

# Über den Einfluss der Reibungskräfte und Leibungsdrücke bei der Vorspannung im Stahlbetonbau

Autor(en): **Swida, W.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **12 (1952)**

PDF erstellt am: **17.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-12325>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Über den Einfluß der Reibungskräfte und Leibungsdrücke bei der Vorspannung im Stahlbetonbau

*Influence des efforts de frottement et pressions d'intrados dans les ouvrages en béton armé précontraint*

*Regarding the influence of frictional forces and bearing pressures in connection with prestressing in steel-concrete structures*

Dr.-Ing. habil. W. SWIDA, Privatdozent an der Technischen Hochschule Karlsruhe

## I. Einleitung

Auf die Bedeutung der Vorspannungsverluste infolge der Reibung in gekrümmten Spanngliedern wurde öfters in der Fachliteratur hingewiesen<sup>1)</sup>. Bei großen Umlenkungswinkeln der Spannstähe (z. B. an den Stützen der Durchlaufträger) können die Vorspannungsverluste durch Reibung die Größenordnung der Verluste infolge des Kriechens und Schwindens erreichen.

Im folgenden wird der Einfluß der Reibungskräfte auf die Beanspruchung der Spannglieder und die Verteilung der Leibungsdrücke bei der Vorspannung ohne Verbund oder mit nachträglichem Verbund untersucht.

## 2. Reibungskräfte

(Eine Verallgemeinerung der Euler-Eytelwein-Grashof'schen-Gleichung)

Wir bezeichnen mit  $S$  die Beanspruchung in einem beliebigen Querschnitt des Spanngliedes, der durch den Winkel  $\vartheta$  (Fig. 1) bestimmt wird, und mit  $\mu$  die Reibungsziffer.

<sup>1)</sup> DISCHINGER, Weitgespannte Stahlbetonbalkenbrücken mit Vorspannung durch Seile und nachträglichem Verbund, Beton- und Stahlbetonbau 45 (1950), Heft 5, S. 97. — RÜSCHE, Erläuterungen zu den Richtlinien für die Bemessung vorgespannter Stahlbetonbauteile, Ziff. 5.33, Beton- und Stahlbetonbau 45 (1950), Heft 5, S. 110. — LEONHARDT und BAUR, Brücken aus Spannbeton, wirtschaftlich und einfach, Beton- und Stahlbetonbau, 45 (1950), Heft 8, S. 186, Abschnitt 4.

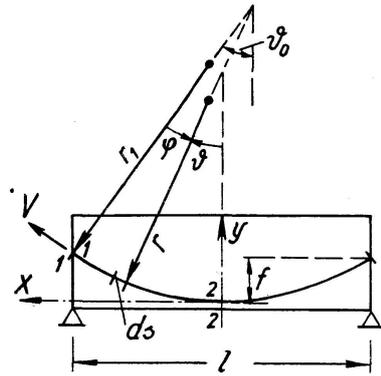


Fig. 1

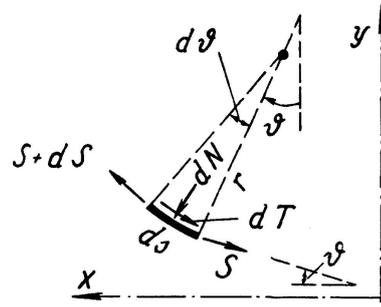


Fig. 2

Die Reibungskraft für das Element  $ds = r \cdot d\vartheta$  wird

$$dT = \mu \cdot dN,$$

wobei  $dN$  der elementare Leibungsdruck ist.

Die Gleichgewichtsbedingung des Elementes  $ds$  (Fig. 2) gegen Verschieben in Richtung von  $dN$  lautet:

$$S \cdot \sin \frac{d\vartheta}{2} + (S + dS) \sin \frac{d\vartheta}{2} - dN = 0. \quad (1)$$

