_v. \tag{5}$$

Aus einer quadratischen Matrix $\boldsymbol{A}$ kann man die Matrixpotenzen

$$(\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{E}), \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2, \boldsymbol{A}^3, \ldots$$

und mit beliebigen Zahlen $c_0, c_1, c_2, \ldots$ die Matrixpolynome

$$c_0 \boldsymbol{E} + c_1 \boldsymbol{A} + c_2 \boldsymbol{A}^2 + \cdots$$

bilden.

Fast alle wesentlichen Rechenregeln der gewöhnlichen Zahlen bleiben bei den Matrixoperationen erhalten, nur die Multiplikation ist im allgemeinen nicht kommutativ; die Reihenfolge der Faktoren eines Matrizenproduktes darf also im allgemeinen nicht vertauscht werden.

§ 2. Es ist zweckmäßig, schon hier einige spezielle Matrizentypen einzuführen. Die aus der linken, oberen Ecke ausgehende Diagonale einer quadratischen Matrix $\boldsymbol{A}$ nennt man Hauptdiagonale. Werden alle Elemente einer quadratischen Matrix an der Hauptdiagonale gespiegelt, so erhält man die Transponierte von $\boldsymbol{A}$, welche mit $\boldsymbol{A}^*$ bezeichnet wird. (Auch die Bezeichnung $\boldsymbol{a}^*$ einer Zeilenmatrix erinnert daran, daß sie als Transponierte einer Spaltenmatrix $\boldsymbol{a}$ betrachtet werden kann.)

Ist eine quadratische Matrix ihrer Transponierten gleich, also $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^*$, so wird sie symmetrisch genannt. In dieser Arbeit werden ausschließlich symmetrische (quadratische) Matrizen vorkommen.

Die einfachste symmetrische Matrix ist die Diagonalmatrix, welche nur in der Hauptdiagonale von 0 verschiedene Elemente enthält.

Als einfachste symmetrische Matrizen nach den Diagonalmatrizen müssen die symmetrischen Kontinuanten betrachtet werden, welche nur in der Hauptdiagonale und in den dazu benachbarten Schräglinien von 0 verschiedene Elemente enthalten. Eine symmetrische Kontinuante n-ter Ordnung hat also folgende Form

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \ldots & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{bmatrix}.$$

Man wird sehen, daß diese symmetrischen Kontinuanten, welche schon in der Fachwerkstatik vorgekommen sind, in der Theorie der Kettenbrücken eine hervorragende Rolle spielen.

§ 3. Die bis jetzt erklärten Begriffe und Rechenoperationen geben uns schon die Möglichkeit, das lineare Gleichungssystem (1) in der gewünschten Form darzustellen. In der Tat, wenn die n^2 Gleichungskoeffizienten a_{ij} zu einer quadratischen Matrix $\boldsymbol{A}$, die Unbekannten x_i, bzw. die Störungsglieder b_i zu einer Spaltenmatrix $\boldsymbol{x}$, bzw. $\boldsymbol{b}$ vereinigen, so läßt sich das Gleichungssystem (1) zu der einzigen Matrizengleichung $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ zusammenfassen. Jetzt können wir uns also der zweiten Forderung zuwenden: das Symbol $\boldsymbol{A}^{-1}$ so zu erklären, daß die Lösung in der Form (2) darstellbar und berechenbar sei.

Zu diesem Zweck wird es genügen, die reziproke (oder inverse) Matrix $\boldsymbol{A}^{-1}$ von $\boldsymbol{A}$ durch die Forderung zu erklären, daß das Produkt von $\boldsymbol{A}^{-1}$ und $\boldsymbol{A}$ (in irgendwelcher Reihenfolge) der Einheitsmatrix $\boldsymbol{E}$ gleich sein soll, d. h.

$$\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}.$$

Ebenso wie die Zahl 0 keine Reziproke hat, so besitzt auch eine quadratische Matrix, deren Determinante verschwindet, keine Reziproke. Ist aber die Matrix $\boldsymbol{A}$ nicht singulär, ist also ihre Determinante

$$det\,\boldsymbol{A}\neq 0,$$

so besitzt $\boldsymbol{A}$ eine Reziproke, welche durch die folgende explizite Formel geliefert wird

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{det\,\boldsymbol{A}}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2}\\ \vdots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn}\end{bmatrix}. \tag{6}$$

Hier bezeichnet A_{ij} die zum Element a_{ij} gehörige (mit richtigem Vorzeichen versehene) Unterdeterminante von $det\,\boldsymbol{A}$.

Das Gleichungssystem ist also gewiß lösbar, wenn $det\,\boldsymbol{A}\neq 0$ ist, und Multiplikation der Matrizengleichung $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ beiderseits von links mit $\boldsymbol{A}^{-1}$ liefert die Lösung in der gewünschten Form.

Hierzu ist vom praktischen Standpunkt aus folgendes zu bemerken: Zur wirklichen Berechnung der Reziproken ist die Formel (6) — bei einigermaßen hoher Ordnungszahl — wegen den darin auftretenden Determinanten absolut unbrauchbar. In der Kettenbrückentheorie hat man aber nur mit den oben eingeführten Kontinuanten zu tun und zum Invertieren dieser Kontinuanten werden wir numerisch gut verwendbare Rechenverfahren angeben. Als Beispiel sei hier die Reziproke der einfachsten Kontinuante $n-1$-ter Ordnung $\boldsymbol{C}_0$ angegeben.

(7)

$$\boldsymbol{C}_0^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{n}\begin{bmatrix} (n-1)\,1 & (n-2)\,1 & (n-3)\,1 & \dots & 2,1 & 1,1\\ (n-2)\,1 & (n-2)\,2 & (n-3)\,2 & \dots & 2,2 & 1,2\\ (n-3)\,1 & (n-3)\,2 & (n-3)\,3 & \dots & 2,3 & 1,3\\ \vdots & & & & & \\ 2,1 & 2,2 & 2,3 & \dots & 2(n-2) & 1(n-2)\\ 1,1 & 1,2 & 1,3 & \dots & 1(n-2) & 1(n-1)\end{bmatrix}.$$

Mit der Definition der inversen Matrix ist auch die Division von Matrizen erklärt. Mit einer nichtsingulären Matrix zu dividieren, heißt, mit ihren Inversen zu multiplizieren, wobei allerdings rechtsseitige und linksseitige Division zu unterscheiden sind. Sind aber der Dividend und der Divisor Polynome derselben Matrix, so ist der Quotient unabhängig von der Reihenfolge und existiert nur dann, wenn der Divisor nicht singulär ist.

§ 4. Um die bei den gleichmäßigen Kettenbrücken anzuwendende Rechnungsmethode vorzubereiten, müssen wir noch einige Sätze über die Eigenwerte und Eigenmatrizen einer symmetrischen Kontinuante vorausschicken.

Eine Spaltenmatrix $\boldsymbol{u}$ wird durch Multiplikation mit einer symmetrischen Matrix $\boldsymbol{A}$ in eine andere Spaltenmatrix $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{u}$ transformiert. Unterscheidet sich diese Transformierte $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{u}$ von $\boldsymbol{u}$ nur in einem skalaren Proportionalitätsfaktor λ, besteht also die Gleichung

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{u} = \lambda\,\boldsymbol{u},$$

so wird λ ein Eigenwert und $\boldsymbol{u}$ die dazu gehörige Eigenmatrix von $\boldsymbol{A}$ genannt. Bezüglich der Existenz und Anzahl solcher Eigenwerte und Eigenmatrizen gilt folgender Satz:

Zu jeder (reellen) symmetrischen Matrix $\boldsymbol{A}$ n-ter Ordnung gehören n Eigenwerte

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$$

und n Eigenmatrizen

$$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots \boldsymbol{u}_n,$$

welche die Gleichungen

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{u}_k = \lambda_k\,\boldsymbol{u}_k \qquad (8)$$

befriedigen.

Ist $\varphi(\boldsymbol{A})$ ein Polynom oder rationale Funktion der Matrix $\boldsymbol{A}$, so hat $\varphi(\boldsymbol{A})$ die Eigenwerte

$$\varphi(\lambda_1), \varphi(\lambda_2), \ldots \varphi(\lambda_n)$$

und dieselben Eigenmatrizen wie $\boldsymbol{A}$. Es gelten also die Gleichungen

$$\varphi(\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{u}_k = \varphi(\lambda_k)\,\boldsymbol{u}_k.$$

Die Eigenmatrizen $\boldsymbol{u}_k$ sind orthogonal, d. h. $\boldsymbol{u}_k{}^* \boldsymbol{u}_h = 0$ für $k \neq h$ und können so normiert werden, daß $\boldsymbol{u}_k{}^* \boldsymbol{u}_k = 1$ sei.

Das System der Eigenmatrizen ist vollständig in dem Sinne, daß jede Spaltenmatrix n-ter Ordnung $\boldsymbol{a}$ als lineare Kombination der Eigenmatrizen $\boldsymbol{u}_k$ mit skalaren Koeffizienten c_k in der Form

$$\boldsymbol{a} = c_1\,\boldsymbol{u}_1 + c_2\,\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\,\boldsymbol{u}_n$$

darstellbar ist.

Die Eigenwerte und Eigenmatrizen sind nur für wenige Matrizen explizit bekannt. Ihre Kenntnis vereinfacht die Lösung des entsprechenden Gleichungssystems ganz bedeutend.

§ 5. Bei dieser knappen Schilderung der Elemente der Matrizenrechnung haben wir die Forderung in den Mittelpunkt gestellt, daß ein lineares Gleichungssystem, bzw. seine Lösung symbolisch in der Form (2) darstellbar sei.

Es wäre aber ein Zerrbild, die praktische Bedeutung der Matrizenrechnung ausschließlich in dieser symbolischen Schreibweise der Lösung zu erblicken.

Erstens zeigt sich die Verwendung der reziproken Matrizen zur numerischen Berechnung der Kettenbrücken nur deshalb besonders geeignet, weil hier überall Kontinuanten auftreten, deren Invertierung eine verhältnismäßig kurze und einfache Rechenaufgabe ist.

Darüber hinaus zeigt sich aber die Leistungsfähigkeit der Matrizenrechnung überall dort, wo man solche Eliminationen und andere Umformungen der linearen Gleichungssysteme vorzunehmen hat, deren Ergebnis in skalarer Schreibweise unübersichtlich oder gar nicht explizit angebbar ist.

§ 6. Um den Zusammenhang zwischen Kontinuanten und linearen Differenzialgleichungen zweiter Ordnung erklären zu können, müssen wir einige einleitende Begriffe vorausschicken.

