Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Band: 14 (1954)

Artikel: Die Berechnung unsymmetrisch oben und unten vorgespannter Betonträger bei genauerer Berücksichtigung des Kriechens und Schwindens

Autor: Fritz, B.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-13938

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Die Berechnung unsymmetrisch oben und unten vorgespannter Betonträger bei genauerer Berücksichtigung des Kriechens und Schwindens

The calculation of concrete girders, prestressed unsymmetrically above and below, taking more precise account of creep and shrinkage

Le calcul des poutres en béton précontraint avec dissymétrie en-dessus et en-dessous, en considération précise de l'écoulement et du retrait

Prof. Dr.-Ing. B. Fritz, Technische Hochschule, Karlsruhe

A. Vorbemerkungen

Die im folgenden entwickelten exakten Ansätze und daraus abgeleiteten gebrauchsfertigen Bemessungsformeln gelten für im Spannbett hergestellte Betonträger mit parallel verlegten unteren und oberen Spanngliedern.

Spannbetonträger dieser Art werden bekanntlich sehr häufig als Fertigteile für Wohnhausdecken vorgeschlagen und verwendet. Da im Zeitpunkt des Umsetzens der Spannbettkräfte auf den Betonträger eine Verbundwirkung schon gesichert ist, liegt der Fall einer Vorspannung mit Verbund vor.

Nach den Bestimmungen sind rechnerische Nachweise für alle derartigen Einflüsse verlangt.

Die genauere Berechnung der Auswirkung des Kriechens und Schwindens bei jeweils nur an *einem* Querschnittsrand vorgespannten Betonträgern ist in der Fachliteratur schon mehrfach behandelt worden und macht keine besonderen Schwierigkeiten.

Bei Spannbetonträgern, die an *beiden* Querschnittsrändern, d. h. unten *und* oben vorgespannt werden, tritt bei einer genaueren Untersuchung der Kriech- und Schwindeinflüsse jedoch zunächst dadurch eine Erschwerung auf, daß die exakten Ansätze — wie abschließend noch nachgewiesen werden wird — auf ein System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen führen. Die Koppelung besagt, daß die durch das Kriechen und Schwinden in den unteren und

oberen Spanngliedern hervorgerufenen Umlagerungskräfte sich gegenseitig beeinflussen können. Eine solche Beeinflussung liegt mit Sicherheit dann vor, wenn durch die zunächst *allein* wirkend gedachte untere Vorspannkraft V^u auch das obere Spannglied schon unter Spannung gesetzt wird und umgekehrt (vgl. Fig. 1).

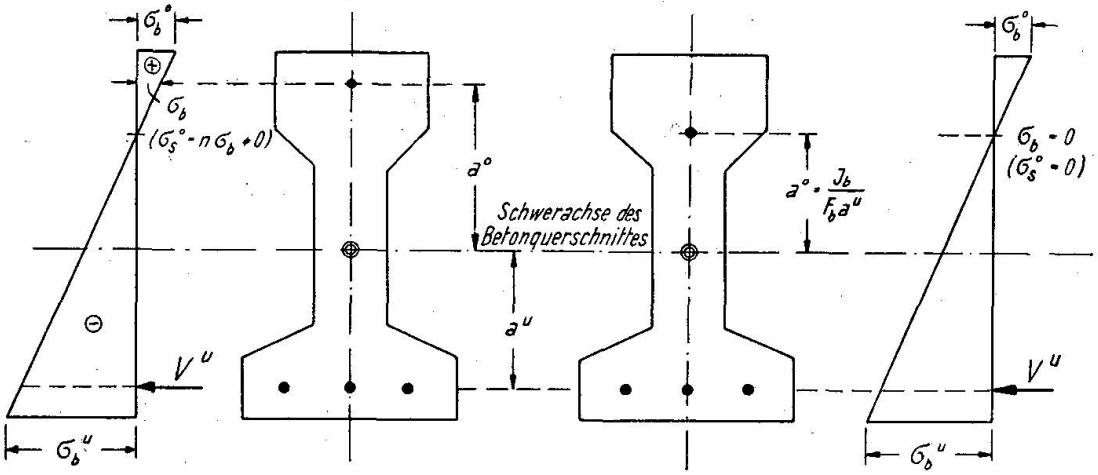

Fig. 1
Allgemeinfall *mit* Koppelung

Fig. 2
Sonderfall *ohne* Koppelung

Es liegt nun nahe, das obere Spannglied so zu legen, daß es durch die Vorspannkraft V^u *nicht* beeinflußt wird, und somit auch keine Koppelung auftreten kann (vgl. Fig. 2). Der für diesen Sonderfall erforderliche Abstand a^0 des oberen Spanngliedes von der Betonschwerachse ergibt sich, wenn man

$$N_b = V^u \quad (1) \qquad \text{und} \qquad M_b = V^u a^u = N_b a^u \quad (2)$$

setzt, aus der Bedingung

$$\sigma_b = 0 = -\frac{N_b}{F_b} + \frac{M_b}{J_b}\, a^0 = -\frac{N_b}{F_b}\left(1 - \frac{a^u a^0 F_b}{J_b}\right) \tag{3}$$

die

$$a^0 = \frac{J_b}{F_b a^u} \tag{4}$$

liefert.

Die zusätzliche obere Vorspannkraft V^0 hat nun bekanntlich die Aufgabe, die am oberen Trägerrand durch die untere Vorspannkraft V^u entstehenden Betonzugspannungen in zulässigen Grenzen zu halten. Hierfür genügt in der Regel eine verhältnismäßig geringe Vorspannkraft V^0. Es ist daher — wie die Untersuchung einiger typischer Anwendungsbeispiele gezeigt hat — ohne Schwierigkeiten, d. h. praktisch ohne Mehrbedarf an oberen Spanngliedern möglich, deren Abstand a^0 so zu wählen, daß die erwünschte Entkoppelung erreicht wird und somit für diesen Sonderfall der Einfluß des Kriechens und Schwindens für die unteren und oberen Vorspannkräfte V^u und V^0 und deren Spannglieder je getrennt nachgewiesen werden darf.

B. Berechnungsverfahren für Spannbetonträger ohne Koppelung

I. Der Vorspannungszustand im Zeitpunkt des Umsetzens der Spannbettkräfte V^0, V^u auf den Betonträger

Es bedeute

V^u die im Spannbett vorhandene untere Vorspannkraft,
V^0 die im Spannbett vorhandene obere Vorspannkraft,
ΔN_s^u den Spannkraftabfall in den unteren Spanngliedern mit dem Gesamtquerschnitt F_s^u,
ΔN_s^0 den Spannkraftabfall in den oberen Spanngliedern mit dem Gesamtquerschnitt F_s^0,
N_b die auf den Betonquerschnitt einwirkende Längskraft,
M_b das auf den Betonquerschnitt einwirkende Biegemoment.

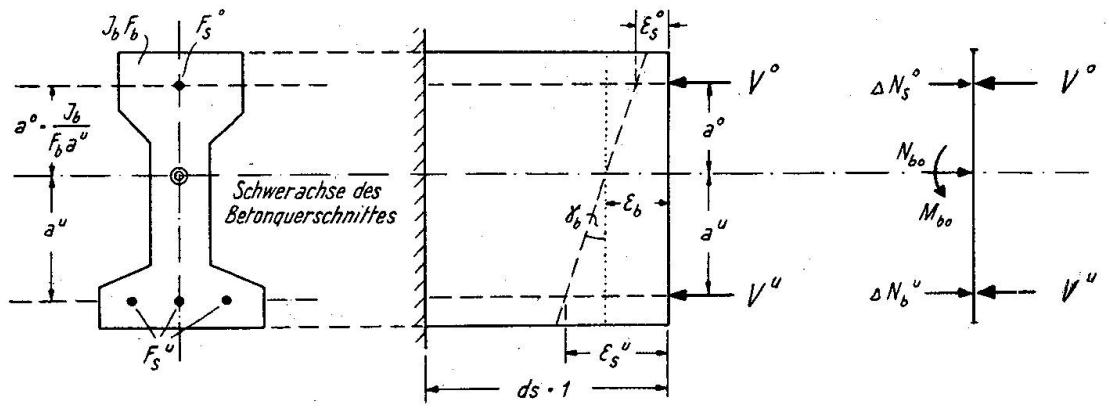

Fig. 3

Für die Bestimmung der unbekannten Größen ΔN_s^u, ΔN_s^0, N_{b_0} und M_{b_0} stehen die beiden Gleichgewichtsbedingungen

$$N_{b_0} + \Delta N_s^u + \Delta N_s^0 - V^u - V^0 = 0 \tag{5}$$

und

$$(V^u - \Delta N_s^u)\, a^u - (V^0 - \Delta N_s^0)\, a^0 - M_{b_0} = 0 \tag{6}$$

sowie die beiden Verträglichkeitsbedingungen

$$\epsilon_s^u = \epsilon_b + \gamma_b \cdot a^u \quad \text{und} \quad \epsilon_s^0 = \epsilon_b - \gamma_b \cdot a^0$$

bzw.