Ersetzt man  $\sin \frac{d\vartheta}{2}$  durch  $\frac{d\vartheta}{2}$  und vernachlässigt  $dS \cdot \frac{d\vartheta}{2}$  als unendlich kleine Größe zweiter Ordnung, so erhält man:

$$dN = S \cdot d\vartheta. \quad (2)$$

Also ist

$$dT = \mu S \cdot d\vartheta \quad (3)$$

Die zweite Gleichgewichtsgleichung für das Element  $ds$  lautet:

$$(S + dS) - S - \mu S \cdot d\vartheta = 0,$$

oder

$$dS = \mu S d\vartheta = S \mu \cdot \frac{ds}{r}. \quad (4)$$

Bekanntlich ist für beliebige Kurve

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

Dann wird

$$d\vartheta = \frac{ds}{r} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2} dx}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Für den Sonderfall einer quadratischen Parabel (Fig. 1)

$$y = \frac{4fx^2}{l^2} \quad (6)$$

ist

$$d\vartheta = \frac{\frac{8f}{l^2} dx}{1 + \frac{64f^2 x^2}{l^4}}$$

und die Differentialgleichung (4) nimmt folgende Form an:

$$\frac{dS}{S} = \frac{8\mu \cdot f}{l^2} \cdot \frac{dx}{1 + \frac{64f^2 x^2}{l^4}}$$

Daraus folgt:

$$\ln S = \frac{8\mu f}{l^2} \int \frac{dx}{1 + \frac{64f^2 x^2}{l^4}} = \mu \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{8fx}{l^2} + \ln C$$

oder

$$S = C \cdot e^{\mu \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{8fx}{l^2}} \quad (7)$$

wobei  $e = 2,718$  die Grundzahl der natürlichen Logarithmen ist.

Man sieht aus Gl. (6), daß

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \vartheta = \frac{8fx}{l^2}$$

ist. Dann wird

$$\vartheta = \operatorname{arc\,tg} \frac{8fx}{l^2}$$

und die Gleichung (7) läßt sich einfacher darstellen:

$$S = C e^{\mu \vartheta}$$

Bei  $\vartheta = \vartheta_0$  ist  $S = V$ , wobei  $V$  die Vorspannkraft im Endquerschnitt 1-1 des Vorspanngliedes ist. Hieraus folgt:

$$V = C e^{\mu \vartheta_0}$$

und die willkürliche Konstante ergibt sich zu

$$C = V e^{-\mu \vartheta_0}$$

Man erhält endgültig:

$$\underline{S = V \cdot e^{\mu(\vartheta - \vartheta_0)}} \quad (8)$$

Es ist in einigen Fällen günstiger, an Stelle des Winkels  $\vartheta$  den Winkel

$$\varphi = \vartheta_0 - \vartheta$$

einzuführen (Fig. 1).

Man erhält dann für die Beanspruchung in einem beliebigen Querschnitt des Spannstabes folgende einfache Formel:

$$S = V \cdot e^{-\mu\varphi} = \frac{V}{e^{\mu\varphi}}. \quad (9)$$

Die oben angegebene Ableitung zeigt, daß die Formel (9) — schon früher von EULER (1736), EYTELWEIN (1814) und GRASHOF (1867) unter der Annahme einer *konstanten Krümmung* zur Ermittlung der Reibungsverluste in Maschinenelementen entwickelt — bei *beliebiger Form* des Spanngliedes verwendet werden kann.

Bei gleichzeitiger Vorspannung der beiden Enden des Spanngliedes hat der in der Symmetrieebene liegende Querschnitt 2–2 die kleinste Beanspruchung. Sie ergibt sich aus (8) mit  $\vartheta = 0$  (oder aus (9) mit  $\varphi = \vartheta_0$ ) zu

$$S_{min} = \frac{V}{e^{\mu\vartheta_0}}. \quad (10)$$

Der Vorspannkraftverlust in einem beliebigen Querschnitt infolge der Reibung wird

$$\Delta V = V - S = V - \frac{V}{e^{\mu\varphi}} = V \cdot \frac{e^{\mu\varphi} - 1}{e^{\mu\varphi}} \quad (11)$$

Die Gleichungen (8), (9) und (11) zeigen, daß der Vorspannungsabfall infolge der Reibung von der Form der Achse des Spanngliedes unabhängig ist. Er wird nur durch die Größe des Umlenkungswinkels  $\varphi$  bzw.  $\vartheta$  und die Reibungszahl  $\mu$  bestimmt. Bei den in Fig. 3 dargestellten Spanngliedern ergeben sich also die gleichen Spannungsverluste.