Hat man eine unendliche Folge von Spalten- (oder Zeilen-) Matrizen

$$\boldsymbol{f}^{(1)}, \boldsymbol{f}^{(2)}, \ldots \boldsymbol{f}^{(n)}, \ldots,$$

wo der obere Index die Ordnung der Matrizen angibt, so kann man jede dieser Matrizen graphisch darstellen, indem man den Abszissen $\frac{L}{n+1}, \frac{2L}{n+2}, \cdots \frac{nL}{n+1}$ ($L>0$ sonst beliebig) die Elemente $f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \ldots f_n^{(n)}$ von $\boldsymbol{f}^{(n)}$ als Ordinaten entsprechen läßt. Es kann vorkommen, daß die auf diese Weise gewonnenen Punktgruppen bei unendlich wachsendem n sich zu einer stetigen Kurve verdichten. In diesem Falle werden wir sagen, daß der Limes der Matrizenfolge eine stetige Funktion einer Variablen ist. Genauer:

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{f}^{(n)} = f(x), \text{ wenn für jedes } x \text{ aus } (0, L) \lim_{\substack{n\to\infty \\ \frac{kL}{n}\to x}} f_k^{(n)} = f(x).$$

In derselben Weise kann eine unendliche Folge $\boldsymbol{G}^{(n)}$ von quadratischen Matrizen zu einer in $0<x,y<L$ definierten stetigen Funktion $G(x,y)$ von zwei Variabeln konvergieren.

Eine Folge von Matrizenprodukten geht bei dem entsprechend normierten Grenzübergang in ein bestimmtes Integral über. In der Tat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L}{n} \boldsymbol{g}^{(n)} * \boldsymbol{f}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} g_k^{(n)} f_k^{(n)} \frac{L}{n} = \int_0^L g(x) f(x)\, dx$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L}{n} \boldsymbol{G}^{(n)} \boldsymbol{f}^{(n)} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \frac{kL}{n}\to x}} \sum_{k=1}^{n} G_{hk}^{(n)} f_k^{(n)} \frac{L}{n} = \int_0^L G(x,\xi) f(\xi)\, d\xi. \tag{9}$$

Wie man sieht, ist der Limes einer Matrizenproduktfolge nicht das Produkt der beiden Grenzfunktionen, sondern deren Produktintegral.

Die Universalität der Matrizenrechnung zeigt sich auch darin, daß nicht nur das Integral, sondern auch der Differentialquotient als Limes einer Matrizenproduktfolge darstellbar ist. Wird nämlich die Spaltenmatrix $\boldsymbol{f}^{(n)}$, deren Elemente die Werte $f\left(\frac{L}{n+1}\right), f\left(\frac{2L}{n+1}\right) \cdots f\left(\frac{nL}{n+1}\right)$ einer in 0 und L verschwindenden Funktion $f(x)$ sind, mit der Kontinuante $-\frac{n^2}{L^2}\boldsymbol{C}_0^{(n)}$ multipliziert, so erhält man

$$-\frac{n^2}{L^2}\boldsymbol{C}_0^{(n)}\boldsymbol{f}^{(n)} =$$

$$= -\frac{n^2}{L^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f\left(\frac{L}{n}\right) \\ f\left(\frac{2L}{n}\right) \\ \vdots \end{bmatrix} = \frac{1}{\left(\frac{L}{n}\right)^2}\begin{bmatrix} f\left(\frac{0}{n}\right) - 2f\left(\frac{L}{n}\right) + f\left(\frac{2L}{n}\right) \\ f\left(\frac{L}{n}\right) - 2f\left(\frac{2L}{n}\right) + f\left(\frac{3L}{n}\right) \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Die Elemente der Produktmatrix sind also die zweiten Differenzenquotienten der Funktion $f(x)$. Ist nun $f(x)$ zweimal stetig differenzierbar, so wird im obigen Sinne

$$\lim \frac{n^2}{L^2}\boldsymbol{C}_0^{(n)}\boldsymbol{f}^{(n)} = -\frac{d^2 f(x)}{dx^2}.$$

§ 7. Nach diesen Vorbereitungen kann man die eingangs erwähnte Analogie zwischen reziproker Matrix und GREENscher Funktion leicht illustrieren.

Man betrachte das Gleichungssystem

$$\frac{n}{L}\boldsymbol{C}_0\boldsymbol{y} = \boldsymbol{q}\frac{L}{n} \tag{10}$$

oder ausführlicher geschrieben

$$\frac{-y_{i-1} + 2y_i - y_{i+1}}{\frac{L}{n}} = q_i\frac{L}{n}; \quad i = 1, 2, \dots n-1; \quad y_0 = y_n = 0.$$

Die Lösung lautet

$$\boldsymbol{y} = \frac{L}{n}\boldsymbol{C}_0^{-1}\boldsymbol{q}\cdot\frac{L}{n} \tag{11}$$

oder mit Benützung der in I. (7) angegebenen Form der Inverse $\boldsymbol{C}_0^{-1}$

$$y_i = \sum_{j=1}^{n-1} g_{ij} q_j \frac{L}{n} \quad \text{mit} \quad g_{ij} = \begin{cases} \frac{L}{n}\frac{i(n-j)}{n} & \text{für } i \leqq j \\ \frac{L}{n}\frac{j(n-i)}{n} & \text{für } i \geqq j \end{cases} \quad i,j = 0,1,2,\dots n.$$

Diese Gleichung bestimmt (siehe Abschnitt II. § 2) die Gleichgewichtsgestalt einer zwischen $x=0$ und $x=L$ ausgespannten Saite, deren Punkte

$x=\frac{L}{n}, \frac{2L}{n}, \ldots \frac{(n-1)L}{n}$ mit den transversalen Kräften $q_1\frac{L}{n}, q_2\frac{L}{n}, \ldots q_{n-1}\frac{L}{n}$ belastet sind.

Wird nun in der Gleichung (10), welche man auch in der Form $\frac{n^2}{L^2}\boldsymbol{C}_0\boldsymbol{y}=\boldsymbol{q}$ schreiben kann, der Grenzübergang $n\to\infty$ durchgeführt, so erhält man

$$-\frac{d^2y}{dx^2}=q(x), \tag{12}$$

also die Differentialgleichung einer Saite, auf welche die stetig verteilte Last $q(x)$ wirkt. Bei demselben Grenzprozeß geht aber die Inverse $\frac{1}{n}\boldsymbol{C}_0^{-1}$ über in

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \frac{iL}{n}\to x \\ \frac{jL}{n}\to\xi}} \begin{cases} \dfrac{\frac{iL}{n}\left(L-\frac{jL}{n}\right)}{L}=\dfrac{x(L-\xi)}{L} & \text{für } x\leqq\xi, \\ \dfrac{\frac{jL}{n}\left(L-\frac{iL}{n}\right)}{L}=\dfrac{\xi(L-x)}{L} & \text{für } x\geqq\xi, \end{cases}$$

d. h. in die bekannte GREENsche Funktion $G(x,\xi)$ der Differentialgleichung (10) (Einflußfunktion der gespannten Saite). Gleichzeitig wird aus (11) nach (9)

$$y(x)=\int_0^L G(x,\xi)\,q(\xi)\,d\xi; \qquad y(0)=y(L)=0.$$

§ 8. In der üblichen Theorie der Kabelbrücken treten lineare, inhomogene Differentialgleichungen zweiter und vierter Ordnung auf, welche im Falle eines Balkens mit variablem Querschnittsträgheitsmoment variable Koeffizienten haben. Die eine Lösungsmethode verwendet die zu der Differentialgleichung

$$-\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda\rho(x)y=q(x) \tag{13}$$

und zu den Randbedingungen

$$y(0)=y(L)=0 \tag{14}$$

gehörende GREENsche Funktion $G(x,\xi;\lambda)$. $\rho(x)$ ist hier, von einem konstanten Proportionalitätsfaktor abgesehen, das reziproke Querschnittsträgheitsmoment an der Stelle x und man hat bei einer symmetrischen Brücke von der Länge $L\rho(x)=\rho(L-x)$. In diesem Falle läßt sich die GREENsche Funktion $G(x,\xi;\lambda)$ aus einer einzigen Partikularlösung der entsprechenden homogenen Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\lambda\rho(x)y=0 \tag{15}$$

folgendermaßen konstruieren:

Es sei $u(x;\lambda)$ die durch die Anfangsbedingungen $u(0;\lambda)=0, u_x^1(0;\lambda)=1$ eindeutig bestimmte Lösung von (15) und es sei $u(L;\lambda)\neq 0$. Dann ist die GREENsche Funktion

$$G(x,\xi;\lambda) = \begin{cases} \dfrac{u(x;\lambda)\,u(L-\xi;\lambda)}{u(L;\lambda)} & x \leqq \xi \\[2ex] \dfrac{u(\xi;\lambda)\,u(L-x;\lambda)}{u(L;\lambda)} & x \geqq \xi \end{cases}$$

und die den Randbedingungen (14) genügende Lösung von (13) lautet

$$y(x) = \int_0^L G(x,\xi;\lambda)\,q(\xi)\,d\xi.$$

§ 9. In der vorliegenden Arbeit wird eine Theorie der Kettenbrücken begründet, in welcher lineare algebraische Gleichungen mit doppelt-symmetrischer Kontinuante eine hervorragende Rolle spielen. Diese Gleichungen haben — mit Matrizensymbolen geschrieben — folgende Form

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -b_1 & a_2 & -b_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 & a_3 & -b_3 \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & -b_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -b_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_{n-2} \\ q_{n-1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{q}.$$

Hier ist wegen der Symmetrie der Brücke $a_k = a_{n-k}$; $b_k = b_{n-k-1}$. Für die numerische Berechnung der zur Herstellung der Lösung $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{q}$ notwendigen Inverse $\boldsymbol{C}^{-1}$ werden wir hier eine praktisch anwendbare Rechnungsvorschrift angeben, welche die oben illustrierte Analogie zwischen reziproker Matrix und GREENscher Funktion ausnützt.

Man berechne die durch die Anfangsbedingungen $u_0 = 0$; $u_1 = 1$ eindeutig bestimmte Lösung des homogenen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a_1 u_1 - b_1 u_2 &= 0 \\ -b_1 u_1 + a_2 u_2 - b_2 u_3 &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ -b_{n-3} u_{n-3} + a_{n-2} u_{n-2} - b_{n-2} u_{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

mit Hilfe der Rekursionsformeln

$$u_{k+1} = \frac{a_k u_k - b_{k-1} u_{k-1}}{b_k} \quad (k = 1, 2, \dots n-1), \tag{16}$$

und es sei

$$u_n = a_{n-1} u_{n-1} - b_{n-2} u_{n-2} \neq 0.$$

Dann sind die Elemente g_{ij} der Inverse $\boldsymbol{C}^{-1}$

$$g_{ij} = \begin{cases} \dfrac{u_i u_{n-j}}{u_n} & i \leqq j \\[2ex] \dfrac{u_j u_{n-i}}{u_n} & i \geqq j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots n-1, \tag{17}$$

und die Lösung des Gleichungssystems ist

$$y_i = \sum_{j=1}^{n-1} g_{ij} q_j \qquad i = 1, 2, \ldots n-1. \tag{18}$$

Bei einem kritischen Vergleich der infinitesimalen und der finiten Methoden hat man zu berücksichtigen, daß die wirkliche Herstellung der Lösung $u(x;\lambda)$ der homogenen Differentialgleichung (15) bei variablem $\rho(x)$ immer unendliche Prozesse, z. B. Reihenentwicklung nach λ erfordert, während zur Lösung des entsprechenden homogenen algebraischen Gleichungssystems nur eine endliche Anzahl von arithmetischen Grundoperationen nötig ist.