$$\frac{\Delta N_s^u}{K_s^u} = \frac{N_{b_0}}{K_b} + \frac{M_{b_0}}{S_b}\, a^u \tag{7} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta N_s^0}{K_s^0} = \frac{N_{b_0}}{K_b} - \frac{M_{b_0}}{S_b}\, a^0 \tag{8}$$

zur Verfügung, in denen

$$E_s F_s^u = K_s^u \tag{9} \qquad E_s F_s^0 = K_s^0 \tag{10}$$

und

$$E_{b_0} F_b = K_b \tag{11} \qquad E_{b_0} J_{b_0} = S_b \tag{12}$$

gesetzt wurde und unter E_{b_0} der jeweilige, der gewählten Betongüte entsprechende Normen-Elastizitätsmodul zu verstehen ist. Aus den Gl. (5) bis (8) ergibt sich

$$\Delta N_s^u = V^u \frac{A}{C^u} \; (+ = \text{Druck}) \quad (13) \qquad\qquad \Delta N_s^0 = V^0 \frac{B}{C^0} \; (+ = \text{Druck}) \quad (14)$$

Bezeichnet man die nach dem Umsetzen der Spannbettkräfte $V^u V^0$ im Spannstahl vorhandenen abgeminderten Spannkräfte mit

$$N_{s_0}^u = V^u - \Delta N_s^u \quad (15) \qquad \text{und} \qquad N_{s_0}^0 = V^0 - \Delta N_s^0 \quad (16)$$

so erhält man die Längskraft N_{b_0} und das Biegemoment M_{b_0} aus:

$$N_{b_0} = N_{s_0}^u + N_{s_0}^0 \qquad (+ = \text{Druck}) \quad (17)$$

$$M_{b_0} = N_{s_0}^u a^u - N_{s_0}^0 a^0 \; (+ = \text{neg. Mom.}) \quad (18)$$

Die Konstanten A, B, C^u, C^0 bestimmen sich aus

$$A = \frac{1}{K_b} + \frac{a^{u^2}}{S_b} \quad (19) \qquad B = \frac{1}{K_b} + \frac{a^{0^2}}{S_b} \quad (20) \qquad C^u = \frac{1}{K_s^u} + \frac{1}{K_b} + \frac{a^{u^2}}{S_b} \quad (21)$$

$$C^0 = \frac{1}{K_s^0} + \frac{1}{K_b} + \frac{a^{0^2}}{S_b} \quad (22)$$

Die Beton-Randspannungen ergeben sich aus:

$$\sigma_b^{u,0} = -\frac{N_b}{F_b} \pm \frac{M_b}{W_b^{u,0}} \quad (23)$$

die Spanngliedbeanspruchungen nach dem Umsetzen der Spannbettkräfte aus

$$\sigma_s^u = \frac{N_{s_0}^u}{F_s^u} \quad (24) \qquad\qquad \sigma_s^0 = \frac{N_{s_0}^0}{F_s^0} \quad (25)$$

und der jeweilige Spannungsabfall durch die elastischen Verkürzungen aus

$$\Delta \sigma_s^u = -\frac{\Delta N_s^u}{F_s^u} \quad (26) \qquad\qquad \Delta \sigma_s^0 = -\frac{\Delta N_s^0}{F_s^0} \quad (27)$$

II. Die Auswirkung des Beton-Kriechens unter der Vorspannung

Für die Berechnung der nach abgeschlossenem Kriechen im Spannstahl vorhandenen Längskräfte $N_s^u N_s^0$ und der auf den Betonquerschnitt einwirkenden Größen $N_b M_b$ können die Gl. (13) bis (18) ebenfalls benützt werden, wenn in den Gl. (11) und (12) anstelle des Normen-Elastizitätsmoduls E_{b_0} der jeweilige, d. h. zum unteren und oberen Spannglied gehörige „fiktive Formänderungsmodul“

$$E_b^u = \frac{E_{b_0}}{1+\psi^u \cdot \varphi} \quad (28) \qquad \text{und} \qquad E_b^0 = \frac{E_{b_0}}{1+\psi^0 \cdot \varphi} \quad (29)$$

eingeführt wird.

Es ist also in den Gl. (19) und (21) nur

$$K_b = E_b^u F_b \quad (30) \qquad \text{und} \qquad S_b = E_b^u J_b \quad (31)$$

und in den Gl. (20) und (22) lediglich

$$K_b = E_b^0 F_b \quad (32) \qquad \text{und} \qquad S_b = E_b^0 J_b \quad (33)$$

einzuführen.

Die in den Gl. (28) und (29) bei gegebener Kriechzahl φ einzusetzende Vorzahl ψ ergibt sich aus der allgemeinen Beziehung[1])

$$\psi = \frac{e^{\beta\varphi}-1}{e^{\beta\varphi}} \quad (34)$$

worin, wenn ψ^u ermittelt werden soll, β^u aus

$$\beta = \beta^u = \frac{\left(\frac{1}{K_{b_0}} + \frac{a^{u^2}}{S_{b_0}}\right)}{\frac{1}{K_s^u} + \frac{1}{K_{b_0}} + \frac{a^{u^2}}{S_{b_0}}} \quad (35)$$

und, wenn ψ^0 bestimmt werden soll, β^0 aus

$$\beta = \beta^0 = \frac{\left(\frac{1}{K_{b_0}} + \frac{a^{0^2}}{S_{b_0}}\right)}{\left(\frac{1}{K_s^0} + \frac{1}{K_{b_0}} + \frac{a^{0^2}}{S_{b_0}}\right)} \quad (36)$$

zu errechnen ist. In den Gl. (35) und (36) ist zu beachten, daß

$$K_{b_0} = E_{b_0} F_b \quad (37) \qquad \text{und} \qquad S_{b_0} = E_{b_0} J_b \quad (38)$$

einzuführen ist.

Nach Bestimmung der $\beta^u \cdot \varphi$- bzw. $\beta^0 \cdot \varphi$-Werte kann die jeweils dazugehörige Vorzahl ψ^u bzw. ψ^0 aus nachfolgender Tabelle 1 entnommen werden, die eine Ermittlung nach Gl. (34) überflüssig macht.

Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, daß das Einführen eines fiktiven Formänderungsmoduls in der oben vorgeschlagenen Art nicht als ein Näherungsverfahren anzusehen ist, sondern genau dieselben Ergebnisse liefert wie die bisher in der Literatur vorgeschlagenen exakten Ansätze zur Berücksich-

---

[1]) Fritz, B.: „Vereinfachtes Berechnungsverfahren für Stahlträger mit Betondruckplatte bei Berücksichtigung des Kriechens und Schwindens." Die Bautechnik 1950, H. 2.

Tabelle 1

$\beta\varphi$	ψ	$\beta\varphi$	ψ
0,00	1,000	0,40	1,229
0,05	1,025	0,45	1,263
0,10	1,052	0,50	1,297
0,15	1,079	0,60	1,370
0,20	1,107	0,70	1,448
0,25	1,136	0,80	1,532
0,30	1,166	0,90	1,622
0,35	1,197	1,00	1,718

tigung des Beton-Kriechens. Es bringt aber dadurch Vorteile, daß sich bei solchem Vorgehen allgemeine, übersichtliche und gebrauchsfertige Bemessungsformeln aufstellen lassen.

III. Die Auswirkung des Beton-Kriechens unter ständig vorhandenen Biegemomenten $\mathfrak{M}^g$

1. Zustand *vor* Beginn des Kriechens

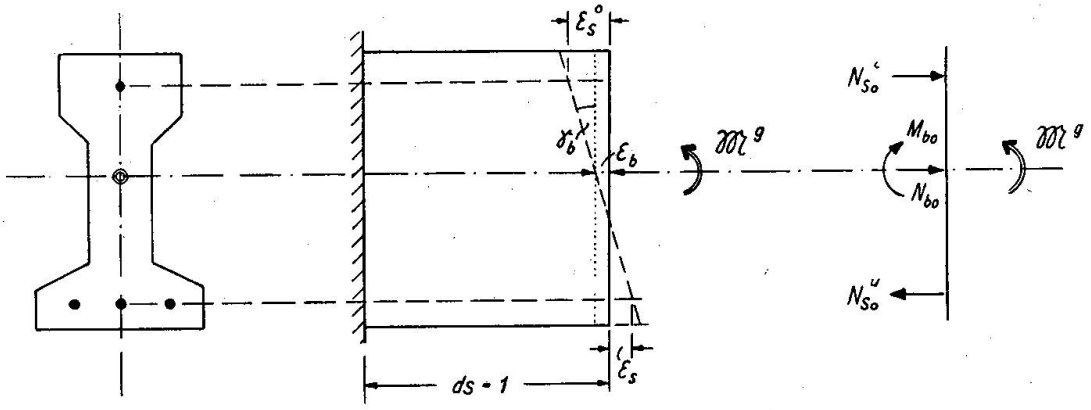

Fig. 4

Aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$N_{s_0}^0 - N_{s_0}^u + N_{b_0} = 0 \quad (39) \qquad \text{sowie} \qquad N_{s_0}^0 a^0 + N_{s_0}^u a^u + M_{b_0} - \mathfrak{M}^g = 0 \quad (40)$$

und den Verträglichkeitsbedingungen

$$\epsilon_s^u = \gamma_b \cdot a^u - \epsilon_b \qquad \epsilon_s^0 = \epsilon_b + \gamma_b \cdot a^0$$

bzw. $$\frac{N_{s_0}^u}{K_s^u} = \frac{M_{b_0}}{S_b} a^u - \frac{N_{b_0}}{K_b} \quad (41) \qquad \text{und} \qquad \frac{N_{s_0}^0}{K_s^0} = \frac{N_{b_0}}{K_b} + \frac{M_{b_0}}{S_b} a^0 \quad (42)$$

erhält man für die Unbekannten $N_{s_0}^u$ $N_{s_0}^0$ N_{b_0} M_{b_0} die Ausdrücke

$$N_{s_0}^u = \frac{D^u}{C^u}\,\mathfrak{M}^g \quad (+ = \text{Zug}) \quad (43) \qquad\qquad N_{s_0}^0 = \frac{D^0}{C^0}\,\mathfrak{M}^g \quad (+ = \text{Druck}) \quad (44)$$

$$N_{b_0} = N_{s_0}^u - N_{s_0}^0 \quad (+ = \text{Druck}) \qquad (45)$$

$$M_{b_0} = \mathfrak{M}^g - N_{s_0}^u a^u - N_{s_0}^0 a^0 \quad (+ = \text{pos. Mom.}) \qquad (46)$$

Darin ist $\quad D^u = \dfrac{a^u}{S_b} \quad (47) \quad$ und $\quad D^0 = \dfrac{a^0}{S_b} \quad (48)$

zu setzen. Für C^u und C^0 gelten die Gl. (21) und (22) mit den Vereinbarungen der Gl. (11) und (12).