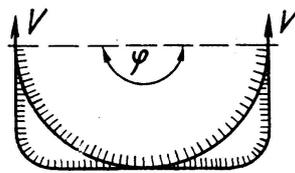


Fig. 3

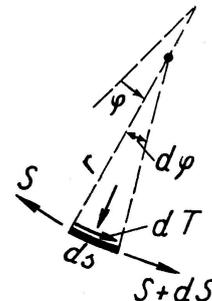


Fig. 4

Man kann die Formel (9) direkt aus der Gleichgewichtsbedingung des Elementes  $ds$  (Fig. 4) des Spannstabes ableiten, die lautet:

$$dS + \mu S \cdot d\varphi = 0$$

Daraus folgt:

$$\frac{dS}{S} = -\mu \cdot d\varphi,$$

$$\ln S = -\mu\varphi + \ln C,$$

$$S = C e^{-\mu\varphi}$$

Für  $\varphi = 0$  ist  $S = V$ . Es ist also

$$C = V.$$

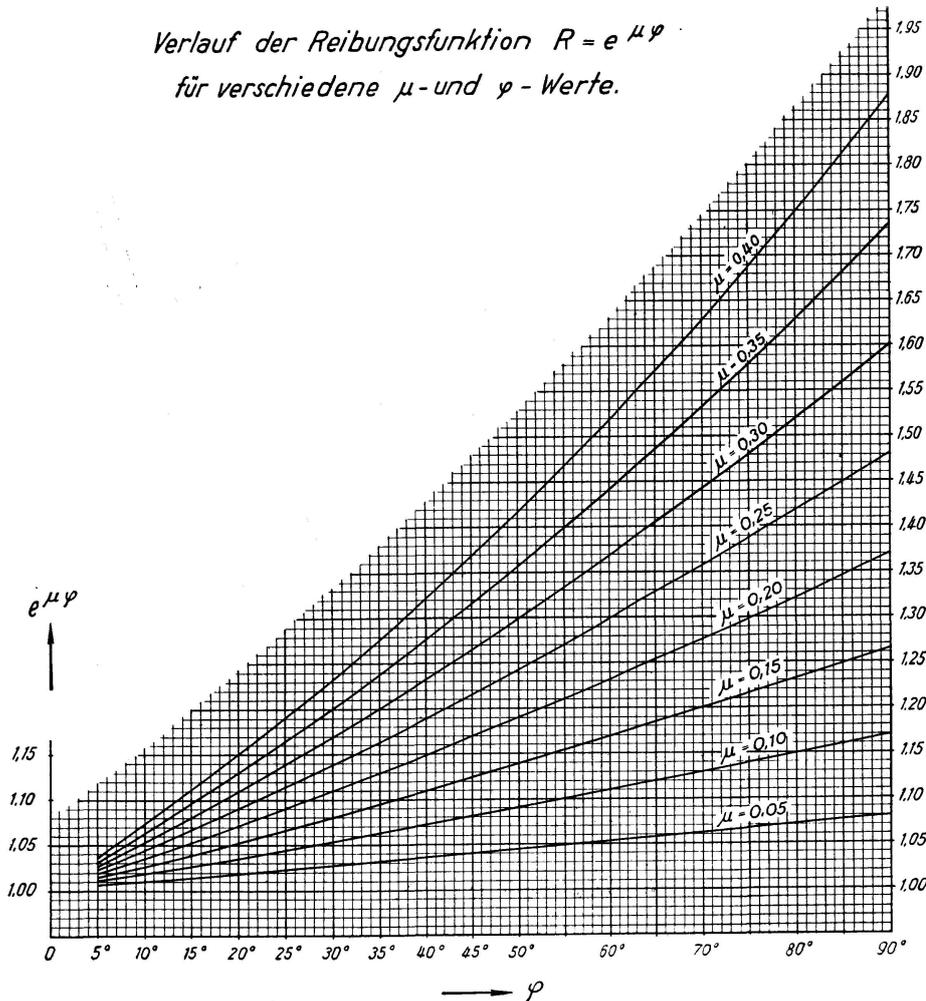
Tabelle I. Die Werte der Reibungsfunktion  $R = e^{\mu\varphi}$

