

# Plaques rectangulaires anisotropes reposant librement sur deux côtés opposés seulement et soumises à la flexion sous charges normales à leur plan

Autor(en): **Gedizli, H.S.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **11 (1951)**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-11430>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# **Plaques rectangulaires anisotropes reposant librement sur deux côtés opposés seulement et soumises à la flexion sous charges normales à leur plan**

*Biegung rechteckiger, zweiseitig frei aufliegender anisotroper Platten unter Belastung senkrecht zur Mittelebene*

*Bending of rectangular anisotropic slabs, supported free at two sides and loaded normal to the middle plane*

Ing.-dipl. H. S. GEDIZLI, Ankara (Turquie)

## **I. Bibliographie**

1. BEYER: Die Statik im Stahlbetonbau, 1948, Springer, Berlin.
2. GAUSSENS: Développements numériques des formules de M. MALLET, Travaux, Mars, Avril, 1948, Science et Industrie, Paris.
3. GEDIZLI: İs. Sb. Teknik El Kitabı, 1951, Gnkur. Basımevi, Ankara.
4. GIRKMANN: Flächentragwerke, 1948, Springer, Wien.
5. HOMBERG und WEINMEISTER: Einflußflächen für Trägerroste, 1949, Verfasser, Westfalen.
6. HUBER: Théorie des Dalles, Publication préliminaire du premier Congrès de l'A.I.P.C., 1932, E.T.H., Zürich.
7. LEONHARDT und ANDRAE: Die vereinfachte Trägerrostberechnung, 1950, J. Hoffmann, Stuttgart.
8. MALLET: Calcul des ponts à poutres multiples, Travaux, Novembre, 1946, et La Reconstruction des Ouvrages d'Art en Tunisie, 1943—45, Science et Industrie, Paris.
9. MASSONNET: Calcul des ponts à poutres multiples, Mémoires de l'A.I.P.C., Vol. 10, 1950, E.T.H., Zürich.
10. MONGE: Placas Rectangulares, No. 75 de l'Instituto T.C.C., 1950, Madrid.
- 10a OLSEN und REINITZHUBER: Die zweiseitig gelagerte Platte, 1950, W. Ernst & Sohn, Berlin.
11. PARIS: Cours de Béton Armé, 1950, F. Rouge et Cie, Lausanne; Dunod, Paris.
12. PIGEAUD: Résistance des Matériaux et Elasticité, 1948—1950, G. Villars, Paris.
13. TIMOSHENKO: Theory of Plates and Shells, 1940, McGraw-Hill, New York, London.
14. WORCH: Elastische Platten, Beton-Kalender, Teil 1, 1943, W. Ernst & Sohn, Berlin.

## **II. Introduction**

Dans la pratique, on utilise fréquemment des plaques rectangulaires anisotropes (Plaques en béton armé portant dans les deux sens, plaques nervurées, tôles ondulées, réseaux de poutres, plaques à poutres multiples, plaques

contre-plaquées, grillages continus, etc.) et on détermine en général leur fatigue au moyen de formules approximatives. On peut donc penser qu'il vaudrait mieux rechercher des formules exactes, mais un peu compliquées, déduites de la théorie des plaques anisotropes due à MM. J. BOUSSINESQ-SAINTE VÉNANT-M. T. HUBER.

Cette théorie donne, pour la surface élastique d'une plaque d'épaisseur constante, l'équation aux dérivées partielles du quatrième ordre

$$D_{0x} w^{(4)} + 2H w^{(4)} + D_{0y} w^{(4)} = p(x, y) \quad (1)$$

où

$$D_{0x} = E_x J_{0x} / (1 - u_x u_y); \quad 2H = u_y D_{0x} + u_x D_{0y} + 4C; \quad D_{0y} = E_y J_{0y} / (1 - u_x u_y);$$

$u_x, u_y$  étant les constantes généralisées de POISSON pour les directions  $0x$  et  $0y$ ;  $2C = (1 - \sqrt{u_x u_y}) \sqrt{D_{0x} D_{0y}}$  la rigidité de torsion de la plaque;  $p(x, y)$  étant l'intensité de la charge au point  $(x, y)$  de la plaque;  $w$  étant la flèche de la plaque au point  $(x, y)$ ;

$E_x, E_y$  sont les modules d'élasticité suivant les axes  $0x$  et  $0y$ ;  $J_{0x}, J_{0y}$  sont les moments d'inertie par unité de longueur des sections perpendiculaires aux directions des axes  $0x$  et  $0y$ .

Les grandeurs des sections sont liées à la flexion au point  $(x, y)$  de la plaque par les relations suivantes (Fig. 1):

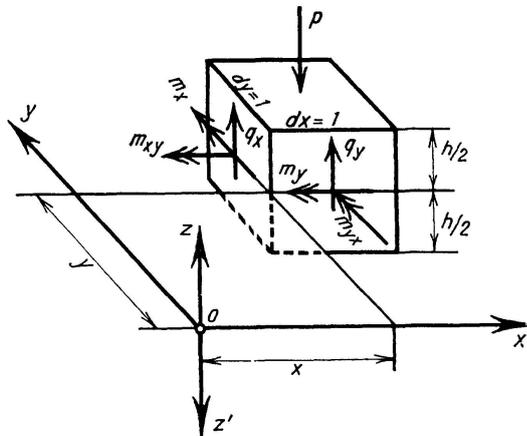


Fig. 1. Les grandeurs des sections dans un élément de la plaque

Moment de flexion par unité de longueur d'une section perpendiculaire à la direction de l'axe  $0x$ :

$$m_x = -D_{0x} (w^{(2)} + u_y w^{(2)}); \quad (2a)$$

<sup>1</sup>) Ici les indices ( $\cdot$ ), ( $\ddot{\cdot}$ ), ( $\dddot{\cdot}$ ), ( $\ddddot{\cdot}$ ) indiquent les dérivées partielles par rapport à la variable indépendante  $x$ , de même que les indices ( $\prime$ ), ( $\prime\prime$ ), ( $\prime\prime\prime$ ), ( $\prime\prime\prime\prime$ ) indiquent les dérivées partielles par rapport à la variable indépendante  $y$ ; par exemple, l'indice ( $\ddot{\cdot}$ ) indique le résultat qu'on obtiendra en dérivant successivement 2 fois par rapport à  $x$ , 2 fois par rapport à  $y$ , etc.

Moment de flexion par unité de longueur d'une section perpendiculaire à la direction de l'axe  $0y$ :

$$m_y = -D_{0y}(w'' + u_x w''); \quad (2b)$$

Moment de torsion par unité de longueur d'une section perpendiculaire à la direction de l'axe  $0x$  ou  $0y$ :

$$m_{xy} = m_{yx} = -2Cw''; \quad (2c)$$

Effort tranchant par unité de longueur d'une section perpendiculaire à la direction de l'axe  $0x$ :

$$q_x = -D_{0x}(w''' + R_1 w'') \text{ où } R_1 = u_y + (2C/D_{0x}); \quad (2d)$$

Effort tranchant par unité de longueur d'une section perpendiculaire à la direction de l'axe  $0y$ :

$$q_y = -D_{0y}(w''' + R_2 w'') \text{ où } R_2 = u_x + (2C/D_{0y}); \quad (2e)$$

Réaction par unité de longueur du côté perpendiculaire à  $0x$ :

$$\bar{q}_x = -D_{0x}(w''' + R_3 w'') \text{ où } R_3 = u_y + (4C/D_{0x}); \quad (2f)$$

Réaction par unité de longueur du côté perpendiculaire à  $0y$ :

$$\bar{q}_y = -D_{0y}(w''' + R_4 w'') \text{ où } R_4 = u_x + (4C/D_{0y}). \quad (2g)$$

On obtient, en faisant  $p(x, y) = 0$  dans l'équation (1), l'équation homogène de surface élastique de la plaque. Celle-ci admet trois solutions distinctes exprimées par les séries trigonométriques, dont chacune se rapporte à l'un des cas  $H^2 - D_{0x}D_{0y} \gtrless 0$ .

Le cas  $H^2 - D_{0x}D_{0y} = 0$  avec  $u_x = u_y$  a été résolu d'une manière très complète et élégante par les Drs. OLSEN-REINITZHUBER. Nous nous proposons d'aborder maintenant brièvement l'étude des deux autres cas.