Abschnitt II [2]

Gleichgewicht einer Kette

§ 1. Befindet sich eine (in einer vertikalen Ebene liegende) n-gliedrige Kette $A_0 A_1 \ldots A_n$, deren k-tes Gelenk A_k die Koordinaten (x_k, y_k) besitzt und durch die vertikale Kraft q_k belastet ist, im Gleichgewicht, so müssen zwischen den Spannungen $t_{k-1,k}$, den Koordinaten und den Kräften die folgenden Zusammenhänge bestehen

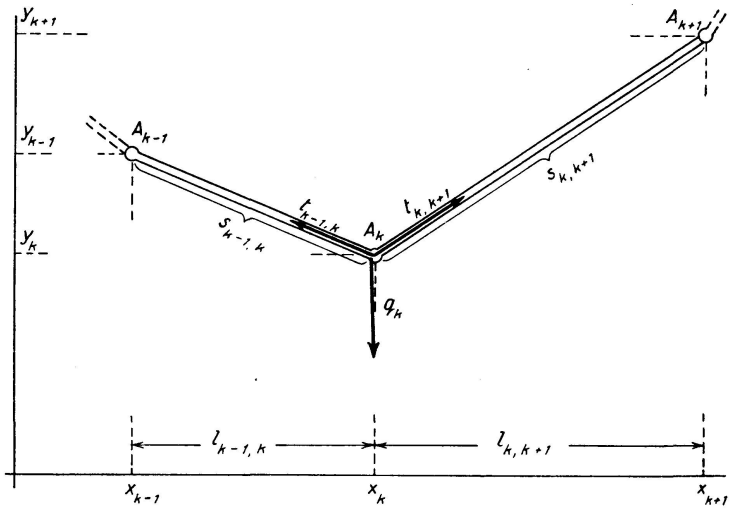

Fig. 1

$$t_{k-1,k}\frac{x_{k-1}-x_k}{s_{k-1,k}} + t_{k,k+1}\frac{x_{k+1}-x_k}{s_{k,k+1}} = 0, \tag{1}$$

$$t_{k-1,k}\frac{y_{k-1}-y_k}{s_{k-1,k}} + t_{k,k+1}\frac{y_{k+1}-y_k}{s_{k,k+1}} + q_k = 0. \tag{2}$$

Aus der Gleichung (1) folgt, daß die horizontale Komponente $t_{k,k+1}\frac{x_{k+1}-x_k}{s_{k,k+1}}$ der Zugspannung längs der ganzen Kette konstant ist, d. h.

$$\frac{x_1-x_0}{s_{01}}t_{01} = \frac{x_2-x_1}{s_{12}}t_{12} = \cdots = \frac{x_n-x_{n-1}}{s_{n-1,n}}t_{n-1,n} = h.$$

Werden die Größen $\frac{t_{k,k+1}}{s_{k,k+1}}$ mit Hilfe von (3) aus den Gleichungen (2) eliminiert, so erhält man

$$h\left(\frac{y_{k+1}-y_k}{x_{k+1}-x_k}-\frac{y_k-y_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}\right)+q_k=0. \tag{4}$$

Wir wollen von nun an die Längen der Horizontalprojektion der einzelnen Glieder, d. h. die Größen $x_{k+1}-x_k$ mit $l_{k,k+1}$ bezeichnen. Dann nehmen die Gleichgewichtsgleichungen der Kette folgende Form an

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{l_{01}}y_0+\left(\frac{1}{l_{01}}+\frac{1}{l_{12}}\right)y_1-\frac{1}{l_{12}}y_2 \qquad\qquad &= q_1\\
-\frac{1}{l_{12}}y_1+\left(\frac{1}{l_{12}}+\frac{1}{l_{23}}\right)y_2-\frac{1}{l_{23}}y_3 \qquad &= q_2\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\\
-\frac{1}{l_{n-2,n-1}}y_{n-2}+\left(\frac{1}{l_{n-2,n-1}}+\frac{1}{l_{n-1,n}}\right)y_{n-1}-\frac{1}{l_{n-2,n}}y_n &= q_{n-1}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Werden die Randwerte y_0 und y_n beliebig vorgeschrieben, so sind die übrigen Ordinaten $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ durch die Gleichungen (5) eindeutig bestimmt. Im folgenden werden wir nur den Fall

$$y_0 = y_n = 0 \tag{6}$$

betrachten. Führen wir die symmetrische Kontinuante $\boldsymbol{C}$ und die Spaltenmatrizen $\boldsymbol{y}$ und $\boldsymbol{q}$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}
\frac{1}{l_{01}}+\frac{1}{l_{12}} & -\frac{1}{l_{12}} & \cdots & 0\\
-\frac{1}{l_{12}} & \frac{1}{l_{12}}+\frac{1}{l_{23}} & \cdots & 0\\
\vdots & & & \\
0 & 0 & \cdots & \frac{1}{l_{n-2,n-1}}+\frac{1}{l_{n-1,n}}
\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_{n-1}\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{q}=\begin{bmatrix} q_1\\ q_2\\ \vdots\\ q_{n-1}\end{bmatrix} \tag{7}$$

ein, so kann man die Gleichgewichtsgleichungen (5) *und* die Randbedingungen (6) in die folgende Matrizengleichung zusammenfassen

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}=\frac{1}{h}\boldsymbol{q}. \tag{8}$$

Hieraus erhält man die Gelenkordinaten y_k als Funktionen der belastenden Kräfte q_k unmittelbar

$$\boldsymbol{y}=\frac{1}{h}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{q}. \tag{9}$$

Man verifiziert leicht, daß die hier auftretende reziproke Matrix folgende explizite Form hat

$$\boldsymbol{C}^{-1} = \frac{1}{l_{0n}} \begin{bmatrix} l_{01} l_{1n} & l_{01} l_{2n} & \dots & l_{01} & l_{n-1,n} \\ l_{01} l_{2n} & l_{02} l_{2n} & \dots & l_{02} & l_{n-1,n} \\ \vdots & & & & \\ l_{01} l_{n-1,n} & l_{02} l_{n-1,n} & \dots & l_{0,n-1} & l_{n-1,n} \end{bmatrix}, \tag{10}$$

wo $l_{ij}\,(i<j)$ die Länge $l_{i,i+1}+l_{i+1,i+2}+\dots l_{j-1,j}$ bedeutet.

Multipliziert man beide Seiten der Gleichung (8) von links mit der Zeilenmatrix $\boldsymbol{e}^*=[1, 1, \dots 1]$, so ergibt sich

$$\frac{y_1}{l_{01}} + \frac{y_{n-1}}{l_{n-1,n}} = \boldsymbol{e}^* \boldsymbol{C}\boldsymbol{y} = \frac{1}{h}\boldsymbol{e}^* \boldsymbol{q} = \frac{q_1+q_2+\dots+q_{n-1}}{h}.$$

Diese Gleichung bringt das Verhältnis der Gesamtbelastung zur Horizontalspannung mit den Neigungen der Randkettenglieder in Zusammenhang.

§ 2. Sind alle vertikalen Kräfte gleich und äquidistant, also

$$q_1 = q_2 = \dots q_{n-1} = q$$
$$l_{01} = l_{12} = \dots l_{n-1,n} = l$$

so wird

$$\boldsymbol{C} = \frac{1}{l}\boldsymbol{C}_0 = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 \dots & -1 \quad 2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{q} = q\boldsymbol{e} = q \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

und nach (8) (9) (10)

$$\boldsymbol{y} = \frac{l}{h}\boldsymbol{C}_0^{-1} q\boldsymbol{e} = \frac{lq}{2h} \begin{bmatrix} 1\,(n-1) \\ 2\,(n-2) \\ \vdots \\ (n-1)\,1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

d. h. sämtliche Kettengelenke liegen auf der Parabel

$$y = \frac{q}{2hl} x\,(nl-x).$$

Das Verhältnis der Gesamtlast $(n-1)q$ zur Horizontalspannung h wird jetzt

$$\frac{(n-1)q}{h} = \frac{y_1+y_{n-1}}{l} = \frac{2y_1}{l}.$$

Das tiefste Gelenk, bzw. Gelenkpaar hat nach (11) die Ordinate

$$= \frac{q}{h}\frac{n^2-1}{8} l \qquad \text{für ungerades } n$$

$$= \frac{q}{h}\frac{n^2}{8} l \qquad \text{für gerades } n.$$

Im Abschnitt I haben wir schon gezeigt, daß die Elemente der Matrizenprodukte $-\boldsymbol{C}_0\boldsymbol{y}$ die zweiten Differenzen der Zahlenfolge

$$0, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}, 0$$

sind. Setzt man nun in (8)

$$n\,l = L, \qquad \boldsymbol{C} = \frac{n}{L}\boldsymbol{C}_0, \qquad q_k = q\left(\frac{k\,L}{n}\right)\cdot\frac{L}{n}$$

($q(x)$ soll hier die auf die Längeneinheit entfallende stetige Belastung bedeuten), so erhält man die Gleichung

$$\frac{n}{L}\boldsymbol{C}_0\boldsymbol{y} = \frac{1}{h}\boldsymbol{q}\frac{L}{n}$$

und hieraus durch den Grenzübergang $n \to \infty, l = \frac{L}{n} \to 0$ die bekannte Differentialgleichung

$$-\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{h}q(x), \tag{12}$$

welche die Gleichgewichtsgestalt eines Seiles unter der Wirkung der stetig verteilten Last $q(x)$ bestimmt.

Gleichgewicht eines Balkens

§ 3. Wir betrachten einen geraden elastischen Balken, welcher im unbelasteten Zustande mit der Strecke $(0, L)$ der x-Achse zusammenfällt und in seinen Endpunkten gestützt ist. Der Balken soll durch die Punkte

$$(0=)\,x_0 < x_1 < x_2 < \ldots x_{n-1} < x_n\,(=L)$$

in die Teile (x_k, x_{k+1}) mit den Längen $l_{k,k+1} = x_{k+1} - x_k$ eingeteilt sein. Das Querschnittsträgheitsmoment des Teiles sei $J_{k,k+1}$ und der Elastizitätsmodul des Balkenstoffes E.

Befindet sich dieser Balken unter der Wirkung der in den Teilungspunkten x_k angreifenden transversalen Kräfte q_k im Gleichgewicht, so müssen zwischen den in diesen Punkten auftretenden Biegungsspannungen m_k, den Durchbiegungen v_k und den Kräften q_k die folgenden Zusammenhänge bestehen

$$\frac{v_{k+1}-v_k}{l_{k,k+1}} - \frac{v_k - v_{k-1}}{l_{k-1,k}} + \frac{1}{6E}\left\{\frac{l_{k,k+1}}{J_{k,k+1}}m_{k+1} + 2\left(\frac{l_{k,k+1}}{J_{k,k+1}} + \frac{l_{k-1,k}}{J_{k-1,k}}\right)m_k + \frac{l_{k-1,k}}{J_{k-1,k}}m_{k-1}\right\} = 0, \tag{13}$$

$$\frac{m_{k+1}-m_k}{l_{k,k+1}} - \frac{m_k - m_{k-1}}{l_{k-1,k}} + q_k = 0. \tag{14}$$

Werden nun neben den Matrizen (7) die „Biegsamkeitsmatrix" $\boldsymbol{K}$ und die Spaltenmatrizen $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{K}=\frac{1}{6\,E}\begin{bmatrix} 2\left(\frac{l_{01}}{J_{01}}+\frac{l_{12}}{J_{12}}\right) & \frac{l_{12}}{J_{12}} & \cdots \\ \frac{l_{12}}{J_{12}} & 2\left(\frac{l_{12}}{J_{12}}+\frac{l_{23}}{J_{23}}\right) & \cdots \\ \vdots & & \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{m}=\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{bmatrix} \tag{15}$$

eingeführt, so lassen sich die Gleichgewichtsgleichungen (13, 14) *und* die den gestützten Enden entsprechenden Randbedingungen

$$y_0=y_n=0,\quad m_0=m_n=0 \tag{16}$$

in die folgenden Matrizengleichungen zusammenfassen

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{m}, \tag{17}$$

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{m}=\boldsymbol{q}. \tag{18}$$

Durch Elimination von $\boldsymbol{m}$ erhält man aus diesen Gleichungen den direkten Zusammenhang zwischen den Durchbiegungen y_k und den transversalen Kräften q_k in der folgenden Form

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{q}$$

bzw.