$\varphi$	$\mu$							
	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
5° (0,0873)	1,005	1,009	1,013	1,018	1,022	1,026	1,031	1,036
10° (0,1745)	1,009	1,018	1,027	1,036	1,045	1,054	1,063	1,072
15° (0,2618)	1,014	1,027	1,040	1,054	1,068	1,082	1,096	1,110
20° (0,3491)	1,018	1,036	1,054	1,072	1,091	1,110	1,130	1,150
25° (0,4363)	1,022	1,045	1,068	1,091	1,115	1,140	1,165	1,191
30° (0,5236)	1,027	1,054	1,082	1,110	1,140	1,170	1,201	1,233
35° (0,6109)	1,031	1,063	1,096	1,130	1,165	1,201	1,239	1,277
40° (0,6981)	1,036	1,072	1,110	1,150	1,191	1,233	1,277	1,322
45° (0,7854)	1,040	1,082	1,125	1,170	1,217	1,266	1,317	1,369
50° (0,8727)	1,045	1,091	1,140	1,191	1,244	1,299	1,357	1,418
60° (1,0472)	1,054	1,110	1,170	1,233	1,299	1,369	1,443	1,520
70° (1,2217)	1,063	1,130	1,201	1,277	1,357	1,443	1,533	1,630
80° (1,3963)	1,072	1,150	1,233	1,322	1,418	1,520	1,630	1,748
90° (1,5708)	1,082	1,170	1,266	1,369	1,481	1,602	1,733	1,874

und

$$S = V e^{-\mu\varphi} = \frac{V}{e^{\mu\varphi}}. \tag{9}$$

Verlauf der Reibungsfunktion  $R = e^{\mu\varphi}$   
für verschiedene  $\mu$ - und  $\varphi$ -Werte.



Tafel I

Die Funktion

$$R = e^{\mu\varphi}$$

kann als *Reibungsfunktion* bezeichnet werden.

Für große Schätzungen kann  $\mu$  zu 0,10 bis 0,25 gewählt werden. Die vom Verfasser errechneten Werte von  $e^{\mu\varphi}$  sind in der Tabelle I angegeben. Der Verlauf der Reibungsfunktion  $R = e^{\mu\varphi}$  für verschiedene  $\mu$ - und  $\varphi$ -Werte ist auf der Tafel I dargestellt.

### 3. Leibungsdrücke (Pressungen zwischen Spannglied und Unterlage)

Ist die Beanspruchung des Spannstabes in einem beliebigen Querschnitt bekannt, so läßt sich der entsprechende Leibungsdruck zwischen dem Spannstab und den Blechröhren sehr einfach bestimmen.

Wir betrachten eine Längeneinheit (Fig. 5) des Spanngliedes und bezeichnen den zugehörigen Leibungsdruck mit  $N$  ( $\frac{t}{\text{cm}}$ ). Es wird angenommen, daß der Zentriwinkel  $1/r$  oder  $\frac{1}{r+\Delta r}$  genügend klein ist. Dann lautet die Gleichgewichtsbedingung gegen Verschieben in Richtung von  $N$ :

$$\frac{S}{2r} + \frac{S+\Delta S}{2(r+\Delta r)} = N$$

Man erhält unter Vernachlässigung von  $\Delta S$  und  $\Delta r$

$$N = \frac{S}{r} = \frac{V}{r} \cdot e^{\mu(\vartheta-\vartheta_0)} = \frac{V}{r \cdot e^{\mu\varphi}} \quad (12)$$

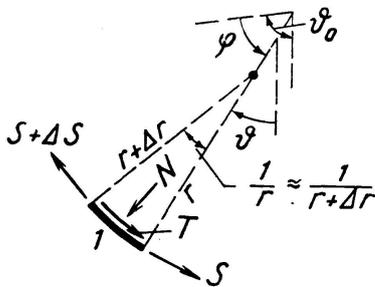


Fig. 5

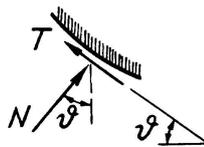


Fig. 6

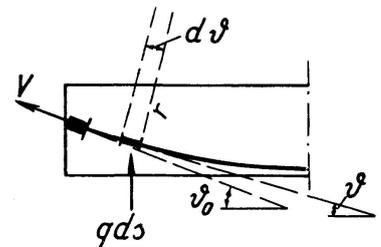


Fig. 7

Die Reibungskraft je Längeneinheit des Spannstabes wird

$$T = \mu N = \frac{\mu S}{r} = \frac{\mu V}{r} \cdot e^{\mu(\vartheta-\vartheta_0)} = \frac{\mu \cdot V}{r \cdot e^{\mu\varphi}} \quad (12')$$

Nun ermitteln wir die vertikale Belastung des vorgespannten Trägers durch die lotrechten Komponenten von  $N$  und  $T$ . Aus Fig. 6 kann man ersehen, daß diese Belastung für eine Längeneinheit des Spannstabes beträgt

$$\begin{aligned} q &= N \cos \vartheta + T \sin \vartheta = \frac{S}{r} (\cos \vartheta + \mu \sin \vartheta) = \\ &= \frac{V}{r} e^{\mu(\vartheta-\vartheta_0)} \cdot (\cos \vartheta + \mu \sin \vartheta). \end{aligned} \quad (13)$$