2. Zustand *nach* Beendigung des Kriechens

Für die Berechnung der nach abgeschlossenem Kriechen vorhandenen Längskräfte N_s^u N_s^0 N_b und des Biegemomentes M_b ist bei der Ermittlung von D^u und C^u in gleicher Weise wie im vorausgegangenen Abschnitt wieder der fiktive Formänderungsmodul E_b^u nach Gl. (28) und bei der Bestimmung von D^0 und C^0 sinngemäß E_b^0 nach Gl. (29) einzuführen. Die jeweiligen Werte von K_b und S_b ergeben sich dann wieder aus den Gl. (30) bis (33).

Die Betonrandspannungen erhält man aus

$$\sigma_b^{u,0} = -\frac{N_b}{F_b} \mp \frac{M_b}{W_b^{u,0}} \qquad (49)$$

und die Spanngliedbeanspruchungen aus

$$\sigma_s^u = +\frac{N_s^u}{F_s^u} \quad (50) \qquad \text{und} \qquad \sigma_s^0 = -\frac{N_s^0}{F_s^0} \quad (51)$$

IV. Die Einwirkung kurzfristig auftretender Biegemomente $\mathfrak{M}^p$

Es gelten grundsätzlich die Beziehungen (43) bis (46).

Bei der Ermittlung von C^u C^0 D^u und D^0 ist stets mit K_b und S_b nach Gl. (11) und (12), d. h. mit E_{b_0} zu rechnen.

V. Der Einfluß des Beton-Schwindens

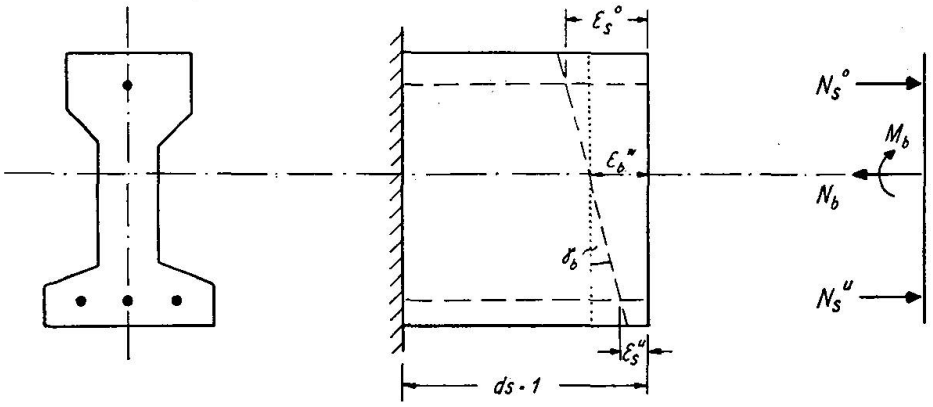

Fig. 5

Bezeichnet man mit $\epsilon_{Schw.}$ das Endschwindmaß bei unbehindertem Beton-Schwinden, so erhält man die Unbekannten $N_s^u\, N_s^0\, N_b\, M_b$ aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$N_s^u + N_s^0 - N_b = 0 \quad (52) \qquad M_b + N_s^0 a^0 - N_s^u a^u = 0 \quad (53)$$

und den Verträglichkeitsbedingungen

$$\epsilon_s^u = \epsilon_b^w - \gamma_b \cdot a^u = \epsilon_{Schw.} - \epsilon_b - \gamma_b a^u \quad \text{bzw.} \quad \frac{N_s^u}{K_s^u} = \epsilon_{Schw.} - \frac{N_b}{K_b} - \frac{M_b}{S_b} a^u \quad (54)$$

und

$$\epsilon_s^0 = \epsilon_b^w + \gamma_b a^0 = \epsilon_{Schw.} - \epsilon_b + \gamma_b a^0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{N_s^0}{K_s^0} = \epsilon_{Schw.} - \frac{N_b}{K_b} + \frac{M_b}{S_b} a^0 \quad (55)$$

mit

$$N_s^u = \frac{\epsilon_{Schw.}}{C^u} \; (+ = \text{Druck}) \quad (56) \qquad N_s^0 = \frac{\epsilon_{Schw.}}{C^0} \; (+ = \text{Druck}) \quad (57)$$

$$N_b = N_s^u + N_s^0 \; (+ = \text{Zug}) \quad (58) \qquad M_b = N_s^u a^u - N_s^0 a^0 \; (+ = \text{pos. Mom.}) \quad (59)$$

Die Verformungskennwerte C^u und C^0 erhält man aus den Gl. (21) und (22), in denen über die Gl. (30) (31) und (32) (33) der jeweilige „fiktive Formänderungsmodul“

$$E_b^u = \frac{E_{b_0}}{1 + \psi_s^u \cdot \varphi} \quad (60) \qquad \text{und} \qquad E_b^0 = \frac{E_{b_0}}{1 + \psi_s^0 \cdot \varphi} \quad (61)$$

einzuführen ist.

Die für den Schwindfall zu bestimmenden Vorzahlen $\psi_s^0\, \psi_s^u$ ergeben sich aus der allgemeinen Beziehung

$$\psi_s = \frac{e^{\beta\varphi}}{e^{\beta\varphi} - 1} - \frac{1}{\beta \cdot \varphi} \quad (63)$$

mit den aus den Gl. (35) und (36) errechneten Steifigkeitsverhältnissen β^u, β^0. Die zu den Werten $\beta^u \cdot \varphi$ und $\beta^0 \cdot \varphi$ gehörigen Vorzahlen ψ_s^u, ψ_s^0 können aus Tabelle 2 entnommen werden, die eine Ermittlung nach Gl. (63) überflüssig macht.

Tabelle 2

$\beta\varphi$	ψ_s	$\beta\varphi$	ψ_s
0,00	0,500	0,40	0,533
0,05	0,504	0,45	0,537
0,10	0,508	0,50	0,541
0,15	0,513	0,60	0,550
0,20	0,517	0,70	0,558
0,25	0,521	0,80	0,566
0,30	0,525	0,90	0,574
0,35	0,529	1,00	0,582

Die Beton-Randspannungen erhält man aus:

$$\sigma_b^{u,0} = +\frac{N_b}{F_b} \mp \frac{M_b}{W_b^{u,0}} \tag{64}$$

und die zusätzlichen Spanngliedbeanspruchungen aus

$$\sigma_s^u = -\frac{N_s^u}{F_s^u} \quad (65) \qquad \text{und} \qquad \sigma_s^0 = -\frac{N_s^0}{F_s^0} \quad (66)$$

V. Zahlenbeispiel

Es wird ein freiaufliegender Spannbetonträger von 4,00 m Stützweite aus Beton B 450 und Spannstahl St 165 (Sigma-Stahl) untersucht und bemessen.

1. Querschnittsgrößen

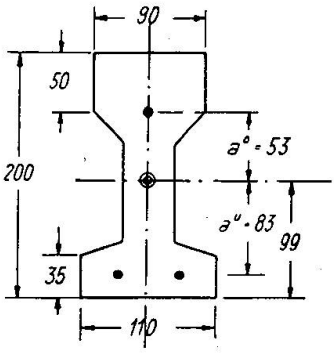

Fig. 6

$F_b = 139{,}25\ \text{cm}^2 \qquad J_b = 6059\ \text{cm}^4$

$F_s^u = 0{,}392\ \text{cm}^2 \qquad F_s^0 = 0{,}196\ \text{cm}^2$

$d = 20{,}0\ \text{cm} \qquad a^u = 8{,}3\ \text{cm} \qquad a^0 = \frac{J_b}{F_b a^u} = 5{,}3\ \text{cm}$

$W_b^0 = 600\ \text{cm}^3 \qquad W_b^u = 612\ \text{cm}^2$

2. Spannbettkräfte, Kriech- und Schwindmaß, Belastungsmomente

Beton-Elastizitätsmodul: $E_{b_0} = 350\,000\ \text{kg/cm}^2$
Spannstahl-Elastizitätsmodul: $E_s = 2\,000\,000\ \text{kg/cm}^2$

Spannstahlspannungen im Spannbett

$(\sigma_s^u)_V = +9070\ \text{kg/cm}^2 \qquad (\sigma_s^0)_V = +3000\ \text{kg/cm}^2$

Vorspannkräfte im Spannbett

$V^u = 0{,}392 \cdot 9070 = \mathit{3550}\ \text{kg} \qquad V^0 = 0{,}196 \cdot 3000 = \mathit{588}\ \text{kg}$
Kriechzahl: $\varphi = 3{,}00$ Schwindmaß: $\epsilon_{Schw.} = 0{,}00025$
Aus ruhender Last: ${}_{max}\mathfrak{M}^g = 0{,}2565\ \text{tm}$
Aus Nutzlast: ${}_{max}\mathfrak{M}^p = 0{,}2565\ \text{tm}$