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{q}.$$

§ 4. Bei einer gleichmäßigen Kettenbrücke hat der Balken ein konstantes Querschnittsträgheitsmoment und ist in gleiche Teile geteilt:

$$l_{01}=l_{12}=\cdots l_{n-1,n}=l;\qquad \boldsymbol{C}=\frac{1}{l}\boldsymbol{C}_0;\qquad J_{01}=J_{12}=\cdots=J.$$

Die Biegsamkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ kann in diesem Falle durch $\boldsymbol{C}_0$ und die Einheitsmatrix $\boldsymbol{E}$ ausgedrückt werden

$$\boldsymbol{K}=\frac{l}{EJ}\begin{bmatrix} \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & \cdots \\ \vdots & & & \end{bmatrix}=\frac{l}{EJ}\left(\boldsymbol{E}-\frac{1}{6}\boldsymbol{C}_0\right).$$

Werden diese Werte von $\boldsymbol{K}$ und $\boldsymbol{C}$ in die Gleichungen (13) (14) eingeführt, so vereinfachen sich diese zu

$$\frac{EJ}{l^2}\boldsymbol{C}_0\boldsymbol{v}=\left(\boldsymbol{E}-\frac{1}{6}\boldsymbol{C}_0\right)\boldsymbol{m},$$

$$\frac{1}{l}\boldsymbol{C}_0\boldsymbol{m}=\boldsymbol{q}.$$

Wird in diesen Matrizengleichungen der in Abschnitt I, § 6, näher beschriebene Grenzübergang für $l=\frac{L}{n}$, L fest, $n\to\infty$ durchgeführt, so ergeben sich die bekannten Differentialgleichungen [3]

$$-EJ\frac{d^2v(x)}{dx^2} = m(x), \tag{19}$$

$$-\frac{d^2m(x)}{dx^2} = q(x) \tag{20}$$

des stetig belasteten Balkens, wo $v(x)$, $m(x)$ bzw. $q(x)$ die Durchbiegung, Biegungsspannung bzw. die spezifische Last an der Stelle x bedeuten.

Abschnitt III

Die Grundgleichungen einer zweigliedrigen Kettenbrücke und ihre Lösungen

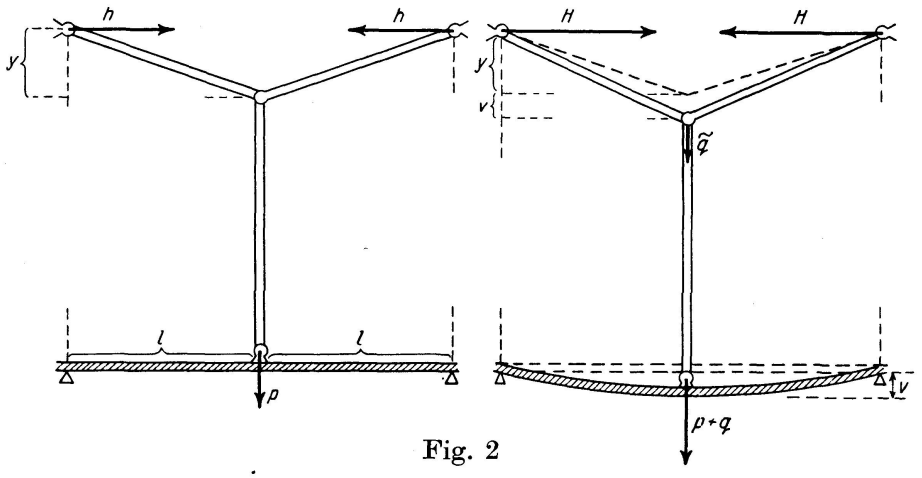

Fig. 2

§ 1. Die hier zu betrachtende Kettenbrücke besteht aus zwei Gliedern, aus einem Hängestabe und aus einem gestützten Balken.

Fig. 1 stellt denjenigen Zustand dar, in welchem die Kette bloß die tote Last p (welche von der Kollinearität des Balkenmittelpunktes und den Unterstützungspunkten herrührt) trägt. In diesem Zustande lautet die Gleichgewichtsgleichung der Kette nach II (8)

$$\frac{2}{l}y = \frac{1}{h}p. \tag{1}$$

Nun sei der Balken in der Mitte mit der transversalen Kraft (lebende Last) q belastet (Fig. 2). Die Kette wird einen Teil $\tilde{q}$ der Last tragen und die Horizontalkomponente ihrer Spannung wird sich zu H ändern. In diesem Zustande wird die Gleichgewichtsgleichung

$$\frac{2}{l}(y+v) = \frac{1}{H}(p+\tilde{q}). \tag{2}$$

Durch Subtraktion der Gleichungen (1)(2) erhält man die Verschiebungsgleichung der Kette

$$\frac{2}{l}v = \frac{1}{H}\left(\tilde{q} - \frac{H-h}{h}p\right). \tag{3}$$

Der Balken trägt die Last $q-\tilde{q}$; die Biegungsspannung in der Mitte wird also

$$m = \frac{(q-\tilde{q})\,l}{2} \tag{4}$$

und die Durchbiegung

$$v = \frac{(q-\tilde{q})\,l^3}{6\,E\,J}. \tag{5}$$

Eliminiert man $\tilde{q}$ aus den Gleichungen (3) (4), so ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen der Biegungsspannung, Durchbiegung und Belastung

$$\frac{2}{l}m + \frac{2\,H}{l}v = q - \frac{H-h}{h}p. \tag{6}$$

Eliminiert man aber $q-\tilde{q}$ aus den Gleichungen (4) (5), dann bekommt man den Zusammenhang zwischen der Biegungsspannung und Durchbiegung

$$\frac{2}{l}v = \frac{4\,l}{6\,E\,J}m. \tag{7}$$

Wird der hieraus entnommene Wert von v in (6) eingesetzt, so erhält man die „Spannungsgleichung" der Brücke

$$\left(\frac{2}{l} + H\frac{4\,l}{6\,E\,J}\right)m = q - \frac{H-h}{h}p \tag{8}$$

und die explizite Formel für die Biegungsspannung

$$m = \frac{q - \frac{H-h}{h}p}{\frac{2}{l} + H\frac{4\,l}{6\,E\,J}}. \tag{9}$$

Die durch die Unterstützung der Kette hervorgerufene Abnahme der Biegungsspannung wird klar erkennbar, wenn man die Gleichung (9) mit der aus (4) bei Abwesenheit der Kette folgenden Gleichung

$$m = \frac{q}{\frac{2}{l}}$$

vergleicht.

Wird endlich der aus (7) entnommene Wert von m in (6) eingesetzt, so ergibt sich die „Verschiebungsgleichung" der Brücke

$$\left(\frac{6\,E\,J}{l^3} + \frac{2\,H}{l}\right)v = q - \frac{H-h}{h}p \tag{10}$$

und die explizite Formel für die Durchbiegung

$$v = \frac{q - \frac{H-h}{h} p}{\frac{6EJ}{l^3} + \frac{2H}{l}}. \tag{11}$$

Ein Vergleich dieser Formel mit (5) zeigt die durch die Kettenunterstützung herrührende Abnahme der Durchbiegung.

Der Ausdruck (11) für die Durchbiegung kann auch in der Form

$$v = \frac{1}{H}\left\{\left(\frac{2}{l}\right)^{-1} - \left(\frac{2}{l} + H\frac{4l}{6EJ}\right)^{-1}\right\}\left(q - \frac{H-h}{h} p\right) \tag{12}$$

geschrieben werden, welche sich später als besonders geeignet und verallgemeinerungsfähig erweisen wird.

§ 2. Alle unsere Formeln enthalten die bis jetzt unbekannte, veränderte Horizontalspannung H. Zu ihrer Berechnung muß man die Dehnungsverhältnisse der Kettenglieder in Betracht ziehen.

Die relative Dehnung der Kettenglieder bei der vertikalen Verschiebung v des Gelenkes ist (bei Vernachlässigung kleiner Größen höherer Ordnung)

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{\sqrt{l^2 + (y+v)^2} - \sqrt{l^2 + y^2}}{\sqrt{l^2 + y^2}} = \frac{yv}{s^2}$$

oder mit Benützung des aus (1) sich ergebenden Wertes von y

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{plv}{2hs^2}. \tag{13}$$

Andererseits ist die totale Spannungszunahme in den Gliedern: $(H-h)\frac{s}{l}$. Die Dehnungsgleichung lautet also

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{H-h}{EF}\frac{s}{l}, \tag{14}$$

wo F den Querschnittsflächeninhalt der Glieder bedeutet. Aus den Gleichungen (13) (14) folgt

$$v = \frac{h(H-h)}{pEF} 2\frac{s^3}{l^2}. \tag{15}$$

Wird endlich v aus den Gleichungen (11) (15) eliminiert, so erhält man die eingangs erwähnte Gleichung zweiten Grades

$$\frac{q - \frac{H-h}{h} p}{6\frac{EJ}{l^3} + 2\frac{H}{l}} = \frac{h(H-h)}{pEF} 2\frac{s^3}{l^2}. \tag{16}$$

Diese Bestimmungsgleichung für H hat bei positivem q immer genau eine Wurzel, welche größer als h ist.