Man erhält also für eine Längeneinheit der waagerechten Projektion des Spanngliedes einen vertikalen Druck von

$$\begin{aligned} q_v &= \frac{q}{\cos \vartheta} = N + T \operatorname{tg} \vartheta = \frac{S}{r} (1 + \mu \operatorname{tg} \vartheta) = \\ &= \frac{V}{r} e^{\mu(\vartheta - \vartheta_0)} \cdot (1 + \mu \operatorname{tg} \vartheta). \end{aligned} \quad (14)$$

Unter Vernachlässigung der Reibung ( $\mu = 0$ ) ist

$$q_v = \frac{V}{r} \quad (15)$$

Bei beliebiger Form des Spanngliedes muß die Summe der vertikalen Komponenten der Leibungsdrücke und Reibungskräfte gleich der Summe der vertikalen Komponenten der Vorspannkkräfte sein.

So erhält man z. B. für die in Fig. 7 dargestellte Hälfte eines vorgespannten Trägers folgenden Ausdruck für die Summe der vertikalen Komponenten der Leibungsdrücke und Reibungskräfte:

$$\begin{aligned} \int_0^{\vartheta_0} q ds &= \int_0^{\vartheta_0} \frac{S}{r} (\cos \vartheta + \mu \sin \vartheta) r \cdot d\vartheta = \int_0^{\vartheta_0} V e^{\mu(\vartheta - \vartheta_0)} \cdot (\cos \vartheta + \mu \sin \vartheta) d\vartheta = \\ &= \frac{V}{e^{\mu\vartheta_0}} \left( \int_0^{\vartheta_0} e^{\mu\vartheta} \cdot \cos \vartheta \cdot d\vartheta + \mu \int_0^{\vartheta_0} e^{\mu\vartheta} \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta \right) = \\ &= \frac{V}{(1 + \mu^2) e^{\mu\vartheta_0}} \left[ (\mu \cos \vartheta + \sin \vartheta) e^{\mu\vartheta} + \mu (\mu \sin \vartheta - \cos \vartheta) e^{\mu\vartheta} \right]_0^{\vartheta_0} = \\ &= \frac{V}{(1 + \mu^2) e^{\mu\vartheta_0}} \left[ (1 + \mu^2) e^{\mu\vartheta} \cdot \sin \vartheta \right]_0^{\vartheta_0} = V \sin \vartheta_0. \end{aligned}$$

$V \sin \vartheta_0$  ist aber die lotrechte Komponente der Vorspannkraft im Endquerschnitt.

#### 4. Ein Sonderfall

Wir ermitteln die Verteilung der Pressungen und die Spannungsverluste infolge Reibung bei beiderseitiger Vorspannung eines Trägers mit parabolischem Spannglied, dessen Achse durch die Gleichung:

$$y = \frac{4f x^2}{l^2}$$

angegeben ist. Die Krümmung an einer beliebigen Stelle wird auf Grund von (5)

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{8f}{l^2}}{\left(1 + \frac{64f^2 x^2}{l^4}\right)^{3/2}}$$

Die Vorspannkraft wird zu

$$V = \frac{g l^2}{8 f}$$

gewählt, wobei  $g$  die gleichmäßig verteilte Belastung ist (Fig. 8).

Der vertikale Leibungsdruck je Längeneinheit des Trägers ergibt sich nach (15) ohne Berücksichtigung der Reibung zu

$$q_v = \frac{V}{r} = \frac{\frac{8 f V}{l^2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{64 f^2 x^2}{l^4}\right)^3}} = \frac{g}{\sqrt{\left(1 + \frac{64 f^2 x^2}{l^4}\right)^3}}$$

In der Trägermitte (bei  $x=0$ ) wird

$$q_v = \frac{8 f V}{l^2} = g.$$

Für  $f=0,1 l$  wird an der Stütze

$$q_v = \frac{6,4 f V}{l^2} = 0,8 g.$$

Nun ermitteln wir den vertikalen Druck  $q_v$  je Längeneinheit des Trägers mit Rücksicht auf die Reibung.