### III. Etude de l'influence d'une charge concentrée et mobile „P“

Nous avons le développement suivant pour une charge concentrée répartie uniformément sur une ligne de longueur „ $2d$ “ au point „ $v, 0$ “ de la plaque:

$$p(y) = (4p_0/\pi) \sum_{n=1}^{\infty} (1/n) \sin(n\pi v/b) \sin(n\pi d/b) \sin(n\pi y/b), \quad (3)$$

où  $p_0 = P/2d$ ,  $d$  étant égale à  $(10 + 2s)$ , où  $s$  est l'épaisseur en cm de couverture de la plaque.

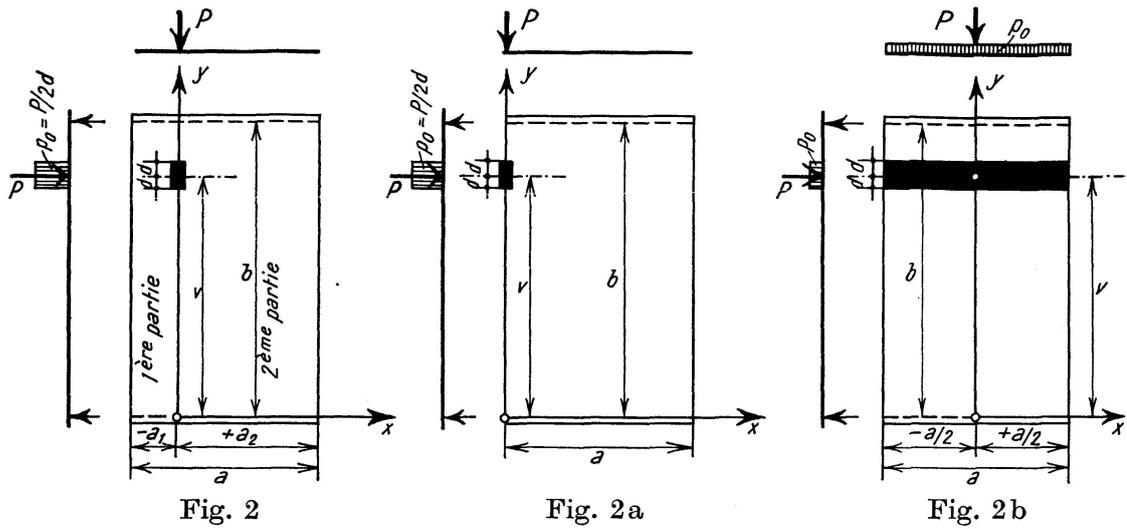


Fig. 2. Plaque soumise à la charge concentrée  $P$  mobile sur un axe quelconque  
 Fig. 2a. Plaque soumise à la charge concentrée  $P$  mobile sur un de ses côtés non appuyés  
 Fig. 2b. Plaque soumise à la charge concentrée  $P$  mobile sur l'axe situé au milieu de la plaque, ainsi qu'à une bande de charge uniforme

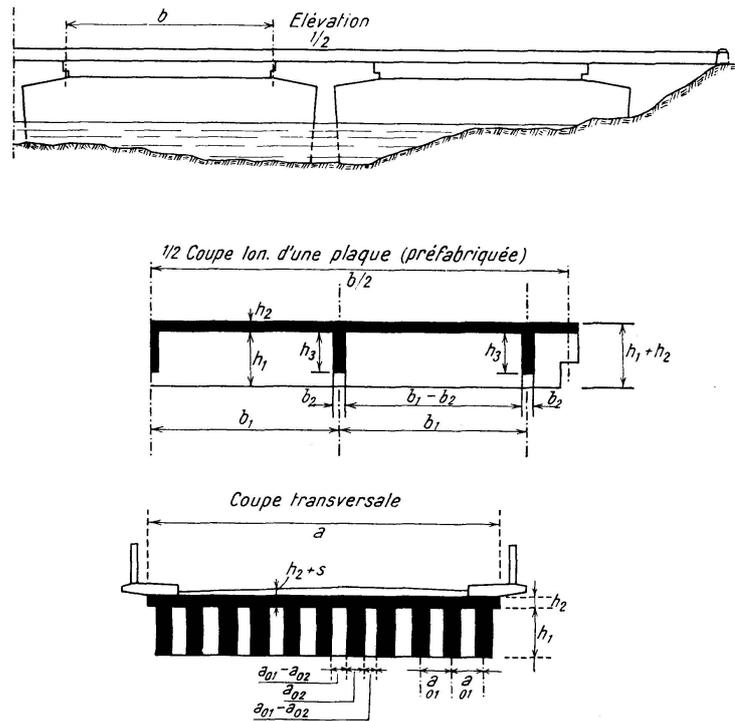


Fig. 2c. Emploi des plaques nervurées préfabriquées dans un pont

La surface élastique compatible est exprimée par l'équation homogène suivante:

$$D_{0x} w^{\dots} + 2H w^{\dots} + D_{0y} w^{\dots} = 0; \tag{4}$$

sa solution sera de la forme:

$$w = K \sum_{n=1}^{\infty} w_{1,n} \sin(\beta_n y), \tag{5}$$

où  $\beta_n = n\pi/b$ ,  $K$  étant une constante, et pour  $H^2 - D_{0x}D_{0y} > 0$  nous trouvons dans la première partie de la plaque (Fig. 2):

$$w_{1,n} = A_{1,n} \operatorname{Ch} \delta_n x + A_{2,n} \operatorname{Ch} \gamma_n x + A_{3,n} \operatorname{Sh} \delta_n x + A_{4,n} \operatorname{Sh} \gamma_n x; \quad (5a)$$

dans la deuxième partie de la plaque:

$$w_{1,n} = B_{1,n} \operatorname{Ch} \delta_n x + B_{2,n} \operatorname{Ch} \gamma_n x + B_{3,n} \operatorname{Sh} \delta_n x + B_{4,n} \operatorname{Sh} \gamma_n x; \quad (5b)$$

pour  $H^2 - D_{0x}D_{0y} < 0$  nous trouvons dans la première partie de la plaque:

$$w_{1,n} = E_{1,n} \cos \psi_n x \operatorname{Ch} \varphi_n x + E_{2,n} \cos \psi_n x \operatorname{Sh} \varphi_n x \\ + E_{3,n} \sin \psi_n x \operatorname{Ch} \varphi_n x + E_{4,n} \sin \psi_n x \operatorname{Sh} \varphi_n x; \quad (5c);$$

dans la deuxième partie de la plaque:

$$w_{1,n} = F_{1,n} \cos \psi_n x \operatorname{Ch} \varphi_n x + F_{2,n} \cos \psi_n x \operatorname{Sh} \varphi_n x \\ + F_{3,n} \sin \psi_n x \operatorname{Ch} \varphi_n x + F_{4,n} \sin \psi_n x \operatorname{Sh} \varphi_n x; \quad (5d)$$

$$\text{où } \delta_n = \beta_n \sqrt{\frac{1}{D_{0x}} (H + \sqrt{H^2 - D_{0x}D_{0y}})}; \quad \gamma_n = \beta_n \sqrt{\frac{1}{D_{0x}} (H - \sqrt{H^2 - D_{0x}D_{0y}})};$$

$$\varphi_n = \beta_n \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{D_{0y}}{D_{0x}}} + \frac{H}{D_{0x}} \right)}; \quad \psi_n = \beta_n \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{D_{0y}}{D_{0x}}} - \frac{H}{D_{0x}} \right)}.$$

Nous aurons donc d'une façon générale:

$$m_x = +K D_{0x} \sum_{n=1}^{\infty} (u_y \beta_n^2 w_{1,n} - w_{1,n}^{\cdot}) \sin \beta_n y; \quad (6a)$$

$$m_y = +K D_{0y} \sum (\beta_n^2 w_{1,n} - u_x w_{1,n}^{\cdot}) \sin \beta_n y; \quad (6b)$$

$$m_{xy} = -2CK \sum (\beta_n w_{1,n}^{\cdot}) \cos \beta_n y; \quad (6c)$$

$$q_x = +KD_{0x} \sum (R_1 \beta_n^2 w_{1,n} - w_{1,n}^{\cdot\cdot}) \sin \beta_n y; \quad (6d)$$

$$q_y = +KD_{0y} \sum (\beta_n^3 w_{1,n} - R_2 \beta_n w_{1,n}^{\cdot}) \cos \beta_n y; \quad (6e)$$

$$\bar{q}_x = +KD_{0x} \sum (R_3 \beta_n^2 w_{1,n} - w_{1,n}^{\cdot\cdot}) \sin \beta_n y; \quad (6f)$$

$$\bar{q}_y = +KD_{0y} \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n^3 w_{1,n} - R_4 \beta_n w_{1,n}^{\cdot}) \cos \beta_n y. \quad (6g)$$

### 1. Abréviations

Posons:  $z_{1,n} = \operatorname{Ch} \delta_n x$ ,  $z_{2,n} = \operatorname{Ch} \gamma_n x$ ,  $z_{3,n} = \operatorname{Sh} \delta_n x$ ,  
 $z_{4,n} = \operatorname{Sh} \gamma_n x$ ,  $z_{5,n} = \cos \psi_n x \operatorname{Ch} \varphi_n x$ ,  $z_{6,n} = \cos \psi_n x \operatorname{Sh} \varphi_n x$ ,  
 $z_{7,n} = \sin \psi_n x \operatorname{Ch} \varphi_n x$ ,  $z_{8,n} = \sin \psi_n x \operatorname{Sh} \varphi_n x$ .