Abschnitt IV

Die Matrizengleichungen einer n-gliedrigen Kettenbrücke und ihre Lösungen

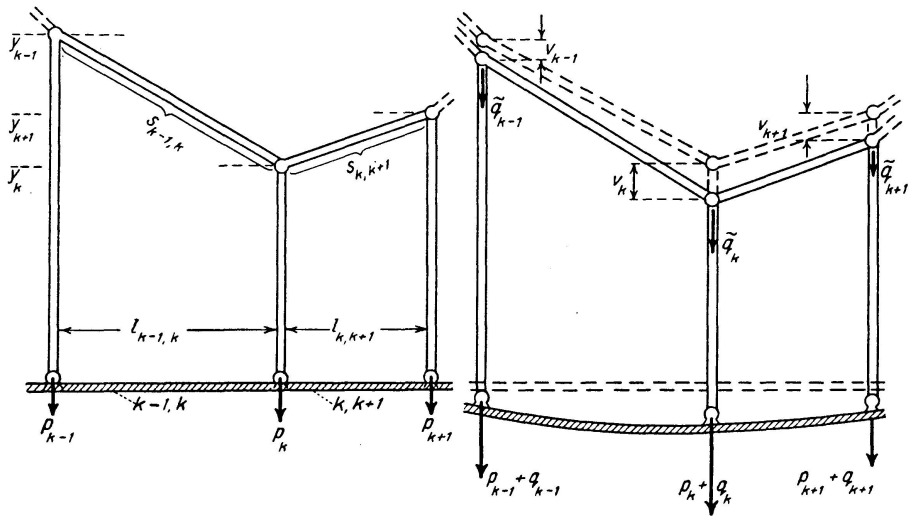

Fig. 3

§ 3. Betrachten wir jetzt eine Kettenbrücke, welche aus n Kettengliedern, $n-1$ Hängestäben und einem gestützten Balken besteht. Wir bezeichnen

die Längen der Balkenteile mit $l_{01}, l_{12}, \ldots l_{n-1,n}$

die Querschnittsträgheitsmomente $J_{01}, J_{12}, \ldots J_{n-1,n}$

die Längen der Kettenglieder mit $s_{01}, s_{12}, \ldots s_{n-1,n}$

die Ordinaten der Kettengelenke $y_0 = 0$; $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$; $y_n = 0$

die zur Erhaltung der Kollinearität der Balkenknotenpunkte notwendigen, als tote Last wirkenden Kräfte auf die einzelnen Kettengelenke mit $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$.

Es bestehen wegen der Symmetrie der Brücke die Gleichungen

$$\begin{aligned} l_{k-1,k} &= l_{n-k,\,n-k+1} & p_k &= p_{n-k} \\ J_{k-1,k} &= J_{n-k,\,n-k+1} & y_k &= y_{n-k}. \\ s_{k-1,k} &= s_{n-k,\,n-k+1} \end{aligned}$$

Ist die Kette unter der Wirkung der toten Last im Gleichgewicht, so muß nach II (8) die Gleichung

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{y} = \frac{1}{h}\boldsymbol{p} \tag{1}$$

bestehen, wo $\boldsymbol{C}$ und $\boldsymbol{y}$ die in II (7) eingeführten Matrizen, $\boldsymbol{p}$ die Spaltenmatrix der toten Last und h die anfängliche Horizontalspannung bedeuten.

Nun sei der Balken in seinen Knotenpunkten mit den vertikalen Kräften (lebende Last)

$$q_1, q_2, \cdots q_{n-1} \qquad \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n-1} \end{bmatrix}$$

belastet.

Die Kette wird einen Teil $\tilde{\boldsymbol{q}}$ der Last tragen, ihre Gelenke werden die vertikalen Verschiebungen $\boldsymbol{v}$ erleiden und die Horizontalkomponente ihrer Spannung wird sich zu H ändern.

In diesem Zustande wird die Gleichgewichtsgleichung

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}) = \frac{1}{H}(\boldsymbol{p}+\tilde{\boldsymbol{q}}). \tag{2}$$

Durch Subtraktion der Gleichungen (1) (2) erhält man die Verschiebungsgleichung der Kette

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{v} = \frac{1}{H}\left(\tilde{\boldsymbol{q}} - \frac{H-h}{h}\boldsymbol{p}\right). \tag{3}$$

Jetzt wollen wir die für den Balken im Abschnitt II angeführten Gleichgewichtsgleichungen anwenden.

Der Balken trägt die Last $\boldsymbol{q}-\tilde{\boldsymbol{q}}$ und die davon herrührende Biegungsspannungsmatrix $\boldsymbol{m}$ wird nach II (8) bestimmt durch die Gleichung

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{m} = \boldsymbol{q}-\tilde{\boldsymbol{q}}. \tag{4}$$

Zwischen der Verschiebungsmatrix $\boldsymbol{v}$ und der Biegungsspannungsmatrix $\boldsymbol{m}$ besteht nach II (17) die Gleichung

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{m}. \tag{5}$$

Eliminiert man $\tilde{\boldsymbol{q}}$ aus den Gleichungen (3) und (4), so ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen Biegungsspannung, Durchbiegung und Belastung

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{m}+H\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{q}-\frac{H-h}{h}\boldsymbol{p}. \tag{6}$$

Wird der aus (5) entnommene Wert von $\boldsymbol{C}\boldsymbol{v}$ in (6) eingesetzt, so erhält man die Spannungsgleichung der Brücke

$$(\boldsymbol{C}+H\boldsymbol{K})\boldsymbol{m} = \boldsymbol{q}-\frac{H-h}{h}\boldsymbol{p} \tag{8}$$

und die explizite Formel für die Biegungsspannung

$$\boldsymbol{m} = (\boldsymbol{C}+H\boldsymbol{K})^{-1}\left(\boldsymbol{q}-\frac{H-h}{h}\boldsymbol{p}\right). \tag{9}$$

Wird endlich der aus (5) entnommene Wert $\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{v}$ von $\boldsymbol{m}$ in (6) eingesetzt, so ergibt sich die Verschiebungsgleichung der Brücke

$$(\boldsymbol{C}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{C}+H\boldsymbol{C})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{q}-\frac{H-h}{h}\boldsymbol{p}. \tag{10}$$

Die Ausrechnung und scheinbar auch das Invertieren der Faktormatrix von $\boldsymbol{v}$ ist äußerst schwerfällig. Man kann aber eine zu (12) analoge Auflösungsformel gewinnen. Es bestehen nämlich die Identitäten

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{C}+H\boldsymbol{C})^{-1} &= \{\boldsymbol{C}\boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{C}+H\boldsymbol{K})\}^{-1} = \\ &= (\boldsymbol{C}+H\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{C}^{-1} = \frac{1}{H}\{\boldsymbol{C}^{-1}-(\boldsymbol{C}+H\boldsymbol{K})^{-1}\}.\end{aligned} \tag{11}$$

Die gebrauchsfertige explizite Formel für die Durchbiegung ist also

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{H}\{\boldsymbol{C}^{-1}-(\boldsymbol{C}+H\boldsymbol{K})^{-1}\}\left(\boldsymbol{q}-\frac{H-h}{h}\boldsymbol{p}\right). \tag{12}$$

Vergleicht man die Formeln (9) und (12), so sieht man, daß nach Berechnung der Biegungsspannung $\boldsymbol{m}$ die Berechnung der Durchbiegung $\boldsymbol{v}$ eine besonders einfache Aufgabe ist, weil die dann noch nötige reziproke Matrix $\boldsymbol{C}^{-1}$ in II (10) explizit angegeben ist.

Wendet man die in diesem § abgeleiteten Formeln auf eine Brücke mit einem einzigen Hängestab an, so werden sämtliche Matrizen skalare Größen, und zwar wegen der Symmetrie der Brücke

$$\boldsymbol{C} = \frac{2}{l}, \qquad \boldsymbol{K} = \frac{4}{6}\frac{l}{EJ}.$$

Die Gleichungen (1) bis (12) dieses Paragraphen gehen in die gleichbezeichneten Gleichungen des § 1 über. Damit haben wir gezeigt, daß die Gleichungen der n-gliedrigen Brücke aus den elementaren skalaren Gleichungen des § 1 durch Substitution von entsprechenden Matrizen gewonnen werden können.

Analog verläuft die Aufstellung der Bestimmungsgleichung für H.

Sind die Koordinaten des k-ten Kettengelenkes vor bzw. nach der Belastung (x_k, y_k) bzw. (x_k+u_k, y_k+v_k), so bestimmt sich die Zunahme $\Delta s_{k,k+1}$ von $s_{k,k+1}$ durch die Gleichung

$$\begin{aligned}(s_{k,k+1}+\Delta s_{k,k+1})^2 - s_{k,k+1}^2 &= (x_{k+1}+u_{k+1}-x_k-u_k)^2+(y_{k+1}+v_{k+1}-y_k-v_k)^2- \\ &\quad -(x_{k+1}-x_k)^2-(y_{k+1}-y_k)^2.\end{aligned}$$

also bei Vernachlässigung kleiner Größen höherer Ordnung

$$s_{k,k+1}\Delta s_{k,k+1} = (x_{k+1}-x_k)(u_{k+1}-u_k)+(y_{k+1}-y_k)(v_{k+1}-v_k).$$

Summiert man diese Gleichungen von $k=0$ bis $k=n-1$ nach vorheriger Division durch $l_{k,k+1}=x_{k+1}-x_k$, so wird

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{s_{k,k+1}\Delta s_{k,k+1}}{l_{k,k+1}} = \sum_{0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)+\frac{y_{k+1}-y_k}{x_{k+1}-x_k}(v_{k+1}-v_k). \tag{13}$$

Sind die Randgelenke der Kette fest, so ist $\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)=0$. Weiterhin, mit Rücksicht auf (1), erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{y_{k+1}-y_k}{x_{k+1}-x_k}(v_{k+1}-v_k) = \sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{y_k-y_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}-\frac{y_{k+1}-y_k}{x_{k+1}-x_k}\right\}v_k = (\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})^*\boldsymbol{v} = \frac{1}{h}\boldsymbol{p}^*\boldsymbol{v}.$$

Die Dehnungsgleichung des k-ten Gelenkes ist

$$\frac{\Delta s_{k,k+1}}{s_{k,k+1}} = \frac{H-h}{EF}\frac{s_{k,k+1}}{l_{k,k+1}}.$$

Werden diese Werte in die Gleichung (13) eingetragen, so wird

$$\boldsymbol{p}^* \boldsymbol{v} = \frac{(H-h)h}{EF}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{s_{k,k+1}^3}{l_{k,k+1}^2}$$

oder, bei Berücksichtigung der Gleichung (12),

$$\boldsymbol{p}^*\{\boldsymbol{C}^{-1}-(\boldsymbol{C}+H\boldsymbol{K})^{-1}\}\left(\boldsymbol{q}-\frac{H-h}{h}\boldsymbol{p}\right) = \frac{H(H-h)h}{EF}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{s_{k,k+1}^3}{l_{k,k+1}^2}. \tag{14}$$

Diese algebraische Gleichung n-ten Grades bestimmt die Horizontalspannung H als Funktion der Brückenkonstanten und der Belastung.

Abschnitt V

Die Differentialgleichung einer ∞-vielgliedrigen Hängebrücke und ihre Lösungen

§ 1. Wir betrachten jetzt als Grenzfall einer n-gliedrigen Kettenbrücke für $n \to \infty$ eine Hängebrücke, welche aus einem Kabel, einer Hängemembran und aus einem gestützten Balken von der Länge L besteht.

Wir bezeichnen
das Querschnittsträgheitsmoment an der Stelle x mit $J(x)$,
die Ordinate des Kabels an der Stelle x mit $y(x)$,
die zur Erhaltung der Kollinearität der Balkenpunkte notwendige (als tote Last wirkende), stetig verteilte Last, pro Längeneinheit an der Stelle x mit $p(x)$.