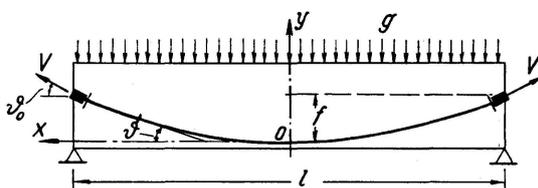


Fig. 8

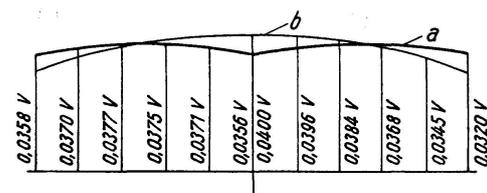
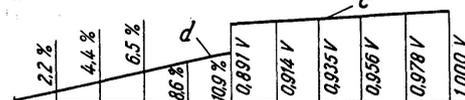


Fig. 9



*Kurve a* - Verteilung der vertikalen Leibungsdrücke unter Berücksichtigung der Reibung.

*Kurve b* - Verteilung der vertikalen Leibungsdrücke ohne Berücksichtigung der Reibung.

*Kurve c* - Änderung der Vorspannkraft.

*Kurve d* - Vorspannungsverluste in %.

Aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{dy}{dx} = \frac{8 f x}{l^2}$$

folgt:

$$\vartheta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{8 f x}{l^2}, \quad \vartheta_0 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{4 f}{l}.$$

Man erhält auf Grund von (14)

$$q_v = \frac{8 f V}{l^2 \left(1 + \frac{64 f^2 x^2}{l^4}\right)^{3/2}} \cdot \left(1 + \frac{8 f x \mu}{l^2}\right) e^{\eta}, \quad (16)$$

wobei

$$\eta = \mu \left( \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{8 f x}{l^2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{4 f}{l} \right)$$

ist. Die Ermittlung von  $q_v$  ist für  $l=20$  m,  $f=2,0$  m und  $\mu=0,3$  in Tabelle II angegeben. Die Vorspannkraftverluste infolge Reibung, die sich nach der Formel

$$\Delta V = V - S = V [1 - e^{\mu(\vartheta - \vartheta_0)}] = V (1 - e^\eta)$$

errechnen lassen, sind in der letzten Spalte der Tabelle II angeführt. Die Verteilung der Pressungen und der Vorspannkraftverluste ist in Fig. 9 dargestellt.

Tabelle II

$x$ (m)	$\frac{8fx}{l^2}$	$\mu \frac{8fx}{l^2}$	$\frac{64f^2x^2}{l^4}$	$\sqrt{\left(1 + \frac{64f^2x^2}{l^4}\right)^3}$	$\text{arc tg } \frac{8fx}{l^2}$	$\eta$	$e^\eta$	$q_v$	$\Delta V$ (%)
0	0,00	0,000	0,0000	1,000	0,000	-0,1143	0,891	0,0356 V	10,9
2	0,08	0,024	0,0064	1,010	0,080	-0,0903	0,914	0,0371 V	8,6
4	0,16	0,048	0,0256	1,040	0,158	-0,0667	0,935	0,0375 V	6,5
6	0,24	0,072	0,0576	1,088	0,236	-0,0435	0,956	0,0377 V	4,4
8	0,32	0,096	0,1024	1,157	0,311	-0,0210	0,978	0,0370 V	2,2
10	0,40	0,120	0,1600	1,250	0,381	0,000	1,000	0,0358 V	0,0

### 5. Beanspruchung des Trägers durch die Wirkung des Spanngliedes

Nun ermitteln wir das Biegemoment, das im Querschnitt des vorgespannten Trägers durch die Wirkung des Spanngliedes hervorgerufen wird.

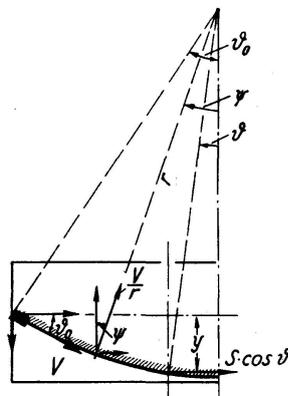


Fig. 10

Unter Vernachlässigung der Reibung ergibt sich für einen Spannstab mit kreisförmiger Achse (Fig. 10) eine konstante Normalpressung von

$$N = \frac{S}{r} = \frac{V}{r}$$

Ihre Komponenten sind:  $\frac{V}{r} \cos \psi$  und  $\frac{V}{r} \sin \psi$ .