Nous aurons alors:

$$z_{1,n}^{\cdot} = \delta_n \operatorname{Sh} \delta_n x, \quad z_{1,n}^{\cdot\cdot} = \delta_n^2 \operatorname{Ch} \delta_n x, \quad z_{1,n}^{\cdot\cdot\cdot} = \delta_n^3 \operatorname{Sh} \delta_n x, \quad \text{etc.}$$

$$z_{5,n}^{\cdot} = \varphi_n \cos \psi_n x \operatorname{Sh} \varphi_n x - \psi_n \sin \psi_n x \operatorname{Ch} \varphi_n x,$$

$$z_{5,n}^{\ddot{\cdot}} = (\varphi_n^2 - \psi_n^2) \cos \psi_n x \operatorname{Ch} \varphi_n x - 2 \psi_n \varphi_n \sin \psi_n x \operatorname{Sh} \varphi_n x,$$

$$z_{5,n}^{\ddot{\cdot}\ddot{\cdot}} = (\varphi_n^3 - 3 \varphi_n \psi_n^2) \cos \psi_n x \operatorname{Sh} \varphi_n x + (\psi_n^3 - 3 \psi_n \varphi_n^2) \sin \psi_n x \operatorname{Ch} \varphi_n x,$$

En intervertissant Sh et Ch dans les expressions ci-dessus, nous obtenons  $z_{6,n}$ .

$$z_{7,n}^{\dot{\cdot}} = \varphi_n \sin \psi_n x \operatorname{Sh} \varphi_n x + \psi_n \cos \psi_n x \operatorname{Ch} \varphi_n x,$$

$$z_{7,n}^{\ddot{\cdot}} = (\varphi_n^2 - \psi_n^2) \sin \psi_n x \operatorname{Ch} \varphi_n x + 2 \psi_n \varphi_n \cos \psi_n x \operatorname{Sh} \varphi_n x,$$

$$z_{7,n}^{\ddot{\cdot}\ddot{\cdot}} = (\varphi_n^3 - 3 \varphi_n \psi_n^2) \sin \psi_n x \operatorname{Sh} \varphi_n x - (\psi_n^3 - 3 \psi_n \varphi_n^2) \cos \psi_n x \operatorname{Ch} \varphi_n x,$$

Même remarque pour  $z_{8,n}$ . Nous poserons de plus:

pour  $x = -a_1$ :

$$z_{1,n} = k_{1,n}, z_{1,n}^{\dot{\cdot}} = k_{1,n}^*, \dots, z_{8,n}^{\ddot{\cdot}\ddot{\cdot}} = k_{8,n}^{***};$$

pour  $x = +a_2$ :

$$z_{1,n} = h_{1,n}, z_{1,n}^{\dot{\cdot}} = h_{1,n}^*, \dots, z_{8,n}^{\ddot{\cdot}\ddot{\cdot}} = h_{8,n}^{***};$$

pour  $x = +a$ :

$$z_{1,n} = H_{1,n}, z_{1,n}^{\dot{\cdot}} = H_{1,n}^*, \dots, z_{8,n}^{\ddot{\cdot}\ddot{\cdot}} = H_{8,n}^{***}.$$

Nous pouvons donc écrire d'une manière plus condensée:

$$(7 - a_1) w_{1,n} = A_{1,n} z_{1,n} + A_{2,n} z_{2,n} + \dots$$

$$(8 - b_4) w_{1,n}^{\ddot{\cdot}\ddot{\cdot}} = F_{1,n} z_{5,n}^{\ddot{\cdot}\ddot{\cdot}} + F_{2,n} z_{6,n}^{\ddot{\cdot}\ddot{\cdot}} + F_{3,n} z_{7,n}^{\ddot{\cdot}\ddot{\cdot}} + F_{4,n} z_{8,n}^{\ddot{\cdot}\ddot{\cdot}}.$$

### 2. Valeurs des constantes d'intégration pour le cas de la fig. 2

Les conditions compatibles sont:

pour  $x = 0$ :  $(w)_1 = (w)_2, (w^{\dot{\cdot}})_1 = (w^{\dot{\cdot}})_2, (m_x)_1 = (m_x)_2, (q_x)_2 - (q_x)_1 = -p$ ;  
 pour  $x = +a_2$ :  $(m_x)_2 = 0, (\bar{q}_x)_2 = 0$ ;  
 pour  $x = -a_1$ :  $(m_x)_1 = 0, (\bar{q}_x)_1 = 0$ ;  
 pour  $y = 0$  et  $y = +b$ :  $(w)_1 = (w)_2 = 0$  et  $(m_y)_1 = (m_y)_2 = 0$ .

Elles donnent:

$$K = (2 P b^3) / (\pi^4 d D_{0y})^2; N_n = (D_{0y} / D_{0x}) (1/n^4) \beta_n^3 \sin \beta_n v \sin \beta_n d;$$

$$A_{1,n} = B_{1,n}; A_{2,n} = B_{2,n}; A_{3,n} - B_{3,n} = + (N_n / \delta_n) [1 / (\gamma_n^2 - \delta_n^2)];$$

$$A_{4,n} - B_{4,n} = - (N_n / \gamma_n) [1 / (\gamma_n^2 - \delta_n^2)];$$

$$E_{1,n} = F_{1,n}; -E_{2,n} + F_{2,n} = + [N_n / (2 \varphi_n)] [1 / (\psi_n^2 + \varphi_n^2)];$$

$$-E_{3,n} + F_{3,n} = - [N_n / (2 \psi_n)] [1 / (\psi_n^2 + \varphi_n^2)]; E_{4,n} = F_{4,n};$$

<sup>2)</sup> C'est une constante arbitraire et nous l'avons choisi de telle sorte que les constantes d'intégrations restent; en tenant compte des études du Dr. Timoshenko [„Rectangular Plates of Infinite Length with Simply Supported Edges“ (voir: Chapitre V-34 de son ouvrage classique, loc. cit., p. 1)], on voit que cette constante a la forme convenable.

avec:

$$\begin{aligned}
 e_{1,n} &= u_y \beta_n^2 h_{1,n} - h_{1,n}^{**}; & e_{1,n}^* &= R_3 \beta_n^2 h_{1,n}^* - h_{1,n}^{***}; \\
 e_{1,n}^{**} &= u_y \beta_n^2 k_{1,n} - k_{1,n}^{**}; & e_{1,n}^{***} &= R_3 \beta_n^2 k_{1,n}^* - k_{1,n}^{***}; \dots \\
 \dots & \dots & e_{4,n}^{***} &= R_3 \beta_n^2 k_{4,n}^* - k_{4,n}^{***}; \\
 \bar{N}_n &= +N_n (\gamma_n e_{3,n} - \delta_n e_{4,n}) / [\gamma_n \delta_n (\gamma_n^2 - \delta_n^2)]; \\
 \bar{N}_n^* &= +N_n (\gamma_n e_{3,n}^* - \delta_n e_{4,n}^*) / [\gamma_n \delta_n (\gamma_n^2 - \delta_n^2)];
 \end{aligned}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} e_{1,n} & e_{2,n} & e_{3,n} & e_{4,n} \\ e_{1,n}^* & e_{2,n}^* & e_{3,n}^* & e_{4,n}^* \\ e_{1,n}^{**} & e_{2,n}^{**} & e_{3,n}^{**} & e_{4,n}^{**} \\ e_{1,n}^{***} & e_{2,n}^{***} & e_{3,n}^{***} & e_{4,n}^{***} \end{vmatrix}; \quad A_{1,n} = (1/\Delta_n) \begin{vmatrix} \bar{N}_n & e_{2,n} & e_{3,n} & e_{4,n} \\ \bar{N}_n^* & e_{2,n}^* & e_{3,n}^* & e_{4,n}^* \\ 0 & e_{2,n}^{**} & e_{3,n}^{**} & e_{4,n}^{**} \\ 0 & e_{2,n}^{***} & e_{3,n}^{***} & e_{4,n}^{***} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_n \cdot A_{2,n} = \begin{vmatrix} e_{1,n} & \bar{N}_n & e_{3,n} & e_{4,n} \\ e_{1,n}^* & \bar{N}_n^* & e_{3,n}^* & e_{4,n}^* \\ e_{1,n}^{**} & 0 & e_{3,n}^{**} & e_{4,n}^{**} \\ e_{1,n}^{***} & 0 & e_{3,n}^{***} & e_{4,n}^{***} \end{vmatrix}; \quad A_{3,n} = (1/\Delta_n) \begin{vmatrix} e_{1,n} & e_{2,n} & \bar{N}_n & e_{4,n} \\ e_{1,n}^* & e_{2,n}^* & \bar{N}_n^* & e_{4,n}^* \\ e_{1,n}^{**} & e_{2,n}^{**} & 0 & e_{4,n}^{**} \\ e_{1,n}^{***} & e_{2,n}^{***} & 0 & e_{4,n}^{***} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_n \cdot A_{4,n} = \begin{vmatrix} e_{1,n} & e_{2,n} & e_{3,n} & \bar{N}_n \\ e_{1,n}^* & e_{2,n}^* & e_{3,n}^* & \bar{N}_n^* \\ e_{1,n}^{**} & e_{2,n}^{**} & e_{3,n}^{**} & 0 \\ e_{1,n}^{***} & e_{2,n}^{***} & e_{3,n}^{***} & 0 \end{vmatrix};$$

avec:

$$\begin{aligned}
 e_{5,n} &= u_y \beta_n^2 h_{5,n} - h_{5,n}^{**}; & \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots; \\
 \dots & \dots & e_{8,n}^{***} &= R_3 \beta_n^2 k_{8,n}^* - k_{8,n}^{***}; \\
 \bar{N}_n &= +N_n (\varphi_n e_{7,n} - \psi_n e_{6,n}) / [2 \varphi_n \psi_n (\psi_n^2 + \varphi_n^2)]; \\
 \bar{N}_n^* &= +N_n (\varphi_n e_{7,n}^* - \psi_n e_{6,n}^*) / [2 \varphi_n \psi_n (\psi_n^2 + \varphi_n^2)];
 \end{aligned}$$

$$\Delta_n^* = \begin{vmatrix} e_{5,n} & e_{6,n} & e_{7,n} & e_{8,n} \\ e_{5,n}^* & e_{6,n}^* & e_{7,n}^* & e_{8,n}^* \\ e_{5,n}^{**} & e_{6,n}^{**} & e_{7,n}^{**} & e_{8,n}^{**} \\ e_{5,n}^{***} & e_{6,n}^{***} & e_{7,n}^{***} & e_{8,n}^{***} \end{vmatrix}; \quad E_{1,n} = (1/\Delta_n^*) \begin{vmatrix} \bar{N}_n & e_{6,n} & e_{7,n} & e_{8,n} \\ \bar{N}_n^* & e_{6,n}^* & e_{7,n}^* & e_{8,n}^* \\ 0 & e_{6,n}^{**} & e_{7,n}^{**} & e_{8,n}^{**} \\ 0 & e_{6,n}^{***} & e_{7,n}^{***} & e_{8,n}^{***} \end{vmatrix};$$

$$E_{2,n} = (1/\Delta_n^*) \begin{vmatrix} e_{5,n} & \bar{N}_n & e_{7,n} & e_{8,n} \\ e_{5,n}^* & \bar{N}_n^* & e_{7,n}^* & e_{8,n}^* \\ e_{5,n}^{**} & 0 & e_{7,n}^{**} & e_{8,n}^{**} \\ e_{5,n}^{***} & 0 & e_{7,n}^{***} & e_{8,n}^{***} \end{vmatrix}; \quad E_{3,n} = (1/\Delta_n^*) \begin{vmatrix} e_{5,n} & e_{6,n} & \bar{N}_n & e_{8,n} \\ e_{5,n}^* & e_{6,n}^* & \bar{N}_n^* & e_{8,n}^* \\ e_{5,n}^{**} & e_{6,n}^{**} & 0 & e_{8,n}^{**} \\ e_{5,n}^{***} & e_{6,n}^{***} & 0 & e_{8,n}^{***} \end{vmatrix};$$

$$E_{4,n} = (1/\Delta_n^*) \begin{vmatrix} e_{5,n} & e_{6,n} & e_{7,n} & \bar{N}_n \\ e_{5,n}^* & e_{6,n}^* & e_{7,n}^* & \bar{N}_n^* \\ e_{5,n}^{**} & e_{6,n}^{**} & e_{7,n}^{**} & 0 \\ e_{5,n}^{***} & e_{6,n}^{***} & e_{7,n}^{***} & 0 \end{vmatrix}.$$

Nous croyons, qu'il est possible avec ces notations claires, de calculer rigoureusement les efforts dans les plaques anisotropes considérées pour n'importe quelle distribution de charges. Celles-ci pourraient faire l'objet de calculs numériques, effectués à l'avance. Des tables et surfaces d'influences pourraient alors être utiles aux constructeurs. Nous ne pouvons qu'exprimer le souhait de voir quelque bureau d'études entreprendre cette tâche.

3. Valeurs des constantes d'intégration pour le cas de la fig. 2a:

Les constantes  $B_{1,n}, \dots, B_{4,n}$  et  $F_{1,n}, F_{2,n}, \dots, F_{4,n}$  disparaissent. Les conditions compatibles sont:

$$\begin{aligned} \text{pour } x = 0: \quad m_x &= 0; \quad \bar{q}_x = -p; \\ \text{pour } x = +a: \quad m_x &= 0; \quad \bar{q}_x = 0; \\ \text{pour } y = 0 \text{ et } y = b: \quad w &= 0 \text{ et } m_y = 0. \end{aligned}$$

Elles donnent:

$$\begin{aligned} c_{1,n} &= u_y \beta_n^2 - \delta_n^2, & c_{5,n} &= u_y \beta_n^2 - \varphi_n^2 + \psi_n^2, \\ c_{2,n} &= u_y \beta_n^2 - \gamma_n^2, & c_{6,n} &= R_3 \beta_n^2 \varphi_n - \varphi_n^3 + 3 \varphi_n \psi_n^2, \\ c_{3,n} &= \delta_n^3 - R_3 \beta_n^2 \delta_n, & c_{7,n} &= R_3 \beta_n^2 \psi_n + \psi_n^3 - 3 \psi_n \varphi_n^2, \\ c_{4,n} &= \gamma_n^3 - R_3 \beta_n^2 \gamma_n, & c_{8,n} &= -2 \varphi_n \psi_n. \\ c_{1,n}^* &= u_y \beta_n^2 H_{1,n} - H_{1,n}^{**}, \dots, & c_{8,n}^* &= u_y \beta_n^2 H_{8,n} - H_{8,n}^{**}, \\ c_{1,n}^{**} &= R_3 \beta_n^2 H_{1,n}^* - H_{1,n}^{***}, \dots, & & \\ & & c_{8,n}^{**} &= R_3 \beta_n^2 H_{8,n}^* - H_{8,n}^{***}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \begin{vmatrix} c_{1,n} & c_{2,n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{3,n} & c_{4,n} \\ c_{1,n}^* & c_{2,n}^* & c_{3,n}^* & c_{4,n}^* \\ c_{1,n}^{**} & c_{2,n}^{**} & c_{3,n}^{**} & c_{4,n}^{**} \end{vmatrix}; \quad A_{1,n} = (1/\Delta_n) \begin{vmatrix} 0 & c_{2,n} & 0 & 0 \\ +N_n & 0 & c_{3,n} & c_{4,n} \\ 0 & c_{2,n}^* & c_{3,n}^* & c_{4,n}^* \\ 0 & c_{2,n}^{**} & c_{3,n}^{**} & c_{4,n}^{**} \end{vmatrix}; \\ A_{2,n} &= (1/\Delta_n) \begin{vmatrix} c_{1,n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +N_n & c_{3,n} & c_{4,n} \\ c_{1,n}^* & 0 & c_{3,n}^* & c_{4,n}^* \\ c_{1,n}^{**} & 0 & c_{3,n}^{**} & c_{4,n}^{**} \end{vmatrix}; \quad A_{3,n} = (1/\Delta_n) \begin{vmatrix} c_{1,n} & c_{2,n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +N_n & c_{4,n} \\ c_{1,n}^* & c_{2,n}^* & 0 & c_{4,n}^* \\ c_{1,n}^{**} & c_{2,n}^{**} & 0 & c_{4,n}^{**} \end{vmatrix}; \\ A_{4,n} &= (1/\Delta_n) \begin{vmatrix} c_{1,n} & c_{2,n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{3,n} & +N_n \\ c_{1,n}^* & c_{2,n}^* & c_{3,n}^* & 0 \\ c_{1,n}^{**} & c_{2,n}^{**} & c_{3,n}^{**} & 0 \end{vmatrix}; \quad \Delta_n^* = \begin{vmatrix} c_{5,n} & 0 & 0 & c_{8,n} \\ 0 & c_{6,n} & c_{7,n} & 0 \\ c_{5,n}^* & c_{6,n}^* & c_{7,n}^* & c_{8,n}^* \\ c_{5,n}^{**} & c_{6,n}^{**} & c_{7,n}^{**} & c_{8,n}^{**} \end{vmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{1,n} &= (1/\Delta_n^*) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & c_{8,n} \\ -N_n c_{6,n} & c_{7,n} & 0 & 0 \\ 0 & c_{6,n}^* & c_{7,n}^* & c_{8,n}^* \\ 0 & c_{6,n}^{**} & c_{7,n}^{**} & c_{8,n}^{**} \end{vmatrix} ; E_{2,n} = (1/\Delta_n^*) \begin{vmatrix} c_{5,n} & 0 & 0 & c_{8,n} \\ 0 & -N_n c_{7,n} & 0 & 0 \\ c_{5,n}^* & 0 & c_{7,n}^* & c_{8,n}^* \\ c_{5,n}^{**} & 0 & c_{7,n}^{**} & c_{8,n}^{**} \end{vmatrix} ; \\
 E_{3,n} &= (1/\Delta_n^*) \begin{vmatrix} c_{5,n} & 0 & 0 & c_{8,n} \\ 0 & c_{6,n} & -N_n & 0 \\ c_{5,n}^* & c_{6,n}^* & 0 & c_{8,n}^* \\ c_{5,n}^{**} & c_{6,n}^{**} & 0 & c_{8,n}^{**} \end{vmatrix} ; E_{4,n} = (1/\Delta_n^*) \begin{vmatrix} c_{5,n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{6,n} & c_{7,n} & -N_n \\ c_{5,n}^* & c_{6,n}^* & c_{7,n}^* & 0 \\ c_{5,n}^{**} & c_{6,n}^{**} & c_{7,n}^{**} & 0 \end{vmatrix} ; \dots
 \end{aligned}$$

4. Valeurs des constantes d'intégration pour le cas de la fig. 2b:

a) Plaque soumise à la charge concentrée „P“ mobile sur l'axe „0y“ situé au milieu de la plaque: Il suffit de prendre  $-a_1 = -a/2$ ,  $+a_2 = +a/2$  dans les formules précédentes indiquées dans III/2.3).

b) Plaque soumise à une bande de charge uniforme „ $2d \cdot a \cdot p_0$ “ mobile suivant l'axe „0y“ et restant perpendiculaire à celui-ci: Ce cas étant indispensable pour l'étude de l'influence de la charge propre d'une entretoise dans les plaques à poutres multiples, peut être opportunément adapté et donner l'influence de la charge propre d'une nervure dans les plaques nervurées et à poutres multiples.

Sa solution pour les plaques isotropes rectangulaires simplement appuyées sur leur contour avait déjà donnée en 1925 par M. B. G. GALERKIN 4); elle donne très rapidement des séries convergentes pour le calcul, mais pour ne pas augmenter les dimensions de cet article, nous avons dû supprimer sa généralisation pour les plaques anisotropes, et nous nous proposons de la présenter ultérieurement.

**IV. Etude de l'influence d'une charge uniformément répartie sur toute la plaque (Fig. 3) 5)**

Nous supposons ici que  $p(x,y)$  se réduit à une constante „ $p_0$ “. La résolution du problème par la méthode „LEVY-ESTANAVE-NADAI“ 6) donnera  $w = w_1 + w_2$ .

3) La solution, donnée sous le titre „Die Platte mit Einzellast“, v. Beton-Kalender 1943, I. Teil, pp. 136 et 137, avec Fig. 27, du même problème, nous semble indéterminée; en effet elle doit remplir six conditions (dont quatre relatives aux côtés  $y = \pm b$  et indépendantes, les unes des autres, „à cause des fonctions impaires“), avec ses quatre constantes d'intégrations.

4) V. l'ouvrage du Dr. TIMOSHENKO, loc. cit., p. 1, pp. 146 à 167.

5) Pour l'étude du cas  $H^2 - D_{0x}D_{0y} = 0$  voir également l'ouvrage du Dr. GIRKMANN, loc. cit., p. 1, pp. 489 et 490.

6) Voir l'ouvrage essentiel du Prof. Dr. Ing. KURT BEYER, Dresden, loc. cit., p. 1.

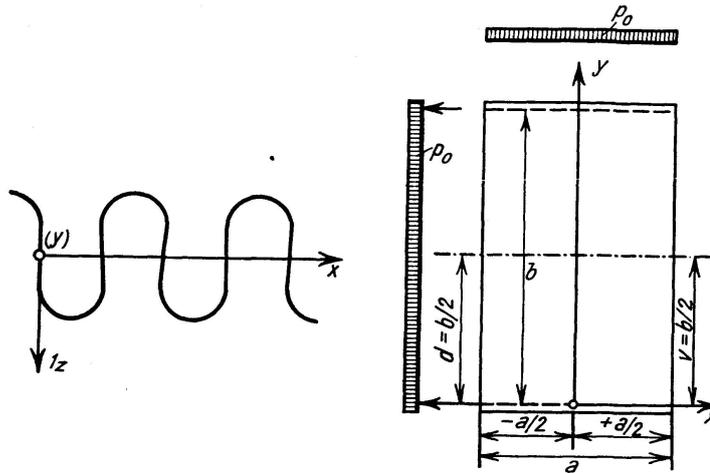


Fig. 3a

Fig. 3

Fig. 3. Charge uniformément répartie sur toute la plaque  
 Fig. 3a. Coupe transversale d'une poutrelle en tôle ondulée

Détermination de „ $w_1$ “. Faisons dans l'équation (3),  $v = b/2$  et  $d = b/2$ , nous obtenons

$$p(y) = (4 p_0/\pi) \sum (1/n) \sin \beta_n y, \quad n = 1, 3, 5, 7, \dots \quad (9)$$

D'autre part nous avons, pour introduire l'influence de la charge,  $D_{0y} w_1''' = p(y)$ ; remplaçons-y  $p(y)$  par sa valeur ci-dessus, puis intégrons; nous obtenons

$$w_1 = K_1 \sum N_{n,1} \sin \beta_n y \quad (10)$$

où

$$K_1 = (4 p_0 b^4) / D_{0y} \pi^5; \quad N_{1,n} = 1/n^5.$$

Détermination de „ $w_2$ “. Cette fonction ne doit pas changer de signe lorsqu'on remplace „ $+x$ “ par „ $-x$ “. Cela est possible avec les hypothèses:

$$A_{1,n} = B_{1,n}, \quad A_{2,n} = B_{2,n}, \quad A_{3,n} = B_{3,n} = 0, \quad A_{4,n} = B_{4,n} = 0,$$

dans les équations (5a) et (5b);

$$E_{1,n} = F_{1,n}, \quad E_{2,n} = F_{2,n} = 0, \quad E_{3,n} = F_{3,n} = 0, \quad E_{4,n} = F_{4,n},$$

dans les équations (5c) et (5d); d'où il résulte:

pour:

$$H^2 - D_{0x} D_{0y} > 0$$

$$w_2 = K_1 \sum (A_{1,n} \operatorname{Ch} \delta_n x + A_{2,n} \operatorname{Ch} \gamma_n x) \sin \beta_n y; \quad (11a)$$