Wegen der Symmetrie der Brücke bestehen die Gleichungen

$$J(x) = J(L-x),\ y(x) = y(L-x);\ p(x) = p(L-x).$$

Ist das Kabel unter der Wirkung der toten Last im Gleichgewicht, so muß nach II (12) die Gleichung bestehen

$$-\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \frac{1}{h}p(x). \tag{1}$$

Nun sei der Balken mit der stetig verteilten vertikalen Kraft (lebende Last) $q(x)$ belastet. Das Kabel wird einen Teil $\tilde{q}(x)$ der Last tragen, seine Punkte werden die vertikale Verschiebung $v(x)$ erleiden und die Horizontalspannung h ändert sich zu H. In diesem Zustande wird die Gleichgewichtsgleichung

$$-\frac{d^2}{dx^2}\{y(x)+v(x)\} = \frac{1}{H}\{p(x)+\tilde{q}(x)\}. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt

$$-\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = \frac{1}{H}\left\{\tilde{q}(x) - \frac{H-h}{h} p(x)\right\}. \tag{3}$$

Der Balken trägt die Last $q(x) - \tilde{q}(x)$ und die davon herrührende Biegungsspannung $m(x)$ wird nach II (20) durch folgende Differentialgleichung bestimmt

$$-\frac{d^2 m(x)}{dx^2} = q(x) - \tilde{q}(x). \tag{4}$$

Zwischen der Verschiebung $v(x)$ und der Biegungsspannung $m(x)$ besteht nach II (19) die Differentialgleichung

$$-\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = \frac{1}{EJ(x)} m(x). \tag{5}$$

Die Elimination von $\tilde{q}(x)$ aus (3) und (4) ergibt

$$-\frac{d^2}{dx^2}\{m(x) + H v(x)\} = q(x) - \frac{H-h}{h} p(x). \tag{6}$$

Wird der aus (5) entnommene Wert von $\frac{d^2 v(x)}{dx^2}$ in (6) eingetragen, so erhalten wir die Spannungsdifferentialgleichung der Hängebrücke

$$-\frac{d^2 m(x)}{dx^2} + \frac{H}{EJ(x)} m(x) = q(x) - \frac{H-h}{h} p(x). \tag{7}$$

Die Randbedingungen sind wegen der Stützungen

$$m(0) = m(L) = 0. \tag{8}$$

Wird aber der aus (5) entnommene Wert von $m(x)$ in (6) eingetragen, so erhält man die wohlbekannte Melansche Differentialgleichung für die Verschiebung

$$EJ\frac{d^4 v(x)}{dx^4} - H\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = q(x) - \frac{H-h}{h} p(x). \tag{9}$$

Diese Differentialgleichung hat man unter den Randbedingungen zu lösen

$$v(0) = v''(0) = v(L) = v''(L) = 0. \tag{10}$$

In den meisten mathematischen Untersuchungen über Hängebrücken wird die Melansche Differentialgleichung direkt diskutiert. Die Ergebnisse des vorigen Paragraphen, besonders die dortige Inversionsformel IV (12) legen es nahe, auch die Melansche Differentialgleichung mit Hilfe der Greenschen Funktion der Spannungsgleichung (7) zu lösen.

Zu diesem Zwecke gehen wir folgendermaßen vor. Es sei $G(x, \xi; \lambda)$ die zu der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{\lambda}{EJ(x)} z = 0 \tag{11}$$

und zu den Randbedingungen

$$z(0) = z(L) = 0 \tag{12}$$

gehörige GREENsche Funktion. Wird vorübergehend die abkürzende Bezeichnung

$$r(x) = q(x) - \frac{H-h}{h} p(x)$$

eingeführt, so erhält man mit Hilfe dieser GREENschen Funktion — welche jetzt die Rolle der inversen Matrix übernimmt — aus der Spannungsgleichung (7) den folgenden expliziten Ausdruck für die Biegungsspannung $m(x)$

$$-m(x) = \int_0^L G(x, \xi; H)\, r(\xi)\, d\xi. \tag{13}$$

Die Verschiebung $v(x)$ genügt aber nach (5) derselben Differentialgleichung (11) mit dem Parameterwert $\lambda = 0$ und denselben Randbedingungen (12), sie läßt sich also mit Hilfe von $G(x, \xi; 0)$ explizit darstellen

$$-v(x) = \int_0^L G(x, \xi; 0) \frac{1}{EJ(\xi)} m(\xi)\, d\xi.$$

Wird der Wert (13) von $m(x)$ hier eingeführt, so ergibt sich

$$v(x) = \int_0^L G(x, t; 0) \frac{1}{EJ(t)} \left\{ \int_0^L G(t, \xi; H)\, r(\xi)\, d\xi \right\} dt =$$

$$= \int_0^L \left\{ \int_0^L G(x, t; 0) \frac{1}{EJ(t)} G(t, \xi; H)\, dt \right\} r(\xi)\, d\xi.$$

Die in der letzten Klammer auftretende „iterierte" GREENsche Funktion läßt sich aber mit Hilfe einer von HILBERT herrührenden Identität auf folgende Form bringen [4]

$$\frac{1}{H} \{ G(x, \xi; 0) - G(x, \xi; H) \},$$

welche nichts anderes ist als das infinitesimale Analogon der Matrizenformel (11) in Abschnitt IV.

Demnach kann die Lösung der MELANschen Differentialgleichung mit Hilfe der GREENschen Funktion $G(x, \xi; \lambda)$ folgendermaßen dargestellt werden

$$v(x) = \frac{1}{H} \int_0^L \{ G(x, \xi; 0) - G(x, \xi; H) \} \left\{ q(\xi) - \frac{H-h}{h} p(\xi) \right\} d\xi. \tag{14}$$

Man verifiziert leicht, daß die von KÁRMÁN [5], BLEICH [6] u. a. angegebenen Lösungsformeln, als spezielle Fälle, in (14) enthalten sind.

Abschnitt VI

Die gleichmäßige Hängebrücke

Unsere bisherigen Ergebnisse gelten allgemein für Kettenbrücken, bei denen die Längen und Querschnittsträgheitsmomente der einzelnen Balken-

teile beliebig vorgeschrieben sind, sowie für Kabelbrücken, bei welchen das Querschnittsträgheitsmoment beliebig veränderlich ist.

Dieser Abschnitt soll der Untersuchung der gleichmäßigen Hängebrücken gewidmet sein, bei welchen der Balken ein konstantes Querschnittsträgheitsmoment aufweist und — im Falle einer Kettenbrücke — die Hängestäbe äquidistant sind.

Die außerordentlichen Vereinfachungen, welche bei der mathematischen Untersuchung derartiger Brücken eintreten, sind durch zwei Umstände bedingt.

Erstens sind in diesem Falle *beide* vorkommenden Matrizen $\boldsymbol{C}$ und $\boldsymbol{K}$ einfache Funktionen der (dimensionslosen) Kontinuante $\boldsymbol{C}_0$. Zweitens sind sowohl die Eigenwerte als auch die Eigenmatrizen der Kontinuante $\boldsymbol{C}_0$ sowie diejenige einer Funktion $\varphi(\boldsymbol{C}_0)$ von $\boldsymbol{C}_0$ explizit bekannt. Ähnliches gilt auch für die gleichmäßige Kabelbrücke, weil die Eigenwerte und die Eigenfunktionen der Differentialgleichung $\frac{d^2 z}{d x^2} - \lambda z = 0$ explizit bekannt sind.

Hat eine gleichmäßige Kettenbrücke n Glieder, also $n-1$ Hängestäbe, so gehört dazu eine Kontinuante $n-1$-ter Ordnung. Die Eigenwerte dieser Kontinuante sind

$$\lambda_1 = 4\sin^2\frac{\pi}{2n}, \qquad \lambda_2 = 4\sin^2\frac{2\pi}{2n}, \qquad \ldots \qquad \lambda_{n-1} = 4\sin^2\frac{(n-1)\pi}{2n} \tag{1}$$

und die Eigenmatrizen (als Spaltenmatrizen geschrieben)

$$\boldsymbol{u}_1 = \sqrt{\frac{2}{n}}\begin{bmatrix} \sin\frac{\pi}{n} \\ \sin\frac{2\pi}{n} \\ \vdots \\ \sin\frac{(n-1)\pi}{n} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \sqrt{\frac{2}{n}}\begin{bmatrix} \sin\frac{2\pi}{n} \\ \sin\frac{2\cdot 2\pi}{n} \\ \vdots \\ \sin\frac{2(n-1)\pi}{n} \end{bmatrix}, \qquad \ldots$$

$$\boldsymbol{u}_{n-1} = \sqrt{\frac{2}{n}}\begin{bmatrix} \sin\frac{(n-1)\pi}{n} \\ \sin\frac{2(n-1)\pi}{n} \\ \vdots \\ \sin\frac{(n-1)^2\pi}{n} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Das System dieser Eigenmatrizen ist im Sinne des § 4 von Abschnitt I vollständig, orthogonal und normiert. Diese Eigenmatrizen genügen nach I (8) den Gleichungen

$$\boldsymbol{C}_0 \boldsymbol{u}_k = \lambda_k \boldsymbol{u}_k; \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Hieraus sieht man, daß die Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$\boldsymbol{C}_0 \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_k$$

sofort hingeschrieben werden kann in der Form

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{\lambda_k}\boldsymbol{u}_k.$$

Steht aber auf der rechten Seite eine lineare Kombination der Eigenmatrizen

$$\boldsymbol{C}_0\boldsymbol{x} = \beta_1\boldsymbol{u}_1 + \beta_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots \beta_{n-1}\boldsymbol{u}_{n-1},$$

so setzt sich die Lösung additiv zusammen aus denjenigen Lösungen, welche zu den einzelnen Eigenmatrizen gehören, d. h.

$$\boldsymbol{x} = \frac{\beta_1}{\lambda_1}\boldsymbol{u}_1 + \frac{\beta_2}{\lambda_2}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \frac{\beta_{n-1}}{\lambda_{n-1}}\boldsymbol{u}_{n-1}.$$

Jetzt wird man die naheliegende Frage aufwerfen, ob jede Spaltenmatrix $\boldsymbol{b}$, welche auf der rechten Seite der Gleichung $\boldsymbol{C}_0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ steht, sich als lineare Kombination der Eigenmatrizen $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots \boldsymbol{u}_{n-1}$ darstellen läßt. Diese Frage fällt im Falle der Kontinuante $\boldsymbol{C}_0$ mit der Frage nach der Möglichkeit der harmonischen Analyse einer beliebigen Spaltenmatrix zusammen.

In der Tat, wie bei der „unendlichen" harmonischen Analyse einer (in 0 und π verschwindenden) Funktion $f(x)$ diese, als konvergente, unendliche lineare Kombination der Funktionen $\sin x, \sin 2x, \ldots$ in der Form

$$f(x) = \beta_1 \sin x + \beta_2 \sin 2x + \cdots$$

dargestellt wird, ebenso hat man bei der „endlichen" harmonischen Analyse einer Spaltenmatrix $\boldsymbol{b}$ diese als lineare Kombination der Eigenmatrizen in der Form

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = \beta_1\sqrt{\frac{2}{n}}\begin{bmatrix} \sin\frac{\pi}{n} \\ \sin\frac{2\pi}{n} \\ \vdots \\ \sin\frac{(n-1)\pi}{n} \end{bmatrix} + \beta_2\sqrt{\frac{2}{n}}\begin{bmatrix} \sin\frac{2\pi}{n} \\ \sin\frac{4\pi}{n} \\ \vdots \\ \sin\frac{2(n-1)\pi}{n} \end{bmatrix} + \cdots \tag{3}$$

oder kürzer geschrieben in der Form

$$\boldsymbol{b} = \beta_1\boldsymbol{u}_1 + \beta_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \beta_{n-1}\boldsymbol{u}_{n-1} \tag{4}$$

darzustellen. (Die Eigenmatrizen von $\boldsymbol{C}_0$ vertreten die Sinusfunktionen vollkommen auch in dem Sinne, daß ihre Bilder nichts anderes sind, als Sehnenpolygone der Bilder von $\sin x, \sin 2x, \ldots \sin(n-1)x$, mit äquidistanten Abszissen.)