In dem durch den Winkel  $\vartheta$  bestimmten Querschnitt wirkt das Biegemoment

$$\begin{aligned}
M &= -V \sin \vartheta_0 (r \sin \vartheta_0 - r \sin \vartheta) + \int_{\vartheta}^{\vartheta_0} \frac{V}{r} \cos \psi (r \sin \psi - \\
&\quad - r \sin \vartheta) r \cdot d\psi - \int_{\vartheta}^{\vartheta_0} \frac{V}{r} \sin \psi (r \cos \psi - r \cos \vartheta_0) r \cdot d\psi = \\
&= -V \cdot r (\sin \vartheta_0 - \sin \vartheta) \sin \vartheta_0 - V r \sin \vartheta \int_{\vartheta}^{\vartheta_0} \cos \psi \cdot d\psi + \\
&\quad + V r \cdot \cos \vartheta_0 \int_{\vartheta}^{\vartheta_0} \sin \psi d\psi = V r (\sin^2 \vartheta + \cos \vartheta_0 \cos \vartheta - 1) = \\
&= -V \cos \vartheta (r \cos \vartheta - r \cos \vartheta_0) = -V \cdot y \cdot \cos \vartheta = -S \cdot y \cdot \cos \vartheta. \quad (17)
\end{aligned}$$

Dabei ist  $S \cdot \cos \vartheta$  die waagrechte Komponente der Vorspannkraft und  $y$  der vertikale Abstand des Spanngliedes von dem Schwerpunkt des Querschnittes.

*Der in der Praxis häufig verwendete Ausdruck für das Biegemoment*

$$M = -S y \cos \vartheta,$$

kann also leicht aus der Betrachtung der Wirkung der Leibungsdrücke erhalten werden. Durch die Wirkung der Horizontalkraft  $S \cdot \cos \vartheta$  wird der Träger zusätzlich auf Druck beansprucht.

## 6. Beispiele

a) *Erstes Beispiel.* Für das Zugglied  $ABC$  (Fig. 11) ist der Vorspannungsverlust infolge Reibung zu ermitteln. Der Spannstab wird gleichzeitig von den beiden Enden vorgespannt.

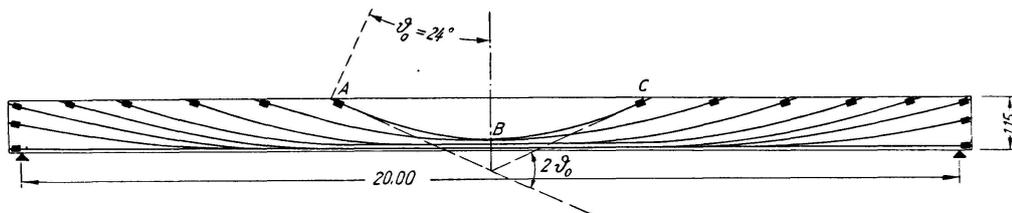


Fig. 11

Die Reibungszahl  $\mu$  beträgt 0,18 und der Umlenkungswinkel  $\vartheta_0$  für die Hälfte des Stabes ist  $24^\circ$ .

Mit  $\vartheta_0 = \varphi = 24^\circ$  und  $\mu = 0,18$  erhält man aus Tafel I:

$$R = e^{\mu \varphi} = 1,08$$

Die Beanspruchung des Spanngliedes an der Stelle  $B$  ergibt sich auf Grund von (10) zu

$$S_{min} = \frac{V}{R} = 0,925 V.$$

Der Spannkraftverlust beträgt 7,5%.

Wird die Spannprese nur an einem Stabende eingesetzt (z. B. an der Stelle  $A$ ), so wird

$$\varphi = 48^\circ,$$

$$R = e^{\mu \varphi} = 1,17$$

$$S_{min} = \frac{V}{R} = 0,855 V$$

Der Vorspannungsverlust beträgt diesmal 14,5%. Dabei ist  $V$  die Vorspannkraft im Querschnitt  $A$ . Bei  $\mu = 0,1$  beträgt der Vorspannungsverlust 4% bzw. 8%.