7) Remarquez que  $\sin \frac{n\pi}{2} = 0$ , pour  $n = 2, 4, 6, 8, \dots$

$\sin \frac{n\pi}{2} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$ , pour  $n = 1, 3, 5, 7, \dots$

Voir également l'intéressante contribution de l'ingénieur espagnol F. G. MONGE, loc. cit., p. 1.

pour:  $H^2 - D_{0x} D_{0y} < 0$

$$w_2 = K_1 \sum (E_{1,n} \cos \psi_n x \operatorname{Ch} \varphi_n x + E_{2,n}^* \sin \psi_n x \operatorname{Sh} \varphi_n x) \sin \beta_n y. \quad (11b)$$

Nous aurons pour ce cas

$$m_x = K_1 D_{0x} \sum [u_y \beta_n^2 (N_{1,n} + w_{2,n}) - w_{2,n}^{\cdot}] \sin \beta_n y; \dots; \quad (12a)$$

$$\bar{q}_x = K_1 D_{0x} \sum (R_3 \beta_n^2 w_{2,n}^{\cdot} - w_{2,n}^{\cdot}) \sin \beta_n y; \text{ etc. } \dots \quad (12f)$$

où, selon le cas à étudier,

$$w_{2,n} = A_{1,n} z_{1,n} + A_{2,n} z_{2,n}, \quad w_{2,n}^{\cdot} = A_{1,n} z_{1,n}^{\cdot} + A_{2,n} z_{2,n}^{\cdot}, \quad \text{etc. } \dots;$$

$$w_{2,n} = E_{1,n} z_{5,n} + E_{2,n}^* z_{8,n}, \quad w_{2,n}^{\cdot} = E_{1,n} z_{5,n}^{\cdot} + E_{2,n}^* z_{8,n}^{\cdot}, \quad \text{etc. } \dots$$

### Valeurs des constantes d'intégration

Posons pour simplifier:

$$(z_{1,n})x = \pm a/2 = +K_{1,n}, \quad (z_{1,n}^{\cdot})x = \pm a/2 = \pm K_{1,n}^*,$$

$$(z_{1,n}^{\cdot})x = \pm a/2 = +K_{1,n}^{**}, \quad (z_{1,n}^{\cdot})x = \pm a/2 = \pm K_{1,n}^{***},$$

$$(z_{2,n})x = \pm a/2 = +K_{2,n}, \quad \text{etc. } \dots,$$

$$(z_{5,n})x = \pm a/2 = +K_{5,n}, \quad \dots,$$

$$(z_{8,n})x = \pm a/2 = +K_{8,n}, \quad \dots,$$

$$f_{1,n} = K_{1,n}^{**} - u_y \beta_n^2 K_{1,n}, \quad f_{2,n} = K_{2,n}^{**} - u_y \beta_n^2 K_{2,n},$$

$$f_{1,n}^* = -K_{1,n}^{***} + R_3 \beta_n^2 K_{1,n}^*, \quad f_{2,n}^* = -K_{2,n}^{***} + R_3 \beta_n^2 K_{2,n}^*,$$

$$f_{3,n} = K_{5,n}^{**} - u_y \beta_n^2 K_{5,n}, \quad f_{4,n} = K_{8,n}^{**} - u_y \beta_n^2 K_{8,n},$$

$$f_{3,n}^* = -K_{5,n}^{***} + R_3 \beta_n^2 K_{5,n}^*, \quad f_{4,n}^* = -K_{8,n}^{***} + R_3 \beta_n^2 K_{8,n}^*.$$

Nous avons donc:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} f_{1,n} & f_{2,n} \\ f_{1,n}^* & f_{2,n}^* \end{vmatrix}, \quad \Delta_n A_{1,n} = \begin{vmatrix} N_{1,n} & f_{2,n} \\ 0 & f_{2,n}^* \end{vmatrix}, \quad \Delta_n A_{2,n} = \begin{vmatrix} f_{1,n} & N_{1,n} \\ f_{1,n}^* & 0 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_n^* = \begin{vmatrix} f_{3,n} & f_{4,n} \\ f_{3,n}^* & f_{4,n}^* \end{vmatrix}, \quad \Delta_n^* E_{1,n} = \begin{vmatrix} N_{1,n} & f_{4,n} \\ 0 & f_{4,n}^* \end{vmatrix}, \quad \Delta_n^* E_{2,n}^* = \begin{vmatrix} f_{3,n} & N_{1,n} \\ f_{3,n}^* & 0 \end{vmatrix} \quad ^8),$$

où

$$n = 1, 3, 5, 7, \dots$$

<sup>8)</sup> On peut trouver le développement d'un déterminant, ainsi que les valeurs trigonométriques nécessaires, dans les manuels de l'ingénieur, voir par exemple Hütte, Bd. 1. et le livre de l'auteur, loc. cit., p. 1.

### V. Détermination des constantes $D_{0x}$ , $D_{0y}$ , $C$ et $H$ du Dr. M. T. Huber

Ces constantes dominent le problème et exigent encore des recherches, à l'exception de celles qu'ont été indiquées par le professeur lui-même, qu'elles soient déduites de la théorie de l'élasticité des corps non-isotropes ou des essais.

a) *Plaques en béton armé portant dans les deux sens.* Nous renvoyons à l'ouvrage du Dr. GIRKMANN, ainsi qu'à l'ouvrage des Drs. OLSEN - REINITZ-HUBER, v. pp. 479, 3 et 28.

b) *Grillages continus „Réseaux de poutres“.* Nous renvoyons à l'ouvrage du Dr. TIMOSHENKO, v. p. 190 et p. 191.

c) *Plaques contre-plaquées.* Nous renvoyons à l'ouvrage du Dr. GIRKMANN, v. p. 482.

d) *Tôles ondulées.* Nous renvoyons à l'ouvrage du Dr. GIRKMANN, v. p. 481.

e) *Plaques nervurées en béton armé,* v. Fig. 2, 2a, b, c.

De la conception initiale suivant laquelle le béton tendu, éliminé déjà du calcul des profils fléchis, constitue une charge en partie inutile et onéreuse, il résulte qu'il convient de la supprimer en prévoyant l'évidement; d'où résultent les plaques nervurées et à poutres multiples, qui sont légères et rigides, malgré la grandeur des vides à couvrir.

Suppositions:

1. L'écartement „ $a_1$ “ entre deux nervures consécutives parallèles à  $Oy$  est petit par rapport à la dimension „ $a$ “ de la plaque;
2. L'écartement „ $b_1$ “ entre deux entretoises consécutives parallèles à  $Ox$  est grand par rapport à la dimension „ $b$ “ de la plaque;
3. L'épaisseur de la plaque sans nervures „ $h_2$ “ n'est pas négligeable.

Dans une section en béton armé, il faut distinguer deux sortes d'éléments: d'une part, les éléments de béton réel; d'autre part, les éléments d'armatures. On compte ces derniers pour dix fois leur valeur, de sorte qu'ils représentent une aire de béton fictif.

Enfin, cet article suppose, comme l'indique son titre, que la section supporte des efforts de traction dans une région plus ou moins étendue, et les règlements prescrivent de compter comme nuls tous les efforts de traction s'exerçant sur des éléments de béton réel, ces éléments devant être considérés comme inefficaces, ou inexistants. On a alors à considérer des sections réduites se déduisant de la section entière par la suppression de toutes les tranches de béton réel situées au-dessous d'un certain plan  $xOy$  perpendiculaire à la direction commune des charges extérieures et d'ordonnée „ $\eta$ “ par rapport à l'axe  $O_1x_1$  au niveau de l'armature de traction, v. Fig. 4. La section réduite particulière qui satisfait aux règlements doit être telle que son axe neutre coïncide avec  $Ox$  et ait pour ordonnée „ $\eta$ “.