3. Vorspannungszustand unmittelbar nach dem Umsetzen der Spannbettkräfte $V^u\,V^0$

Man bestimmt zunächst

$K_s^u = 0{,}392 \cdot 2\,000\,000 = 0{,}784 \cdot 10^6\ \text{kg} \qquad K_s^0 = 0{,}196 \cdot 2 \cdot 10^6 = 0{,}392 \cdot 10^6\ \text{kg}$
$K_b = 139{,}25 \cdot 350\,000 = 48{,}7 \cdot 10^6\ \text{kg} \qquad S_b = 6059 \cdot 350\,000 = 2120 \cdot 10^6\ \text{kgcm}^6$

aus den Gl. (9) bis (12), anschließend die Hilfsgrößen

$$10^6 \cdot A = \frac{1}{48{,}7} + \frac{8{,}3^2}{2120} = 0{,}0205 + 0{,}0325 = 0{,}0530 \frac{1}{\text{kg}}$$

$$10^6 \cdot B = \frac{1}{48{,}7} + \frac{5{,}3^2}{2120} = 0{,}0205 + 0{,}0132 = 0{,}0337 \frac{1}{\text{kg}}$$

$$10^6 \cdot C^u = \frac{1}{0{,}784} + \frac{1}{48{,}7} + \frac{8{,}3^2}{2120} = 1{,}3285 \frac{1}{\text{kg}}$$

$$10^6 \cdot C^0 = \frac{1}{0{,}392} + \frac{1}{48{,}7} + \frac{5{,}3^2}{2120} = 2{,}5848 \frac{1}{\text{kg}}$$

aus den Gl. (19) bis (22) und damit

$$\Delta N_s^u = 3550 \frac{0{,}0530}{1{,}3285} = +142 \text{ kg (Druck)}$$

$$\Delta N_s^0 = 588 \frac{0{,}0337}{2{,}5848} = + \quad 8 \text{ kg (Druck)}$$

aus Gl. (13), (14). Abschließend ergeben die Gl. (15) bis (18)

$$N_{s_0}^u = 3550 - 142 = +\mathit{3408} \text{ kg (Zug)}$$
$$N_{s_0}^0 = 588 - \quad 8 = + \mathit{580} \text{ kg (Zug)}$$
$$N_{b_0} = 3408 + 580 = +\mathit{3988} \text{ kg (Druck)}$$
$$M_{b_0} = 3408 \cdot 8{,}3 - 580 \cdot 5{,}3 = +25\,212 \text{ kgcm (negat. Mom.)}$$

Beton-Randspannungen:

$$\sigma_b^0 = -\frac{3988}{139{,}2} + \frac{25212}{600} = -28{,}7 + 42{,}0 = +\mathit{13{,}3} \text{ kg/cm}^2 \text{ (Zug)}$$

$$\sigma_b^u = -28{,}7 - \frac{25212}{612} = -\mathit{70{,}0} \text{ kg/cm}^2 \text{ (Druck)}$$

Spanngliedspannungen:

$$\sigma_s^u = +\frac{3408}{0{,}392} = +\mathit{8693} \text{ kg/cm}^2 \qquad \sigma_s^0 = +\frac{580}{0{,}196} = +\mathit{2959} \text{ kg/cm}^2$$

4. Vorspannungszustand nach der Auswirkung des Beton-Kriechens

Man bestimmt zunächst nach Gl. (35), (36)

$$\beta^u \cdot \varphi = \frac{0{,}0530}{1{,}3285} \cdot 3 = 0{,}1197 \quad \text{und} \quad \beta^0 \cdot \varphi = \frac{0{,}0337}{2{,}5848} \cdot 3 = 0{,}0392$$

und entnimmt dafür aus Tabelle 1 die Vorzahlen

$$\psi^u = 1{,}063 \quad \text{und} \quad \psi^0 = 1{,}02$$

Damit ermittelt man aus den Gl. (28), (29)

$$E_b^u = \frac{350000}{1+1{,}063\cdot 3} = 83\,300 \text{ kg/cm}^2 \qquad E_b^0 = \frac{350000}{1+1{,}02\cdot 3} = 86\,200 \text{ kg/cm}^2$$

Zur Bestimmung von A und C^u errechnet man aus den Gl. (30), (31)

$$K_b = 139{,}25\cdot 83\,300 = 11{,}61\cdot 10^6 \text{ kg} \qquad S_b = 6059\cdot 83\,300 = 504\cdot 10^6 \text{ kgcm}^2$$

und erhält aus Gl. (19) und (21)

$$10^6\cdot A = \frac{1}{11{,}61} + \frac{8{,}3^2}{504} = 0{,}0862 + 0{,}1365 = 0{,}2227\,\frac{1}{\text{kg}}$$

$$10^6\cdot C^u = \frac{1}{0{,}784} + \frac{1}{11{,}61} + \frac{8{,}3^2}{504} = 1{,}2755 + 0{,}0862 + 0{,}1365 = 1{,}4982\,\frac{1}{\text{kg}}$$

Für die Berechnung von B und C^0 erhält man aus Gl. (32), (33):

$$K_b = 139{,}25\cdot 86\,200 = 12{,}0\cdot 10^6 \text{ kg} \qquad S_b = 522\cdot 10^6 \text{ kgcm}^2$$

und damit aus den Gl. (20) und (22):

$$10^6\cdot B = \frac{1}{12{,}0} + \frac{5{,}3^2}{522} = 0{,}1371\,\frac{1}{\text{kg}}$$

$$10^6\cdot C^0 = \frac{1}{0{,}392} + \frac{1}{12{,}0} + \frac{5{,}3^2}{522} = 2{,}6881\,\frac{1}{\text{kg}}$$

Aus den Gl. (13) bis (18) erhält man dann

$$\Delta N_s^u = 3550\cdot\frac{0{,}2227}{1{,}4982} = 526 \text{ kg (Druck)} \qquad \Delta N_s^0 = 588\cdot\frac{0{,}1371}{2{,}688} = 30{,}0 \text{ kg (Druck)}$$

$$N_s^u = 3550 - 526 = 3024 \text{ kg (Zug)} \qquad N_s^0 = 588 - 30 = 558 \text{ kg (Zug)}$$

$$N_b = 3024 + 588 = 3582 \text{ kg (Druck)}$$

$$M_b = 3024\cdot 8{,}3 - 588\cdot 5{,}3 = 22\,142 \text{ kgcm (negat. Mom.)}$$

Beton-Randspannungen:

$$\sigma_b^0 = -\frac{3582}{139{,}25} + \frac{22142}{600} = +11{,}2 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_b^u = -\frac{3582}{139{,}25} - \frac{22142}{612} = -61{,}9 \text{ kg/cm}^2$$

Spanngliedspannungen:

$$\sigma_s^u = \frac{3024}{0{,}392} = +7714 \text{ kg/cm}^2 \qquad \sigma_s^0 = \frac{558}{0{,}196} = +2847 \text{ kg/cm}^2$$

5. Auswirkung des Beton-Kriechens unter ständigen Belastungen

$$_{max}\mathfrak{M}^g = 25\,650 \text{ kgcm}$$

Man erhält aus den Gl. (47) und (48)

$$10^6 \cdot D^u = \frac{8{,}3}{504} = 0{,}01646 \frac{1}{\text{kgcm}} \qquad \text{und} \qquad 10^6 \cdot D^0 = \frac{5{,}3}{522} = 0{,}01015 \frac{1}{\text{kgcm}}$$

und übernimmt (vgl. 4.)

$$10^6 \cdot C^u = 1{,}4982 \frac{1}{\text{kg}} \qquad 10^6 \cdot C^0 = 2{,}6881 \frac{1}{\text{kg}}$$

Damit ergibt sich aus den Gl. (43) bis (46):

$$N_s^u = \frac{0{,}01646}{1{,}4982} \cdot 25\,650 = 281{,}5 \text{ kg (Zug)}$$

$$N_s^0 = \frac{0{,}01015}{2{,}688} \cdot 25\,650 = 97{,}4 \text{ kg (Druck)}$$

$$N_b = 281{,}5 - 97{,}4 = 184{,}1 \text{ kg (Druck)}$$

$$M_b = 25\,650 - 97{,}4 \cdot 5{,}3 - 281{,}5 \cdot 8{,}3 = 22\,797 \text{ kgcm (pos. Mom.)}$$

Beton-Randspannungen:

$$\sigma_b^0 = -\frac{184{,}1}{139{,}25} - \frac{22\,797}{600} = -39{,}3 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_b^u = -\frac{184{,}1}{139{,}25} + \frac{22797}{612} = +36{,}0 \text{ kg/cm}^2$$

Spanngliedspannungen:

$$\sigma_s^u = \frac{281{,}5}{0{,}392} = +719 \text{ kg/cm}^2 \qquad \text{und} \qquad \sigma_s^0 = -\frac{97{,}4}{0{,}196} = -497 \text{ kg/cm}^2$$

6. Vorübergehend auftretende Belastungen

$$_{max}\mathfrak{M}^p = 25\,650 \text{ kgcm}$$

bzw.

$$_{max}\mathfrak{M}^g = 25\,650 \text{ kgcm}$$

vor dem Beginn des Beton-Kriechens.