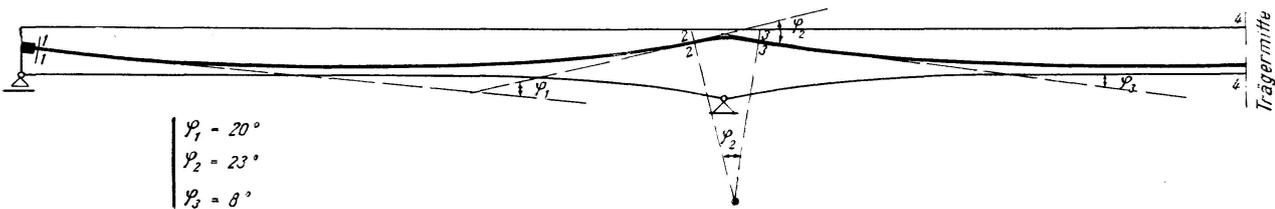


Fig. 12

b) *Zweites Beispiel.* Für einen Durchlaufträger, von dem in Fig. 12 *nur die Hälfte* dargestellt ist, ist die Verminderung der Vorspannkraft durch die Reibung für die Querschnitte 2, 3 und 4 zu ermitteln. Das Zugglied wird gleichzeitig von den beiden Enden vorgespannt.

Die Reibungsziffer  $\mu$  beträgt 0,2; die Umlenkungswinkel sind:  $\varphi_1 = 20^\circ$ ,  $\varphi_2 = 23^\circ$  und  $\varphi_3 = 8^\circ$ . Die Schnitte 2 und 3 entsprechen den Wendepunkten der Stabachse.

Die Spannkraft im Schnitt 2 ergibt sich auf Grund von (9) und der Tafel I (oder Tabelle I) zu

$$S_2 = \frac{S_1}{e^{\mu \varphi_1}} = \frac{V}{e^{\mu \varphi_1}} = \frac{V}{1,072} = 0,93 V.$$

Man erhält in ähnlicher Weise:

$$S_3 = \frac{S_2}{e^{\mu \varphi_2}} = \frac{V}{e^{\mu(\varphi_1 + \varphi_2)}} = \frac{V}{1,162} = 0,86 V,$$

$$S_4 = \frac{S_3}{e^{\mu \varphi_3}} = \frac{V}{e^{\mu(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)}} = \frac{V}{1,195} = 0,84 V$$

Der Vorspannkraftverlust beträgt also für die Trägermitte 16%.

Hat das Zugglied mehrere Wendepunkte, so ist

$$S = \frac{V}{e^{\mu \cdot \Sigma \varphi}}. \quad (18)$$

### Bibliography

1. M. RITTER und P. LARDY, *Vorgespannter Beton*, Zürich 1946.
2. G. MAGNEL, *Le béton précontraint*, Gand, 1948.
3. J. BARETS, *Le béton précontraint*, Paris 1950.

### Zusammenfassung

Die Bedeutung der Vorspannungsverluste infolge der Reibung wird sehr oft beim Entwerfen der vorgespannten Konstruktionen unterschätzt.

Im Aufsatz wird zunächst eine Verallgemeinerung der Euler-Eytelwein-Grashof'schen-Gleichung angegeben, die zeigt, daß diese bei beliebiger Form des Spanngliedes gültig ist. Die beigegebene Tafel erleichtert eine schnelle Ermittlung der Reibungsverluste bei verschiedenen Umlenkungswinkeln und Reibungsziffern. Die Zahlenbeispiele zeigen, daß der Vorspannungsverlust infolge der Reibung bei großen Umlenkungswinkeln von wesentlicher Bedeutung ist.

Ferner wird die durch die Reibungskräfte verursachte Änderung in der Verteilung der Leibungsdrücke untersucht.

### Résumé

Dans l'étude des ouvrages en béton armé précontraint, l'importance des pertes de précontrainte sous l'effet du frottement est fréquemment sous-estimée.

L'auteur indique tout d'abord une généralisation de la relation d'Euler-Eytelwein-Grashof qui montre que cette relation est valable quelle que soit la forme de l'élément considéré. Un tableau permet une détermination plus rapide des pertes par frottement, pour différents angles de déviation et coefficients de frottement. Des exemples numériques montrent que pour les valeurs élevées des angles de déviation, les pertes de précontrainte par frottement présentent une notable importance.

Enfin, l'auteur étudie les modifications apportées à la répartition des pressions d'intrados par les efforts de frottement.

### Summary

The importance of the prestressing losses in consequence of friction is often underestimated when designing prestressed constructions.

In the paper, a generalisation of the Euler-Eytelwein-Grashof equation is first given, which shows that it holds good for any desired shape of tensioning member. The given table facilitates quick determination of the frictional losses for various angles of deflection and coefficients of friction. The numerical examples show that the prestressing loss in consequence of friction is of considerable importance when the angles of deflection are large.

Further, an investigation is made as to the alteration in distribution of the bearing pressures that is caused by the frictional forces.