Nous avons déduit les caractéristiques d'une section perpendiculaire à  $Oy$  et réduite jusqu'à „ $\eta$ “, des indications données par le regretté professeur G. PIGEAUD, comme suit: <sup>9)</sup>

„ $\eta$ “ est une racine positive de l'équation du second degré en „ $\eta$ “ de  $\Phi_1(\eta) = H - \eta S = 0$ ;

où, pour 
$$0 < \eta < h_1$$

$$S = a_2 h_1 + a_1 h_2 + 10(\omega_1 + \omega_2) - a_2 \eta, \quad S = S_0 - a_2 \eta,$$

$$2H = a_2 h_1^2 + a_1 [(h_1 + h_2)^2 - h_1^2] + 20 z_1 \omega_1 - a_2 \eta^2, \quad 2H = 2H_0 - a_2 \eta^2,$$

$$3J = a_2 h_1^3 + a_1 [(h_1 + h_2)^3 - h_1^3] + 30 z_1^2 \omega_1 - a_2 \eta^3, \quad 3J = 3J_0 - a_2 \eta^3,$$

pour 
$$h_1 < \eta < (h_1 + h_2)$$

$S = S_0 + (a_1 - a_2) h_1 - a_1 \eta$ ,  $\omega_1$ : aire totale de l'armature de compression,  
 $2H = 2H_0 + (a_1 - a_2) h_1^2 - a_1 \eta^2$ ,  $z_1$ : son ordonnée moyenne,  
 $3J = 3J_0 + (a_1 - a_2) h_1^3 - a_1 \eta^3$ ,  $\omega_2$ : aire totale de l'armature de traction,  
 nous aurons alors pour le moment d'inertie  $J_{0y}$  cherché:

$$J_{0y} = (1/a_1) [J - (H^2/S)],$$

et la rigidité de flexion de l'unité de longueur d'une section de la plaque nervurée perpendiculaire à  $Oy$  sera immédiatement:

$$D_{0y} = E_b J_{0y} / (1 - u_x u_y), \quad \text{où } u_x = 0.$$

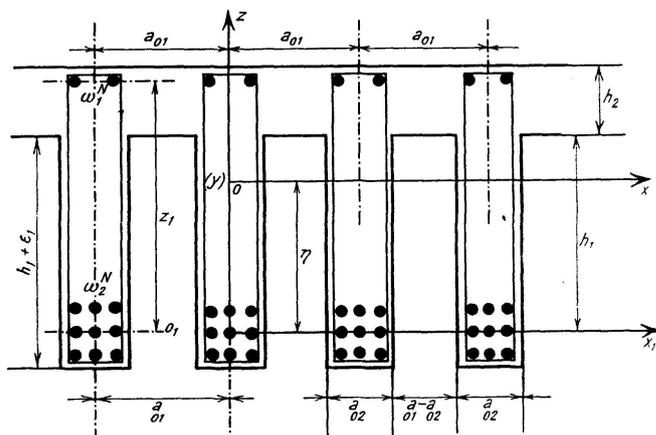


Fig. 4. Coupe transversale d'une plaque nervurée

La rigidité de flexion de l'unité de longueur d'une section perpendiculaire à  $Ox$  sera, d'après le Dr. GIRKMANN, v. p. 481:

$$a_1/D_{0x} = (a_1 - a_2)/D_{0x}^P + a_2/D_{0x}^{N+P},$$

$D_{0x}^P$  étant la rigidité de flexion de la plaque sans nervures et  $D_{0x}^{N+P}$  étant la rigidité flexionnelle de la plaque fictive ayant l'épaisseur  $(h_1 + h_2)$ , v. Fig. 4.

La rigidité de torsion de l'unité de longueur d'une section perpendiculaire à l'axe  $0y$  sera d'après le Dr. GIRMANN, v. p. 481,  $2C_{0y} = 2C^P + (C^N/a_1)$ ,  $2C^P$  étant la rigidité de torsion de la plaque sans nervures,  $C^N$  étant la rigidité de torsion de la nervure.

La rigidité de torsion de l'unité de longueur d'une section perpendiculaire à l'axe  $0x$  sera  $2C_{0x} = 2C^P$ .

$2H$  sera égale à  $u_y D_{0x} + 4C^P + (C^N/a_1)$ , avec  $u_x = 0$ .

On peut imaginer<sup>9)</sup> que le moment total de torsion „ $a_1 m_{yx}$ “, v. Fig. 1, c'est-à-dire le moment dans le plan de la section perpendiculaire à l'axe  $0y$ , soit partagé en deux parties, savoir: un moment  $(m_{yx})_1$  appliqué à la plaque sans nervures de largeur „ $a_1$ “ et un moment  $(m_{yx})_2$  appliqué à la nervure, ce qu'exprime la condition

$$(m_{yx})_1 + (m_{yx})_2 = a_1 m_{yx},$$

alors nous aurons:

$$(m_{yx})_1 / (a_1 h_2^3) = (m_{yx})_2 / h_1 a_2^3 = a_1 m_{yx} / (a_1 h_2^3 + h_1 a_2^3).$$

On en déduira:

$$(m_{yx})_1 = (a_1^2 h_2^3 m_{yx}) / (a_1 h_2^3 + h_1 a_2^3),$$

$$(m_{yx})_2 = (a_1 h_1 a_2^3 m_{yx}) / (a_1 h_2^3 + h_1 a_2^3).$$

f) *Plaques à poutres multiples*, en béton armé. Si l'écartement „ $b_1$ “, v. Fig. 2c, devient également petit par rapport à la dimension „ $b$ “ de la plaque, on passe de la plaque nervurée à la plaque à poutres multiples.

Nous avons

$$u_x = k \cdot u_y, \text{ où } u_y = 1/6 \text{ et } 0 \leq k \leq 1.$$

Nous pensons, pour calculer les constantes du Dr. HUBER, qu'il serait convenable de partager cette plaque en deux plaques nervurées suivant les directions des axes  $0x$  et  $0y$ .

Nous avons alors, v. Fig. 2c:

$$\begin{aligned} D_{0y} &= E_b J_{0y} / (1 - u_x u_y), \quad D_{0x} = E_b J_{0x} / (1 - u_x u_y); \\ 2C_{0y} &= 2C^P + (C^N/a_1), \quad 2C_{0x} = 2C^P + (C^E/b_1), \quad \text{„}E = \text{entretoise“}; \\ 2H &= u_x D_{0y} + u_y D_{0x} + 4C^P + (C^N/a_1) + (C^E/b_1). \end{aligned}$$

Pour  $h_2 = 0$ ,  $u_x = 0$ ,  $u_y = 0$ , nous aurons  $2H = C^N/a_1 + C^E/b_1$ , etc. . . . ., ceci est compatible avec les indications données par le Dr. TIMOSHENKO; de même, pour  $h_1 = 0$  et  $h_3 = 0$ , v. Fig. 2c, nous aurons „ $2H$ “ défini par le Dr. HUBER, lui-même.

On peut définir de même ces constantes pour les plaques mixtes (avec béton armé et acier), etc. . . .

Signalons en passant que l'emploi des séries trigonométriques dans le

<sup>9)</sup> Voir les ouvrages de MM. PIGEAUD et PARIS, loc. cit., p. 1.

calcul des ponts à poutres multiples semble devenir indispensable, de nos jours<sup>10</sup>); la théorie correspondante a été développée par le Dr. HUBER, en 1914<sup>11</sup>).

### VI. Calcul des constantes d'intégration

#### 1. Exemple numérique pour le cas $H^2 - D_{0x}D_{0y} > 0$

Soient (v. Fig. 2 c et 4):

$$b = 20^m, 00; \quad a = 6^m, 16; \quad a_1 = 0^m, 56; \quad a_2 = 0^m, 28;$$

$$h_1 = 1^m, 00; \quad h_2 = 0^m, 30; \quad \dots\dots\dots;$$

Calcul de „ $D_{0y}$ “.

Admettons approximativement  $\omega_1^T = 0,00252 \text{ m}^2$ ,  $z_1 = 1,24 \text{ m}$ ,  $\omega_2^T = 0,01134 \text{ m}^2$ .

Nous trouvons  $S_0^T = 0,587 \text{ m}^2$ ,  $2H_0^T = 0,729 \text{ m}^3$ ,  $3J_0^T = 1,067 \text{ m}^4$ ;  $\eta^T$  sera la racine compatible de l'équation

$$(\eta^T)^2 - 4,193 \eta^T + 2,607 = 0, \text{ c'est-à-dire } \eta^T = 0,76 \text{ m.}$$

Nous aurons alors  $S^T = 0,365 \text{ m}^2$ ,  $H^T = 0,284 \text{ m}^3$ ,  $J^T = 0,315 \text{ m}^4$ ,  $J_{0y} = 0,168 \text{ m}^4$ ,  $E_b = 21 \cdot 10^5 \text{ t} \cdot \text{m}^2$ ,  $D_{0y} = 10^5 \cdot 3,528 \text{ t} \cdot \text{m}^2$ .

Calcul de „ $D_{0x}$ “.