Mit den im Abschnitt 3 aus den Gl. (11) und (12) errechneten Werten

$$K_b = 48{,}7 \cdot 10^6 \text{ kg} \quad \text{und} \quad S_b = 2120 \cdot 10^6 \text{ kgcm}^2$$

erhält man aus den Gl. (47), (48)

$$10^6 \cdot D^u = \frac{8{,}3}{2120} = 0{,}003914 \frac{1}{\text{kgcm}} \qquad 10^6 \cdot D^0 = \frac{5{,}3}{2120} = 0{,}00250 \frac{1}{\text{kgcm}}$$

und aus den Gl. (21), (21) die ebenfalls im Abschnitt 3 schon benützten Werte

$$10^6 \cdot C^u = 1{,}3285 \frac{1}{\text{kg}} \qquad 10^6 \cdot C^0 = 2{,}5848 \frac{1}{\text{kg}}$$

Damit ergibt sich aus den Gl. (43) bis (46)

$$N_{s_0}^u = \frac{0{,}003914}{1{,}3285} \cdot 25\,650 = 75{,}6 \text{ kg (Zug)}$$

$$N_{s_0}^0 = \frac{0{,}00250}{2{,}5848} \cdot 25\,650 = 24{,}8 \text{ kg (Druck)}$$

$$N_{b_0} = 75{,}6 - 24{,}8 = 50{,}8 \text{ kg (Druck)}$$

$$M_{b_0} = 25\,650 - 75{,}6 \cdot 8{,}3 - 24{,}8 \cdot 5{,}3 = 24\,891 \text{ kgcm (pos. Mom.)}$$

Beton-Randspannungen:

$$\sigma_b^0 = -\frac{50{,}8}{139{,}25} - \frac{24\,891}{600} = -\mathit{41{,}9} \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_b^u = -\frac{50{,}8}{139{,}25} + \frac{24891}{612} = +40{,}2 \text{ kg/cm}^2$$

Spanngliedspannungen:

$$\sigma_s^u = \frac{75{,}6}{0{,}392} = +\mathit{192{,}9} \text{ kg/cm}^2 \qquad \sigma_s^0 = -\frac{24{,}8}{0{,}196} = -\mathit{126{,}5} \text{ kg/cm}^2$$

Für das unter ständiger Belastung auftretende Biegemoment

$$_{max}\mathfrak{M}^g = 25\,650 \text{ kgcm}$$

erhält man *vor* der Auswirkung des Beton-Kriechens dieselben Beton-Randspannungen und Spanngliedspannungen.

7. Auswirkung des Beton-Schwindens bei Berücksichtigung des Kriecheinflusses

Für $\beta^u \cdot \varphi = 0{,}1197$ und $\beta^0 \cdot \varphi = 0{,}0392$

entnimmt man aus Tabelle 2:

$$\psi_s^u = 0{,}510 \quad \text{und} \quad \psi_s^0 = 0{,}503$$

Damit erhält man aus den Gl. (60), (61) jetzt

$$E_b^u = 138\,300 \text{ kg/cm}^2 \qquad E_b^0 = 139\,300 \text{ kg/cm}^2$$

Für die Ermittlung von C^u bestimmt man mit E_b^u

$$K_b = 139{,}25 \cdot 138\,300 = 19{,}26 \cdot 10^6 \text{ kg} \qquad S_b = 6059 \cdot 138\,300 = 837 \cdot 10^6 \text{ kgcm}^2$$

und erhält damit

$$10^6 \cdot C^u = \frac{1}{0{,}783} + \frac{1}{19{,}26} + \frac{8{,}3^2}{837} = 1{,}4097 \frac{1}{\text{kg}}$$

und sinngemäß mit E_b^0

$$K_b = 19{,}40 \cdot 10^6 \text{ kg} \qquad S_b = 843 \cdot 10^6 \text{ kgcm}^2$$

sowie aus Gl. (22)

$$10^6 \cdot C^0 = \frac{1}{0{,}392} + \frac{1}{19{,}4} + \frac{5{,}3^2}{843} = 2{,}636 \frac{1}{\text{kg}}$$

Die Gl. (56) bis (59) liefern dann

$$N_s^u = \frac{0{,}00025 \cdot 10^6}{1{,}4097} = 177{,}2 \text{ kg (Druck)}$$

$$N_s^0 = \frac{250}{2{,}636} = 95{,}0 \text{ kg (Druck)}$$

$$N_b = 177 + 95 = 272 \text{ kg (Zug)}$$

$$M_b = 177{,}2 \cdot 8{,}3 - 95 \cdot 5{,}3 = 967 \text{ kgcm (pos. Mom.)}$$

Beton-Randspannungen:

$$\sigma_b^0 = +\frac{272}{139{,}25} - \frac{967}{600} = +\mathit{0{,}3} \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_b^u = +\frac{272}{139{,}25} + \frac{967}{612} = +\mathit{3{,}5} \text{ kg/cm}^2$$

Spanngliedspannungen:

$$\sigma_s^u = -\frac{177{,}2}{0{,}392} = -\mathit{453} \text{ kg/cm}^2 \qquad \sigma_s^0 = -\frac{95}{0{,}192} = -\mathit{495} \text{ kg/cm}^2$$

8. Spannungszusammenstellungen

Vor dem Auswirken des Kriechens und Schwindens erhält man aus Vorspannung, ständiger Last und Nutzlast:

$$\sigma_b^0 = +13{,}3 - 41{,}9 - 41{,}9 = -\mathit{70{,}5} \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_b^u = -70{,}0 + 40{,}2 + 40{,}2 = +\mathit{10{,}4} \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_s^0 = +2959 - 126 - 126 = +\mathit{2707} \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_s^u = +8693 + 193 + 193 = +\mathit{9079} \text{ kg/cm}^2$$

Nach Auswirkung des Kriechens und Schwindens unter Vorspannung, ständiger Last und Nutzlast:

$$\sigma_b^0 = +11{,}2 - 39{,}3 - 41{,}9 + 0{,}3 = -\mathit{69{,}7} \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_b^u = -61{,}9 + 36{,}0 + 40{,}2 + 3{,}5 = +\mathit{17{,}8} \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_s^0 = +2847 - 497 - 126 - 495 = +\mathit{1729} \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_s^u = +7714 + 719 + 193 - 453 = +\mathit{8173} \text{ kg/cm}^2$$

Die durch Kriech- und Schwindeinflüsse bedingten Spannungsänderungen in den Spanngliedern ergeben sich aus:

$$\Delta \sigma_s^0 = -(2707 - 1729) = -\mathit{978} \text{ kg/cm}^2$$

$$\Delta \sigma_s^u = -(9079 - 8173) = -\mathit{906} \text{ kg/cm}^2$$

C. Exakte Berechnungstheorie für Spannbetonträger mit Koppelung

Im folgenden sind die Werte K_b und S_b stets nach den Gl. (11) und (12), d. h. mit E_{b_0} zu bestimmen.

I. Der Vorspannungszustand im Zeitpunkt des Umsetzens der Spannbettkräfte V^0 V^u auf den Betonträger

Aus den Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen erhält man:

$$\Delta N_s^u = \frac{\bar{A}\,C^0 - \bar{B}\,C}{C^0\,C^u - C^2} \quad (67) \qquad\qquad \Delta N_s^0 = \frac{\bar{B}\,C^u - \bar{A}\,C}{C^0\,C^u - C^2} \quad (68)$$

worin

$$C = \frac{1}{K_b} - \frac{a^0\,a^u}{S_b} \tag{69}$$

$$\bar{A} = \frac{V^u + V^0}{K_b} + \frac{(V^u a^u - V^0 a^0)}{S_b}\,a^u = V^u A + V^0 C \tag{70}$$

$$\bar{B} = \frac{V^u + V^0}{K_b} - \frac{(V^u a^u - V^0 a^0)}{S_b}\,a^0 = V^u C + V^0 B \tag{71}$$

gesetzt wurde, A und B nach Gl. (19) und (20) sowie C^0, C^u nach Gl. (21) und (22) einzuführen sind.

Die Hilfswerte K_b und S_b erhält man aus den Gl. (11) und (12).

Für $N_{s_0}^u$ $N_{s_0}^0$ und N_{b_0} M_{b_0} gelten die eingangs angeschriebenen Gl. (15) bis (18).

Ist

$$C = 0 \quad \text{d. h.} \quad a^0 = \frac{J_b}{F_b\,a^u}$$

so gehen die Gl. (67) und (68) in die Gl. (13) und (14) über, d. h. man erhält den Sonderfall, bei dem *keine* Koppelung vorliegt.

II. Die Einwirkung kurzfristig auftretender Biegemomente $\mathfrak{M}^p$ und ständig vorhandener Biegemomente $\mathfrak{M}^g$ im Zeitpunkt t_0, d. h. vor dem Einsetzen des Beton-Kriechens

Die Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen ergeben:

$$N_{s_0}^u = \frac{D^u\,C^0 + D^0\,C}{C^0\,C^u - C^2}\cdot\mathfrak{M} \quad (72) \qquad\qquad N_{s_0}^0 = \frac{D^u\,C + D^0\,C^u}{C^0\,C^u - C^2}\cdot\mathfrak{M} \quad (73)$$

worin C^u und C^0 aus den Gl. (21), (22) zu bestimmen sind, C sich aus Gl. (69) ergibt und D^u, D^0 aus den Gl. (47) und (48) ermittelt werden.

K_b und S_b erhält man wieder aus den Gl. (11) und (12).

Für N_{b_0} und M_{b_0} gelten die Gl. (45) und (46).