Die Möglichkeit dieser Darstellung folgt aus der Vollständigkeit des Systems der Eigenmatrizen $\boldsymbol{u}_k$.

Zur Berechnung der Koeffizienten $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1}$ benützt man — ebenso wie bei einer unendlichen Fourierreihe — die Orthogonalität und Normiertheit

der Eigenmatrizen. In der Tat, um den Koeffizient β_k in der Entwicklung (4) zu erhalten, multipliziert man beide Seiten der Gleichung (4) von links mit $\boldsymbol{u}_k{}^*$. Wegen der Orthogonalität verschwinden alle skalaren Produkte auf der rechten Seite bis auf eines: $\boldsymbol{u}_k{}^* \boldsymbol{u}_k$. Dieses Produkt ist aber wegen der Normiertheit gleich 1. Also erhält man

$$\beta_k = \boldsymbol{u}_k{}^* \boldsymbol{b}.$$

Die Lösung der Gleichung $\boldsymbol{C}_0 \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ kann also folgendermaßen ausgeführt werden: Man berechne die „endlichen" Fourierkoeffizienten β_k der Spaltenmatrix $\boldsymbol{b}$ mit Hilfe der Formeln

$$\beta_k = \boldsymbol{u}_k{}^* \boldsymbol{b} = \sqrt{\frac{2}{n}} \left(b_1 \sin \frac{k\pi}{n} + b_2 \sin \frac{2k\pi}{n} + \cdots + b_{n-1} \sin \frac{(n-1)k\pi}{n} \right). \tag{5}$$

Dann wird die Lösung der Gleichung $\boldsymbol{C}_0 \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{x} = \frac{\beta_1}{\lambda_1} \boldsymbol{u}_1 + \frac{\beta_2}{\lambda_2} \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \frac{\beta_{n-1}}{\lambda_{n-1}} \boldsymbol{u}_{n-1}. \tag{6}$$

Um diese Methode bei der Auflösung der Grundgleichungen einer gleichmäßigen Kettenbrücke anwenden zu können, haben wir noch eine Ergänzung einzufügen.

In den Grundgleichungen kommt nicht die Matrix $\boldsymbol{C}_0$ selbst vor, sondern — wie erwähnt — eine Funktion $\varphi(\boldsymbol{C}_0)$ dieser Matrix. $\varphi(\boldsymbol{C}_0)$ hat aber nach dem in I. § 4 angeführten Satze dieselben Eigenmatrizen wie $\boldsymbol{C}_0$ und ihre Eigenwerte sind $\varphi(\lambda_1), \varphi(\lambda_2), \ldots \varphi(\lambda_{n-1})$. Bei der Lösung einer Gleichung von der Form

$$\varphi(\boldsymbol{C}_0) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{7}$$

müssen also in der Lösungsformel (6) die Nenner λ_k durch $\varphi(\lambda_k)$ ersetzt werden, d. h.

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\beta_k}{\varphi(\lambda_k)} \boldsymbol{u}_k. \tag{8}$$

Beide Lösungsformeln (6) und (8) stellen die endliche Fourierentwicklung der lösenden Spaltenmatrix $\boldsymbol{x}$ dar.

Jetzt sind wir im Stande, die Grundgleichungen einer gleichmäßigen Kettenbrücke ohne direkte Inversion der Gleichungsmatrix zu lösen.

Man hat bei einer gleichmäßigen Kettenbrücke

$$l_{01} = l_{12} = \cdots = l_{n-1,n} = l; \qquad J_{01} = J_{12} = \cdots = J_{n-1,n} = J$$

und fast ohne Ausnahme

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_{n-1} = p.$$

In diesem Falle wird also

$$\boldsymbol{C} = \frac{1}{l} \boldsymbol{C}_0, \qquad \boldsymbol{K} = \frac{l}{EJ} \left(\boldsymbol{E} - \frac{1}{6} \boldsymbol{C}_0 \right), \qquad \boldsymbol{p} = p \boldsymbol{e}. \tag{9}$$

Die Spannungsgleichung einer gleichmäßigen Kettenbrücke nimmt jetzt nach IV (8) folgende Form an

$$\left\{\boldsymbol{C}_0+\frac{H\,l^2}{E\,J}\left(\boldsymbol{E}-\frac{1}{6}\boldsymbol{C}_0\right)\right\}\frac{\boldsymbol{m}}{l}=\boldsymbol{q}-\frac{H-h}{h}p\,\boldsymbol{e}.$$

Die Gleichungsmatrix ist also in diesem Falle

$$\varphi(\boldsymbol{C}_0)\ \text{mit}\ \varphi(x)=x+\frac{H\,l^2}{E\,J}\left(1-\frac{x}{6}\right).$$

Um diese Gleichung bei unbestimmtem H auflösen zu können, haben wir die Spaltenmatrizen $\boldsymbol{q}$ und $\boldsymbol{e}$ einzeln der harmonischen Analyse zu unterwerfen. Man findet nach (5)

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{q}=\beta_1\boldsymbol{u}_1+\beta_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+\beta_{n-1}\boldsymbol{u}_{n-1};\qquad &&\beta_k=\boldsymbol{u}_k{}^*\boldsymbol{q};\\ &\boldsymbol{e}=\epsilon_1\boldsymbol{u}_1+\epsilon_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+\epsilon_{n-1}\boldsymbol{u}_{n-1};\qquad &&\epsilon_{2k+1}=\sqrt{\frac{2}{n}}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2n},\quad \epsilon_{2k}=0.\end{aligned}\tag{10}$$

Unter Benützung dieser Werte erhält man die explizite Lösung der Spannungsgleichung in folgender Form

$$\boldsymbol{m}=l\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\beta_k-\frac{H-h}{h}p\,\epsilon_k}{\lambda_k+\frac{H\,l^2}{E\,J}\left(1-\frac{\lambda_k}{6}\right)}\boldsymbol{u}_k.\tag{11}$$

Die Verschiebungsgleichung lautet nach IV (10) mit den oben eingeführten Bezeichnungen

$$\left\{\frac{E\,J}{l^3}\boldsymbol{C}_0\left(\boldsymbol{E}-\frac{1}{6}\boldsymbol{C}_0\right)^{-1}\boldsymbol{C}_0+\frac{H}{l}\boldsymbol{C}_0\right\}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{q}-\frac{H-h}{h}p\,\boldsymbol{e}.$$

Die Gleichungsmatrix ist jetzt

$$\psi(\boldsymbol{C}_0)\ \text{mit}\ \psi(x)=\frac{E\,J}{l^3}\,\frac{x^2}{1-\frac{1}{6}x}+\frac{H}{l}x$$

und mit Benützung derselben Koeffizienten (10) lautet die Lösung

$$\boldsymbol{v}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\beta_k-\frac{H-h}{h}p\,\epsilon_k}{\frac{E\,J}{l^3}\,\frac{\lambda_k{}^2}{1-\frac{\lambda_k}{6}}+\frac{H}{l}\lambda_k}\boldsymbol{u}_k.\tag{12}$$

Die Bestimmungsgleichung für die relative Spannungsänderung χ erhält man am besten aus IV (14), indem man dort $\boldsymbol{p}^*=p\,\boldsymbol{e}^*$, $H-h=\chi h$, $l_{k,k+1}=l$ und den Wert (12) von $\boldsymbol{v}$ einführt. So ergibt sich

$$\sum_{k=1,3,5\ldots}\frac{\beta_k\epsilon_k-p\,\chi\,\epsilon_k{}^2}{\frac{E\,J}{l^2\,h}\,\frac{\lambda_k{}^2}{1-\frac{\lambda_k}{6}}+(1+\chi)\lambda_k}=\frac{h^2\chi}{E\,F}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{s_{k,k+1}}{l}\right)^3.\tag{13}$$

(Die Glieder mit geradem Index fehlen in der linken Summe, weil jedes ϵ_{2k} verschwindet.) Zwischen 0 und ∞ ist die linke Seite dieser Gleichung abnehmend, die rechte zunehmend. Bei einer Lastverteilung also, welche die linke Seite für $\chi=0$ positiv macht, hat die Gleichung (13) eine einzige positive Wurzel. Ist diese Wurzel χ gefunden, so ist $H=h(1+\chi)$.

Wird in der endlichen Fourierreihe (12) der Verschiebungsmatrix $\boldsymbol{v}$ bei festem L der Grenzübergang $n\to\infty, l=\frac{L}{n}\to 0$ durchgeführt, so erhält man für die Verschiebungsfunktion $v(x)$ einer gleichmäßigen Kabelbrücke die folgende, schon von KÁRMÁN, BLEICH u. a. angegebene unendliche Fourierreihe

$$v(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k-\frac{H-h}{h}p\,\epsilon_k}{EJ\left(\frac{k\pi}{L}\right)^4+H\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2}\sin\frac{k\pi x}{L}. \tag{14}$$

Hier ist

$$\beta_k=\frac{2}{L}\int_0^L q(x)\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx$$

und

$$\epsilon_{2k+1}=\frac{4}{(2k+1)\pi};\qquad \epsilon_{2k}=0.$$

Durch denselben Grenzübergang erhält man aus (13) die transzendente Bestimmungsgleichung für die relative Spannungszunahme χ in folgender Form

$$p\int_0^L v(x)\,dx=\frac{h^2\chi}{EF}\int_0^L\left(\frac{ds}{dx}\right)^3 dx.$$

Hier bedeutet ds das Bogenelement der Kabelkurve an der Stelle x unter der Wirkung der toten Last.

Abschnitt VII

Im folgenden Beispiel wird die Berechnung einer gleichmäßigen Kettenbrücke mit 5 Hängestäben durchgeführt.

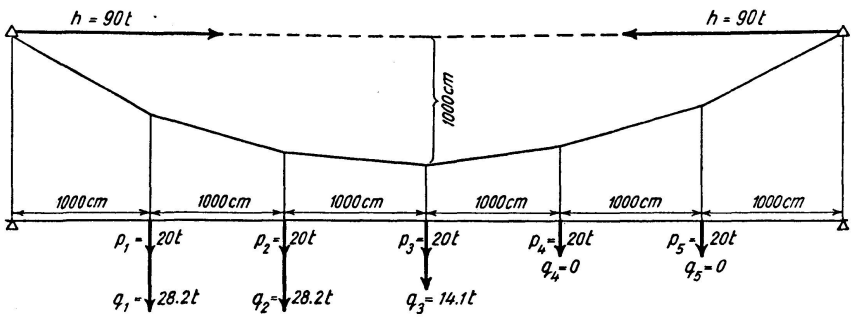

Fig. 4

Zur Berechnung der obigen Hängebrücke (Fig. 4) sind folgende Zahlenwerte notwendig:

Die Länge des Versteifungsträgers: $L = 6000$ cm.