III. Die Auswirkung des Beton-Kriechens unter den Vorspannkräften

Im Zeitpunkt t_0, d. h. *vor* dem Einsetzen des Beton-Kriechens erhält man die Betonverkürzungen $\epsilon_{b_0}^0$ und $\epsilon_{b_0}^u$ in Höhe der oberen und unteren Spannglieder aus:

$$\epsilon_{b_0}^0 = \frac{N_{b_0}}{K_b} - \frac{M_{b_0}}{S_b} a^0 = \frac{N_{s_0}^0 + N_{s_0}^u}{K_b} - \frac{(N_{s_0}^u a^u - N_{s_0}^0 a^0)}{S_b} a^0 \tag{74}$$

$$\epsilon_{b_0}^u = \frac{N_{b_0}}{K_b} + \frac{M_{b_0}}{S_b} a^u = \frac{N_{s_0}^0 + N_{s_0}^u}{K_b} + \frac{(N_{s_0}^u a^u - N_{s_0}^0 a^0)}{S_b} a^u \tag{75}$$

Bezeichnet man die durch das Kriechen bis zum Zeitpunkt t ausgelösten Abminderungen der Spanngliedkräfte mit X, Y, die Verminderung der auf den Betonquerschnitt einwirkenden Längskraft mit $X + Y$ und die Änderung des Biegemomentes mit $-Y a^u + X a^0$, so erhält man für diese Größen die zusätzlichen Betondehnungen

$$\bar{\epsilon}_b^0 = -\frac{X+Y}{K_b} + \frac{(Y a^u - X a^0)}{S_b} a^0 \tag{76}$$

$$\bar{\epsilon}_b^u = -\frac{X+Y}{K_b} - \frac{(Y a^u - X a^0)}{S_b} a^u \tag{77}$$

und damit insgesamt:

$$\begin{aligned} \epsilon_b^0 &= \epsilon_{b_0}^0 + \bar{\epsilon}_b^0 = \epsilon_{b_0}^0 - X\left(\frac{1}{K_b} + \frac{a^{0^2}}{S_b}\right) - Y\left(\frac{1}{K_b} - \frac{a^u a^0}{S_b}\right) \\ &= \epsilon_{b_0}^0 - X B - Y C \end{aligned} \tag{78}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_b^u &= \epsilon_{b_0}^u + \bar{\epsilon}_b^u = \epsilon_{b_0}^u - X\left(\frac{1}{K_b} - \frac{a^u a^0}{S_b}\right) - Y\left(\frac{1}{K_b} + \frac{a^{u^2}}{S_b}\right) \\ &= \epsilon_{b_0}^u - X C - Y A \end{aligned} \tag{79}$$

Die Gleichgewichtsbedingungen im Zeitpunkt t ergeben:

$$N_s^u = V^u - \Delta N_s^u - Y = N_{s_0}^u - Y \tag{80}$$

$$N_s^0 = V^0 - \Delta N_s^0 - X = N_{s_0}^0 - X \tag{81}$$

$$N_b = N_{s_0}^u + N_{s_0}^0 - X - Y = N_{b_0} - X - Y \tag{82}$$

$$\begin{aligned} M_b &= V^u a^u - \Delta N_s^u a^u - Y a^u - V^0 a^0 + \Delta N_s^0 a^0 + X a^0 \\ &= N_{s_0}^u a^u - N_{s_0}^0 a^0 + X a^0 - Y a^u = M_{b_0} + X a^0 - Y a^u \end{aligned} \tag{83}$$

Da nun Beton und Spannstahl in Spanngliedhöhe dieselben Längenänderungen erfahren, erhält man mit dem für einen Zeitpunkt t und für ein bis dahin erreichtes Kriechmaß φ geltenden „Dischinger-Ansatz“:

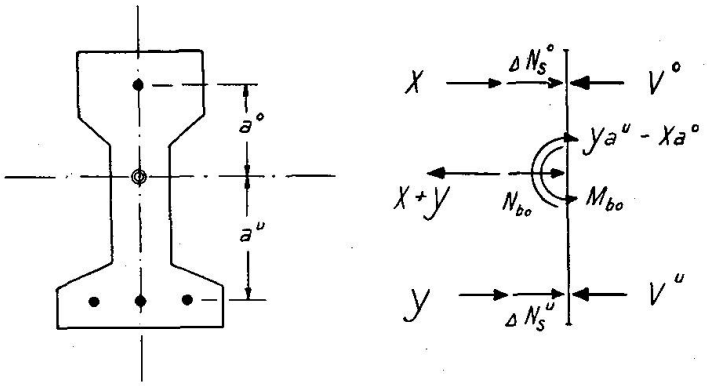

Fig. 7

$$\frac{\partial \epsilon_{b_t}}{\partial t} = \epsilon_{b_0} \frac{d\varphi}{dt} + \bar{\epsilon}_b \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\bar{\epsilon}_b}{dt} = \frac{d\epsilon_s}{dt} \tag{84}$$

die im vorliegenden Fall geltenden Gleichungen

$$\epsilon_{b_0}^0 \frac{d\varphi}{dt} - X B \frac{d\varphi}{dt} - Y C \frac{d\varphi}{dt} - B \frac{dX}{dt} - C \frac{dY}{dt} = \frac{1}{K_s^0} \cdot \frac{dX}{dt}$$

$$\epsilon_{b_0}^u \frac{d\varphi}{dt} - X C \frac{d\varphi}{dt} - Y A \frac{d\varphi}{dt} - C \frac{dX}{dt} - A \frac{dY}{dt} = \frac{1}{K_s^u} - \frac{dY}{dt}$$

woraus sich nach weiteren Umformungen die gekoppelten Differentialgleichungen

$$\epsilon_{b_0}^0 = X B + Y C + C^0 \frac{dX}{d\varphi} + C \frac{dY}{d\varphi} \tag{85}$$

$$\epsilon_{b_0}^u = X C + Y A + C^u \frac{dY}{d\varphi} + C \frac{dX}{d\varphi} \tag{86}$$

ergeben. Man sieht, daß für $C = 0$, d. h. für den eingangs auf andere Art abgeleiteten Sonderfall

$$a^0 = \frac{J_b}{F_b a^u} \tag{4}$$

keine Koppelung mehr besteht.

Aus dem Gleichungssystem (85)/(86) erhält man nun

$$X' + \frac{B C^u - C^2}{C^0 C^u - C^2} X + \frac{C C^u - A C}{C^0 C^u - C^2} Y = \frac{C^u \epsilon_{b_0}^0 - C \epsilon_{b_0}^u}{C^0 C^u - C^2}$$

$$Y' + \frac{C^0 C - B C}{C^0 C^u - C^2} X + \frac{A C^0 - C^2}{C^0 C^u - C^2} Y = \frac{C^0 \epsilon_{b_0}^u - C \epsilon_{b_0}^0}{C^0 C^u - C^2}$$

und mit

$$\frac{B\,C^u - C^2}{C^0\,C^u - C^2} = a_{11} \quad (87) \qquad \frac{C\,C^u - A\,C}{C^0\,C^u - C^2} = a_{12} \quad (88) \qquad \frac{C^u\,\epsilon_{b_0}^0 - C\,\epsilon_{b_0}^u}{C^0\,C^u - C^2} = a_{10} \quad (89)$$

$$\frac{C^0\,C - B\,C}{C^0\,C^u - C^2} = a_{21} \quad (90) \qquad \frac{A\,C^0 - C^2}{C^0\,C^u - C^2} = a_{22} \quad (91) \qquad \frac{C^0\,\epsilon_{b_0}^u - C\,\epsilon_{b_0}^0}{C^0\,C^u - C^2} = a_{20} \quad (92)$$

$$X' = -a_{11}\,X - a_{12}\,Y + a_{10} \tag{93}$$

$$Y' = -a_{21}\,X - a_{22}\,Y + a_{20} \tag{94}$$

1. Schritt: Koordinatentransformation

$$X_0 : Y_0 : 1 = \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & a_{10} \\ -a_{21} & -a_{22} & a_{20} \end{vmatrix}$$

$$X_0 = \frac{a_{22}\,a_{10} - a_{12}\,a_{20}}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}} \quad (95) \qquad Y_0 = \frac{a_{11}\,a_{20} - a_{21}\,a_{10}}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}} \quad (96)$$

2. Schritt: Bestimmung der charakteristischen Werte

Aus

$$\begin{vmatrix} (-a_{11} - \lambda) & -a_{12} \\ -a_{21} & (-a_{22} - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

erhält man:

$$\lambda^2 + \lambda\,\underbrace{(a_{11} + a_{22})}_{b_1} + \underbrace{(a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12})}_{b_2} = 0$$

und

$$\lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}\left(-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4\,b_2}\right) \tag{97}$$

3. Schritt:

$$X = X_0 + A_1\,e^{\lambda_1 \varphi} + B_1\,e^{\lambda_2 \varphi} \tag{98}$$

$$Y = Y_0 + A_2\,e^{\lambda_1 \varphi} + B_2\,e^{\lambda_2 \varphi} \tag{99}$$

Die gegenseitige Abhängigkeit der Konstanten erhält man aus:

$$A_2 : A_1 = \left| -a_{21}\,(-a_{22} - \lambda_1) \right|$$

$$A_2 = -A_1\,\frac{a_{21}}{a_{22} + \lambda_1} \tag{100}$$

$$B_1 : B_2 = \left| (a_{11} + \lambda_2)\,a_{12} \right|$$

$$B_1 = -B_2\,\frac{a_{12}}{a_{11} + \lambda_2} \tag{101}$$

Die Lösung läßt sich nun in der Form:

$$X = X_0 + R_1\,e^{\lambda_1 \varphi} - R_2\,\frac{a_{12}}{a_{11} + \lambda_2} \cdot e^{\lambda_2 \varphi} \tag{102}$$

$$Y = Y_0 - R_1\,\frac{a_{21}}{a_{22} + \lambda_1}\,e^{\lambda_1 \varphi} + R_2\,e^{\lambda_2 \varphi} \tag{103}$$

anschreiben, für die man aus den Randbedingungen

$$\varphi = 0 \qquad X = 0 \qquad Y = 0$$

$$R_1 = -\frac{X_0 \frac{a_{12}}{a_{11}+\lambda_2} Y_0}{\Delta} \quad (104) \qquad R_2 = -\frac{Y_0 + \frac{a_{21}}{a_{22}+\lambda_1} X_0}{\Delta} \quad (105)$$

erhält, wenn man

$$\Delta = 1 - \frac{a_{12} \cdot a_{21}}{(a_{11}+\lambda_2)(a_{22}+\lambda_1)} \tag{106}$$

setzt.

IV. Die Auswirkung des Beton-Kriechens unter ständig vorhandenen Biegemomenten $\mathfrak{M}^g$

Bei der Berechnung von $\epsilon_{b_0}^0$ und $\epsilon_{b_0}^u$ nach den Gl. (74) und (75) sind lediglich $N_{s_0}^u$ und $N_{s_0}^0$ mit Hilfe der Gl. (72) und (73) zu bestimmen und damit N_{b_0} und M_{b_0} nach den Gl. (45) und (46) zu ermitteln. Nach der Berechnung von X und Y erhält man dann

$$N_s^0 = N_{s_0}^0 + X \quad (107) \qquad N_s^u = N_s^u - Y \quad (108)$$

$$N_b = N_{b_0} - X - Y = N_s^u - N_s^0 \quad (109) \qquad M_b = \mathfrak{M}^g - N_s^u a^u - N_s^0 a^0 \quad (110)$$

V. Der Einfluß des Beton-Schwindens

Es ist anstelle von $\epsilon_{b_0}^0$ und $\epsilon_{b_0}^u$ lediglich $\frac{\epsilon_{Schw.}}{\varphi_E}$ einzuführen, worin $\epsilon_{Schw.}$ das Endschwindmaß und φ_E das Endkriechmaß bedeuten.

Aus den Gleichgewichtsbedingungen erhält man nach Bestimmung von X und Y

$$N_s^0 = X \quad (111) \qquad N_s^u = Y \quad (112) \qquad N_b = X + Y \quad (113)$$

und

$$M_b = Y a^u - X a^0 \quad (114)$$

(vgl. Abb. 5 und die Vorzeichenvereinbarung der Gl. (56) bis (59)).

VI. Zahlenbeispiel

Es wird das unter B. V. behandelte Anwendungsbeispiel für den Fall einer Koppelung untersucht, der dadurch gegeben ist, daß anstelle von

$$a^0 = \frac{J_b}{F_b a^u} = 5{,}3 \text{ cm} \quad \text{jetzt} \quad a^0 = 8{,}5 \text{ cm d.h.} > \frac{J_b}{F_b a^u}$$

eingeführt wird.

1. Gegebene Hilfswerte und Konstanten

$$K_b = 48{,}7 \cdot 10^6 \text{ kg} \qquad S_b = 2120 \cdot 10^6 \text{ kgcm}^2$$
$$K_s^0 = 0{,}392 \cdot 10^6 \text{ kg} \qquad K_s^u = 0{,}784 \cdot 10^6 \text{ kg}$$

$$10^6 \cdot A = \frac{1}{48{,}7} + \frac{8{,}3^2}{2120} = \mathit{0{,}0530} \qquad 10^6 \cdot B = \frac{1}{48{,}7} + \frac{8{,}5^2}{2120} = \mathit{0{,}0546}$$

$$10^6 \cdot C^0 = \frac{1}{0{,}392} + \frac{1}{48{,}7} + \frac{8{,}5^2}{2120} = \mathit{2{,}605} \qquad 10^6 \cdot C^u = \mathit{1{,}328}$$

$$10^6 \cdot C = \frac{1}{48{,}7} - \frac{8{,}5 \cdot 8{,}3}{2120} = -\mathit{0{,}0128} \neq 0$$

$$a_{11} = \frac{0{,}0546 \cdot 1{,}328 - 0{,}0128^2}{2{,}605 \cdot 1{,}328 - 0{,}0128^2} = \frac{0{,}07234}{3{,}459} = \mathit{0{,}02091}$$

$$a_{12} = \frac{-0{,}0128\,(1{,}328 - 0{,}053)}{3{,}459} = -\mathit{0{,}00742}$$

$$a_{21} = \frac{-0{,}0128\,(2{,}605 - 0{,}0546)}{3{,}459} = -\mathit{0{,}00944}$$

$$a_{22} = \frac{0{,}053 \cdot 2{,}605 - 0{,}0128^2}{3{,}459} = \mathit{0{,}03987} \qquad b_1 = a_{11} + a_{22} = \mathit{0{,}06078}$$

$$b_2 = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = \mathit{0{,}0007893}$$

$$\lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}\left(-0{,}06078 \pm \sqrt{0{,}003694 - 0{,}003157}\right) = \tfrac{1}{2}\left(-0{,}06078 \pm 0{,}02317\right)$$

$$\lambda_1 = -\mathit{0{,}018805}$$

$$\lambda_2 = -\mathit{0{,}041975}$$

$$\frac{a_{12}}{a_{11} + \lambda_2} = \frac{-0{,}00472}{0{,}020915 - 0{,}041975} = +\mathit{0{,}2241}$$

$$\frac{a_{21}}{a_{22} + \lambda_1} = \frac{-0{,}00944}{0{,}03987 - 0{,}01880} = -\mathit{0{,}4479}$$

$$\Delta = 1 - \frac{0{,}00472 \cdot 0{,}00944}{-0{,}02106 \cdot 0{,}02107} = 1 + \frac{0{,}4455}{4{,}4331} = \mathit{1{,}1005}$$

2. Auswirkung des Beton-Kriechens unter den Vorspannkräften mit $\varphi = 3{,}0$

Aus den Gl. (67) bis (71) erhält man

$$\Delta N_s^u = \mathit{136} \text{ kg (Druck)} \qquad \Delta N_s^0 = -\mathit{4{,}45} \text{ kg (Zug)}$$

und damit bei sinngemäßer Anwendung der Gl. (15) bis (18)

$$N_{s_0}^u = V^u - \Delta N_s^u = 3550 - 136 = \mathit{3414} \text{ kg}$$
$$N_{s_0}^0 = V^0 - \Delta N_s^0 = 588 + 4{,}4 = \mathit{592{,}4} \text{ kg}$$
$$N_{b_0} = N_{s_0}^0 + N_{s_0}^u = 3414 + 592 = \mathit{4006} \text{ kg}$$
$$M_{b_0} = N_{s_0}^u a^u - N_{s_0}^0 a^0 = 3414 \cdot 8{,}3 - 592 \cdot 8{,}5 = \mathit{23301} \text{ kgcm}$$

sowie aus Gl. (74) und (75)

$$10^6\,\epsilon_{b_0}^0 = \frac{4006}{48{,}7} - \frac{23301}{2120}\cdot 8{,}5 = -\mathit{11{,}16}$$

$$10^6\,\epsilon_{b_0}^u = \frac{4006}{48{,}7} + \frac{23301}{2120}\cdot 8{,}3 = +\mathit{173{,}48}$$

$$a_{10} = \frac{-1{,}328\cdot 11{,}16 + 0{,}0128\cdot 173{,}48}{3{,}459} = -\mathit{3{,}643}$$

$$a_{20} = \frac{2{,}605\cdot 173{,}48 - 0{,}0128\cdot 11{,}16}{3{,}459} = +\mathit{130{,}608}$$

$$X_0 = +\mathit{597{,}05}\ \text{kg} \qquad Y_0 = +\mathit{3417{,}3}\ \text{kg}$$
$$R_1 = -1238{,}4 \qquad R_2 = -2862{,}3$$

$$\begin{aligned} X &= 597{,}02 - 1238{,}4\cdot e^{-0{,}05641} + 2862{,}3\cdot 0{,}2241\cdot e^{-0{,}12592} = \\ &= 597{,}02 - 1170{,}54 + 565{,}56 = -\mathit{7{,}96}\ \text{kg} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= 3417{,}3 - 1238{,}4\cdot 0{,}4479\cdot e^{-0{,}05641} - 2862{,}3\cdot e^{-0{,}12592} = \\ &= 3417{,}3 - 524{,}28 - 2523{,}69 = +\mathit{369{,}4}\ \text{kg} \end{aligned}$$

Damit ergeben sich aus den Gl. (80) bis (83):

$$N_s^u = N_{s_0}^u - Y = 3414 - 369 = \mathit{3045}\ \text{kg (Zug)}$$
$$N_s^0 = N_{s_0}^0 - X = 592{,}4 + 7{,}96 = 600{,}3\ \text{kg (Zug)}$$
$$N_b = N_{b_0} - X - Y = 4006 + 7{,}9 - 369{,}4 = \mathit{3644{,}5}\ \text{kg (Druck)}$$
$$M_b = M_{b_0} + X\,a^0 - Y\,a^u = 23\,301 - 7{,}9\cdot 8{,}5 - 369{,}4\cdot 8{,}3 = \mathit{22\,927}\ \text{kgcm}$$
(neg. Moment)

3. Auswirkung des Kriechens unter ständig vorhandenen Biegemomenten $\mathfrak{M}^g$

$$10^6\cdot D^u = \frac{a^u}{S_b} = \frac{8{,}3}{2120} = \mathit{0{,}003915} \qquad 10^6\cdot D^0 = \frac{8{,}5}{2120} = \mathit{0{,}004009}$$