Die Anzahl der Balkenabschnitte: $n = 6$.

Die Länge eines Balkenabschnittes: $l = \frac{L}{n} = 1000$ cm.

Der Höhenunterschied zwischen dem tiefsten Punkte der Kette und den Aufhängungspunkten: 1000 cm.

Das konstante Querschnittsträgheitsmoment des Balkens: $J = 475000$ cm^4.

Der Elastizitätsmodul des Balkens sowie der Kette: $E = 2100$ t/cm^2.

Querschnittsflächeninhalt der Kette: $F = 52$ cm^2.

Die tote Last: $p = 20$ t pro Hängestab.

Die von der toten Last herrührende Horizontalspannung wird nach Abschnitt II

$$h = p\frac{n^2}{8}\frac{l}{y_{max}} = 90 \text{ t}.$$

Wir wollen die Spannungen und Verformungen der Brücke bei folgender Verteilung der lebenden Last berechnen:

$$q_1 = 28{,}2 \text{ t}, \quad q_2 = 28{,}2 \text{ t}, \quad q_3 = 14{,}1 \text{ t}, \quad q_4 = q_5 = 0.$$

Die Berechnungen werden wir sowohl für undehnbare als auch für dehnungsfähige Ketten durchführen.

Die Eigenwerte, sowie die Eigenmatrizen der zur sechsgliedrigen Brücke gehörigen Kontinuante fünfter Ordnung $\boldsymbol{C}_0$ kann man nach VI (1) (2) aus einer trigonometrischen Tafel sofort entnehmen:

$$\lambda_1 = 0{,}2679, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2, \quad \lambda_4 = 3, \quad \lambda_5 = 3{,}7320$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}2887 \\ 0{,}5000 \\ 0{,}5773 \\ 0{,}5000 \\ 0{,}2887 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}5000 \\ 0{,}5000 \\ 0{,}0000 \\ -0{,}5000 \\ -0{,}5000 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 0{,}5773 \\ 0{,}0000 \\ -0{,}5773 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}5773 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{bmatrix} 0{,}5000 \\ -0{,}5000 \\ 0{,}0000 \\ -0{,}5000 \\ 0{,}5000 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_5 = \begin{bmatrix} 0{,}2887 \\ -0{,}5000 \\ 0{,}5773 \\ -0{,}5000 \\ 0{,}2887 \end{bmatrix}$$

Nach den Ausführungen des Abschnittes VI hat man zuerst die harmonische Analyse

$$\text{der lebenden Last } \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 28{,}2 \\ 28{,}2 \\ 14{,}1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ und der toten Last } \boldsymbol{p} = p\,\boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix}$$

durchzuführen. Durch Anwendung der Formeln VI (10) und VI bekommen wir

$$\boldsymbol{q} = 30{,}3813\,\boldsymbol{u}_1 + 28{,}2\,\boldsymbol{u}_2 + 8{,}1406\,\boldsymbol{u}_3 + 0\,\boldsymbol{u}_4 + 2{,}1813\,\boldsymbol{u}_5$$

oder ausführlich

$$\begin{bmatrix}28{,}2\\28{,}2\\14{,}1\\0\\0\end{bmatrix}=30{,}3813\begin{bmatrix}0{,}2887\\0{,}5000\\0{,}5773\\0{,}5000\\0{,}2887\end{bmatrix}+28{,}2\begin{bmatrix}0{,}5\\0{,}5\\0{,}0\\-0{,}5\\-0{,}5\end{bmatrix}+8{,}1406\begin{bmatrix}0{,}5773\\0{,}0000\\-0{,}5773\\0{,}0000\\0{,}5773\end{bmatrix}+2{,}1813\begin{bmatrix}0{,}2887\\-0{,}5000\\0{,}5773\\-0{,}5000\\0{,}2887\end{bmatrix}$$

und

$$\boldsymbol{p}=43{,}0940\,\boldsymbol{u}_1+0\,\boldsymbol{u}_2+11{,}547\,\boldsymbol{u}_3+0\,\boldsymbol{u}_4+3{,}0940\,\boldsymbol{u}_5$$

oder ausführlich

$$\begin{bmatrix}20\\20\\20\\20\\20\end{bmatrix}=43{,}0940\begin{bmatrix}0{,}2887\\0{,}5000\\0{,}5773\\0{,}5000\\0{,}2887\end{bmatrix}+11{,}547\begin{bmatrix}0{,}5773\\0{,}0000\\-0{,}5773\\0{,}0000\\0{,}5773\end{bmatrix}+3{,}0940\begin{bmatrix}0{,}2887\\-0{,}5000\\0{,}5773\\-0{,}5000\\0{,}2887\end{bmatrix}$$

Wir haben zunächst mit Hilfe der Gleichung VI (13) die veränderte Horizontalspannung, bzw. die relative Spannungsänderung χ zu berechnen. Die Bestimmungsgleichung für χ wird nach VI (13)

$$\frac{52{,}63-74{,}64\chi}{79{,}65+19{,}39\chi}+\frac{14{,}10-20{,}00\chi}{18495+540\chi}+\frac{3{,}778-5{,}359\chi}{415300+3761\chi}=$$

$$=\begin{cases}0 & \text{im Falle einer undehnbaren Kette,}\\ 0{,}0138\chi & \text{im Falle einer dehnbaren Kette.}\end{cases}$$

Die einzige positive Wurzel dieser Gleichung ist: $\chi=0{,}7050$ für undehnbare Kette und $\chi=0{,}6930$ für dehnbare Kette.

Werden diese Werte von χ, bzw. von $H=h(1+\chi)$ in die Formel VI (11) und VI (12) eingetragen, so erhält man für die Biegespannungen, bzw. für die Vertikalverschiebungen folgende Werte:

Biegespannungen (t·cm)

m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	
−12 498	−12 498	0	12 498	12 498	undehnbar
−12 958	−13 226	−7960	11 790	12 060	dehnbar

Vertikalverschiebungen (cm)

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	
10,44	10,44	0	−10,44	−10,44	undehnbar
11,75	12,68	2,56	− 8,22	− 9,15	dehnbar

Literatur

1. Siehe z. B. C. Mac Duffee, Vectors and Matrices, Carus Monographs, 1943.
2. Vgl. z. B. „Hütte", Des Ingenieurs Taschenbuch, 1949, Bd. I, S. 680—681.
3. Vgl. z. B. Th. Kármán-M. Biot, Mathematical Methods in Engineering, 1940, S. 268 bis 269.
4. D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, 1912, S. 21.
5. L. c. [3]., S. 317—319.
6. H. Bleich, Die Berechnung verankerter Hängebrücken, 1935.

Zusammenfassung

In der Fachliteratur findet man verschiedene Ansätze, welche eine finitisierende Tendenz erkennen lassen und die Differentialgleichungen der Hängebrückentheorie durch Differenzengleichungen, bzw. die stetig verteilte Last durch konzentrierte „Knotenlasten" ersetzen. Der Verfasser war bestrebt, eine konsequente finite Theorie für *Ketten*brücken aufzubauen. — Ist das Querschnittsträgheitsmoment des Versteifungsträgers einer einfeldrigen Kettenbrücke streckenweise konstant und wird die lebende Last durch statisch äquivalente Knotenlasten ersetzt, so kann die Kettenbrücke als ein Fachwerk mit steifen und gelenkigen Stabverbindungen aufgefaßt werden. Die Gleichgewichtsgleichungen dieses finitisierten Brückenmodells, welche den Zusammenhang zwischen den Knotenlasten und Knotendurchbiegungen ausdrücken, lassen sich übersichtlich in eine einzige Matrizengleichung zusammenfassen. Die Lösung dieser Matrizengleichung erfordert nur das praktisch bequem durchführbare Invertieren von Kontinuantmatrizen. — Beim Grenzübergang für unbegrenzt zunehmende Knotenanzahl geht diese Matrizengleichung in die Melansche Differentialgleichung der Kabelbrücken über; als Grenzgebilde der inversen Matrix ergibt sich die Greensche (Einfluß-) Funktion. — Sind die Eigenwerte und Eigenvektoren (Eigenfunktionen) der Gleichungsmatrix (Differentialgleichung) bekannt, so kann man die Lösung auch in der Form einer endlichen (unendlichen) Fourier-Entwicklung erhalten. — Die Methode läßt sich auch im Falle einer mehrfeldrigen, durchlaufenden Hängebrücke verwenden.

Summary

In the specialised literature, various studies have been published which exhibit a tendency towards definite solutions and in which the differential equations of the theory of suspension bridges are replaced by difference equations, the uniformly distributed load being itself replaced by loads concentrated at the nodes. The author has endeavoured to establish a consistent finite theory for *chain* bridges. If the moment of inertia of the section of the stiffening girder of a chain bridge with a single span is constant by stages,

and if the live load is replaced by statically equivalent concentrated loads, the chain bridge may be treated as a lattice structure consisting of jointed assemblies of rigid bars. The equilibrium equations of this type of bridge, equations which express the correlation between the loads concentrated at the nodes and the deflections at these nodes, may be summarised quite clearly in the form of a single matricial equation. In order to solve this equation, all that is necessary is to carry out an inversion of the matrices, which is quite easily done in practice. As the limit for a number of nodes increasing in an unlimited manner is approached, this matricial equation assumes the form of Melan's differential equation for cable bridges; the limiting form of the inverted matrix is Green's influence function. If the actual values and actual vectors (actual functions of the matrix) (differential equation) are known, it is also possible to obtain the solution in the form of a finite (infinite) Fourier expansion. This method is equally applicable to the case of a continuous suspension bridge with several spans.

Résumé

Dans la littérature spécialisée, ont été publiées différentes études qui manifestent une tendance vers les solutions finies et dans lesquelles les équations différentielles de la théorie des ponts suspendus sont remplacées par des équations aux différences, la charge uniformément répartie étant elle-même remplacée par des charges concentrées aux nœuds. L'auteur s'est efforcé d'établir une théorie finie conséquente pour les ponts à *chaînes*. Si le moment d'inertie de la section de la poutre de raidissement d'un pont à chaînes à une seule travée est constante par paliers et si la charge utile est remplacée par des charges concentrées statiquement équivalentes, le pont à chaînes peut être traité comme un ouvrage en treillis constitué par des assemblages articulés de barres rigides. Les équations d'équilibre de ce modèle de pont, équations qui expriment la corrélation entre les charges concentrées aux nœuds et les flèches en ces nœuds, peuvent être résumées d'une manière claire sous la forme d'une seule équation matricielle. Pour résoudre cette dernière équation, il suffit de procéder à une inversion des matrices, qui peut en pratique être effectuée aisément. Lorsque l'on passe à la limite pour un nombre de nœuds augmentant d'une manière illimitée, cette équation matricielle prend la forme de l'équation différentielle de Melan pour les ponts à câble; la forme limite de la matrice inverse est la fonction d'influence de Green. Si les valeurs propres et les vecteurs propres (fonctions propres de la matrice) (équation différentielle) sont connus, il est possible d'obtenir également la solution sous la forme d'un développement fini (infini) de Fourier. Cette méthode peut être également appliquée au cas d'un pont suspendu continu à plusieurs travées.