Aus den Gl. (72) und (73) erhält man:

$$N_{s_0}^u = +75{,}246\ \text{kg (Zug)} \qquad N_{s_0}^0 = +39{,}108\ \text{kg (Druck)}$$

und aus den Gl. (45) und (46):

$$N_{b_0} = \mathit{36{,}14}\ \text{kg (Druck)} \qquad M_{b_0} = \mathit{24693}\ \text{kgcm (pos. Moment)}$$

Damit ergeben sich:

$$10^6\,\epsilon_{b_0}^0 = \frac{36{,}14}{48{,}7} + \frac{24693\cdot 8{,}5}{2120} = +\ \mathit{99{,}747}$$

$$10^6\,\epsilon_{b_0}^u = \frac{36{,}14}{48{,}7} - \frac{24693\cdot 8{,}3}{2120} = -\ \mathit{95{,}933}$$

$$a_{10} = \quad 37{,}94 \qquad\qquad a_{20} = - \quad 71{,}88$$
$$X_0 = +1486{,}6 \text{ kg} \qquad\qquad Y_0 = -1451{,}0 \text{ kg}$$
$$R_1 = -1055{,}34 \qquad\qquad R_2 = +1923{,}50$$

$$X = \quad 1486{,}6 - 1055{,}34 \cdot 0{,}9452 - 1923{,}5 \cdot 0{,}2241 \cdot 0{,}8817 = +109{,}0 \text{ kg (Druck)}$$
$$Y = -1451{,}0 - 1055{,}4 \cdot 0{,}4479 \cdot 0{,}9452 + 1923{,}5 \cdot 0{,}8817 \quad = -201{,}8 \text{ kg (Zug)}$$

Die Gl. (107) bis (110) ergeben damit:

$$N_s^0 = 148{,}1 \text{ kg (Druck)} \qquad\qquad N_s^u = 277{,}0 \text{ kg (Zug)}$$
$$N_b = 128{,}9 \text{ kg (Druck)} \qquad\qquad M_b = 22092 \text{ kgcm (pos. Moment)}$$

4. Einfluß des Beton-Schwindens

Mit $\epsilon_{Schw.} = 0{,}00025$ und $\varphi = 3{,}0$ erhält man

$$10^6\,\epsilon_{b_0}^0 = 10^6\,\epsilon_{b_0}^u = 10^6 \cdot \frac{250}{3}$$

und damit aus den Gl. (89) und (92)

$$a_{10} = \quad 32{,}30 \qquad\qquad a_{20} = \quad 63{,}06$$
$$X_0 = \quad 2008{,}7 \text{ kg} \qquad\qquad Y_0 = \quad 2057{,}2 \text{ kg}$$
$$R_1 = -2244{,}2 \qquad\qquad R_2 = -1051{,}8$$

$$X = 2008{,}7 - 2244{,}2 \cdot 0{,}9452 + 1051{,}8 \cdot 0{,}2241 \cdot 0{,}8817 = \quad 95{,}3 \text{ kg} = N_s^0$$
$$Y = 2057{,}2 - 2244{,}2 \cdot 0{,}4479 \cdot 0{,}9452 - 1051{,}8 \cdot 0{,}8817 = 179{,}8 \text{ kg} = N_s^u$$

und aus den Gl. (113) und (114):

$$N_b = 275{,}1 \text{ kg (Zug)} \qquad\qquad M_b = 682{,}3 \text{ kgcm (pos. Moment)}$$

5. Beton-Randspannungen und Spannstahlbeanspruchungen im Zeitpunkt t_E

a) Vorspannung

$$\sigma_b^0 = -\frac{3644{,}5}{139{,}25} + \frac{22927}{600} = -26{,}2 + 38{,}2 = +12{,}0 \text{ kg/cm}^2 \ (+11{,}2)$$

$$\sigma_b^u = -26{,}2 - \frac{22927}{612} = \qquad\qquad -63{,}7 \text{ kg/cm}^2 \ (-61{,}9)$$

$$\sigma_s^0 = \frac{600{,}3}{0{,}196} = +3062 \text{ kg/cm}^2 \ (+2847)$$

$$\sigma_s^u = \frac{3045}{0{,}392} = +7765 \text{ kg/cm}^2 \ (+7714)$$

b) Ständig vorhandene Momente

$$\sigma_b^0 = -\frac{128{,}5}{139{,}25} - \frac{22092}{600} = -0{,}93 - 36{,}83 = -\mathit{37{,}76}\ \mathrm{kg/cm^2}\ (-39{,}3)$$

$$\sigma_b^u = -0{,}93 + \frac{22092}{612} = \qquad +\mathit{35{,}20}\ \mathrm{kg/cm^2}\ (+36{,}0)$$

$$\sigma_s^0 = -\frac{148{,}1}{0{,}196} = -\mathit{755}\ \mathrm{kg/cm^2}\ (-497)$$

$$\sigma_s^u = \frac{2770}{0{,}392} = +\mathit{707}\ \mathrm{kg/cm^2}\ (+719)$$

c) Schwinden

$$\sigma_b^0 = \frac{275{,}1}{139{,}25} - \frac{682{,}3}{600} = +1{,}97 - 1{,}14 = +\mathit{0{,}83}\ \mathrm{kg/cm^2}\ (+0{,}3)$$

$$\sigma_b^u = +1{,}97 + \frac{682{,}3}{612} = \qquad +\mathit{3{,}08}\ \mathrm{kg/cm^2}\ (+3{,}5)$$

$$\sigma_s^0 = -\frac{95{,}3}{0{,}192} = -496\ \mathrm{kg/cm^2}\ (-495)$$

$$\sigma_s^u = -\frac{179{,}8}{0{,}392} = -\mathit{458}\ \mathrm{kg/cm^2}\ (-453)$$

Die in Klammern beigefügten Spannungen sind die Werte, die sich aus dem ersten Zahlenbeispiel ergeben haben, bei dem der obere Spannstahl im Abstand

$$a^0 = \frac{J_b}{F_b\, a^u} = \mathit{5{,}3}\ \mathrm{cm}$$

von der Beton-Schwerachse verlegt und somit *keine* Koppelung vorhanden war.

D. Schlußbemerkungen

Wie schon eingangs erwähnt wurde, ist es in der Regel möglich, die Höhenlage a^0 der oberen Hilfs-Spannglieder so zu wählen, daß die erwünschte Entkoppelung erreicht wird und somit das unter *B* beschriebene einfachere Berechnungsverfahren Verwendung finden kann. Eine weitere Vereinfachung könnte dadurch noch erreicht werden, daß man anstelle der sich nach den Gl. (28) und (29) bzw. (60) und (61) nur wenig voneinander unterscheidenden Werte E_b^0 und E_b^u des „fiktiven Formänderungsmoduls" jeweils mit $E_b^0 \sim E_b^u$ rechnet.

Ist ausnahmsweise konstruktiv nur ein

$$a^0 \neq \frac{J_b}{F_b\, a^u}$$

möglich, so erhält man — wie ein Vergleich der Ergebnisse aus den beiden Zahlenbeispielen erkennen läßt — für die Beton-Randspannungen und die Beanspruchungen der unteren Haupt-Spannglieder mit der zusätzlichen Ver-

einfachung immer noch ausreichend genaue Werte. Größere Abweichungen von den exakt ermittelten Werten sind dann lediglich bei der Berechnung der Beanspruchungen in den oberen Spanngliedern zu erwarten. Sie sind aber praktisch bedeutungslos, weil die oberen Hilfs-Spannglieder erfahrungsgemäß nie voll ausgenützt werden.

Zusammenfassung

Die genauere Berechnung der Kriech- und Schwindeinflüsse bei in zwei Lagen, beispielsweise oben und unten, unsymmetrisch vorgespannten Spannbetonträgern führt auf ein System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen, dessen Ansätze und Lösungen für im Spannbett hergestellte Fertigteil-Träger gegeben werden.

Um eine einfachere Berechnung zu ermöglichen, wird auf einen in der Regel leicht erreichbaren Sonderfall aufmerksam gemacht, bei dem die Kopplung der Differentialgleichung entfällt. Es wird ferner gezeigt, daß sich bei Einführung eines fiktiven Formänderungsmoduls zur Berücksichtigung des Kriechens und Schwindens geschlossene Berechnungsformeln aufstellen lassen.

Summary

The more accurate calculation of the effects of creep and shrinkage of unsymmetric doubly prestressed (for example above and below) concrete girders leads to a system of two coupled differential equations, of which the setting-up and solution are given for precast girder sections installed in a stressing frame.

In order to make possible a simpler calculation, attention is drawn to a special case that is, as a rule, easily attainable, by which the coupling terms fall out of the differential equations. It is further shown that definitive calculation formulas can be set up by introducing a fictitious modulus of deformation to take account of creep and shrinkage.

Résumé

Le calcul précis des influences exercées par l'écoulement et le retrait, dans les poutres en béton précontraint avec dissymétrie, par exemple en-dessus et en-dessous, conduit à un système de deux équations différentielles accouplées, dont les énoncés et les solutions sont indiqués pour le cas des poutres constituées par des éléments préfabriqués.

Pour permettre un calcul plus simple, l'auteur traite d'un cas particulier, en règle générale aisément réalisable et dans lequel il n'y a plus couplage des équations différentielles. Il montre en outre que l'introduction d'un module fictif de déformation pour tenir compte de l'écoulement et du retrait permet d'établir des formules de calcul finies.