Nous avons, d'après le professeur G. PIGEAUD, v. son ouvrage loc. cit., p. 1, avec les hypothèses préliminaires:

$$h_2 - \varepsilon_2 = 0,30 - 0,03 = 0,27 \text{ m}, \quad \omega_1^P = \omega_2^P = 0,001608 \text{ m}^2, \quad z_1 = 0,24 \text{ m},$$

$$S_0^P = 0,302 \text{ m}^2, \quad H_0^P = 0,0403 \text{ m}^3, \quad J_0^P = 0,00749 \text{ m}^4,$$

$$(\eta^P)^2 - 0,604 \eta^P + 0,0806 = 0, \text{ d'où } \eta^P = 0,20 \text{ m},$$

$$S^P = 0,102 \text{ m}^2, \quad H^P = 0,0203 \text{ m}^3, \quad J^P = 0,00482 \text{ m}^4,$$

$$J_{0x}^P = 0,00078 \text{ m}^4^{12}), \quad D_{0x}^P = 10^5 \cdot 0,0164 \text{ t} \cdot \text{m}^2,$$

D'autre part nous avons:

$$\omega_1^{N+P} = \omega_1^T/a_1 = 0,0045 \text{ m}^2, \quad \omega_2^{N+P} = \omega_2^T/a_2 = 0,0203 \text{ m}^2,$$

$$z_1 = 1,24 \text{ m}, \quad S_0^{N+P} = 1,548 \text{ m}^2, \quad H_0^{N+P} = 0,901 \text{ m}^3, \quad J_0^{N+P} = 0,802 \text{ m}^4,$$

$$(\eta^{N+P})^2 - 3,096 \eta^{N+P} + 1,802 = 0, \text{ d'où } \eta^{N+P} = 0,78 \text{ m},$$

<sup>10</sup>) Voir les ouvrages et les articles: 2, 3, 5, 7, 8, 9, loc. cit., p. 1.

<sup>11</sup>) La bibliographie des Thèses du Dr. M. T. HUBER, sur ce sujet, est donné par lui-même dans sa contribution, loc. cit., p. 1, v. pp. 263 et 264.

Le problème des plaques anisotropes se trouve ainsi résolu tant au point de vue de la flèche de flexion qu'à l'égard des constantes du Dr. HUBER, du moins d'une manière approximative et rationnelle, suffisante pour la pratique.

<sup>12</sup>) Le béton armé entre dans la classe des matériaux non homogènes et non isotropes, dans cet exemple nous avons obtenu la valeur suivante, au lieu de celle d'une section isotrope équivalente:  $J = 0,27^3 / 12 = 0,00164 \text{ m}^4$ .

$$S^{N+P} = 0,768 \text{ m}^2, H^{N+P} = 0,597 \text{ m}^3, J^{N+P} = 0,644 \text{ m}^4, J_{0x}^{N+P} = 0,18 \text{ m}^4 \text{ }^{13}), \\ D_{0x}^{N+P} = 10^5 \cdot 3,78 \text{ t} \cdot \text{m}^2 \text{ }^{14}), \text{ d'où résulte } D_{0x} = 10^5 \cdot 0,0327 \text{ t} \cdot \text{m}^2.$$

Calcul de „ $2C_{0y}$ “

$$2C^P = (E_b J_{0x}^P) / (1 + 1/6) = 10^5 \cdot 0,01404 \text{ t} \cdot \text{m}^2 \text{ }^{15})$$

$$\omega_1^N = 0, \omega_2^N = \omega_2^T = 0,01134 \text{ m}^2, S_0^N = 0,393 \text{ m}^2, H_0^N = 0,140 \text{ m}^3, J_0^N = 0,09333 \text{ m}^4,$$

$$(\eta^N)^2 - 2,807 \eta^N + 1 = 0, \text{ d'où } \eta^N = 0,42 \text{ m},$$

$$S^N = 0,275 \text{ m}^2, H^N = 0,115 \text{ m}^3, J^N = 0,0864 \text{ m}^4, J_{0y}^N = 0,0383 \text{ m}^4,$$

$$C^N/a_1 = 1,231 \cdot 10^5 \text{ t} \cdot \text{m}^2, 2C_{0y} = 10^5 \cdot 1,245 \text{ t} \cdot \text{m}^2.$$

Calcul de „ $H$ “

$$H = 0,5 (10^5 \cdot 0,0327/6) + 2 \cdot 10^5 \cdot 0,01404 + 0,5 \cdot 1,231 \cdot 10^5 = 10^5 \cdot 0,6463 \text{ t} \cdot \text{m}^2.$$

Calcul de „ $H^2 - D_{0x} D_{0y}$ “

$$H^2 - D_{0x} D_{0y} = 10^{10} \cdot 0,418 - 10^{10} \cdot 0,0327 \cdot 3,528 = + 10^{10} \cdot 0,303 \text{ t} \cdot \text{m}^2.$$

Calcul des „ $\delta_n$ “, „ $\gamma_n$ “, „ $\beta_n$ “.

On trouve aisément, v. p. 4:

$$\delta_n = 6,02 \beta_n, \gamma_n = 1,705 \beta_n, \beta_n = 0,157 \cdot n \text{ m}^{-1}.$$

Calcul de „ $\Delta_n$ “.

La théorie des déterminants nous donne (v. la note 8):

$$\begin{vmatrix} e_{1,n} & e_{2,n} \\ e_{1,n}^* & e_{2,n}^* \end{vmatrix} = e_{1,n} e_{2,n}^* - e_{1,n}^* e_{2,n}, \text{ etc. } \dots$$

$$\begin{vmatrix} e_{1,n} & e_{2,n} & e_{3,n} \\ e_{1,n}^* & e_{2,n}^* & e_{3,n}^* \\ e_{1,n}^{**} & e_{2,n}^{**} & e_{3,n}^{**} \end{vmatrix} = e_{1,n} (e_{2,n}^* e_{3,n}^{**} - e_{2,n}^{**} e_{3,n}^*) - e_{1,n}^* (e_{2,n} e_{3,n}^{**} - e_{2,n}^{**} e_{3,n}) + \\ + e_{1,n}^{**} (e_{2,n} e_{3,n}^* - e_{2,n}^* e_{3,n}), \text{ etc. } \dots$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} e_{1,n} & e_{2,n} & e_{3,n} & e_{4,n} \\ e_{1,n}^* & e_{2,n}^* & e_{3,n}^* & e_{4,n}^* \\ e_{1,n}^{**} & e_{2,n}^{**} & e_{3,n}^{**} & e_{4,n}^{**} \\ e_{1,n}^{***} & e_{2,n}^{***} & e_{3,n}^{***} & e_{4,n}^{***} \end{vmatrix} = e_{1,n} \begin{vmatrix} e_{2,n}^* & e_{3,n}^* & e_{4,n}^* \\ e_{2,n}^{**} & e_{3,n}^{**} & e_{4,n}^{**} \\ e_{2,n}^{***} & e_{3,n}^{***} & e_{4,n}^{***} \end{vmatrix} - \\ - e_{1,n}^* \begin{vmatrix} e_{2,n} & e_{3,n} & e_{4,n} \\ e_{2,n}^{**} & e_{3,n}^{**} & e_{4,n}^{**} \\ e_{2,n}^{***} & e_{3,n}^{***} & e_{4,n}^{***} \end{vmatrix} + e_{1,n}^{**} \begin{vmatrix} e_{2,n} & e_{3,n} & e_{4,n} \\ e_{2,n}^* & e_{3,n}^* & e_{4,n}^* \\ e_{2,n}^{***} & e_{3,n}^{***} & e_{4,n}^{***} \end{vmatrix} - e_{1,n}^{***} \begin{vmatrix} e_{2,n} & e_{3,n} & e_{4,n} \\ e_{2,n}^* & e_{3,n}^* & e_{4,n}^* \\ e_{2,n}^{**} & e_{3,n}^{**} & e_{4,n}^{**} \end{vmatrix};$$

<sup>13)</sup> Remarquez que la section isotrope équivalente admettra  $1,3^3/12 = 0,183 \text{ m}^4$ .

<sup>14)</sup> Une comparaison entre  $D_{0x}^{N+P}$  et  $D_{0y}$  met en évidence la supériorité des plaques nervurées sur les plaques non-nervurées.

<sup>15)</sup> Ici, nous avons supposé  $u = 1/6$ . En réalité, dans une plaque nervurée en béton armé on a, d'après le Dr. GIRKMANN  $u_x = 0, u_y = 1/6$ ; ces valeurs donneront  $2C_x^P \neq 2C_y^P$ ; cependant la différence est négligeable.

où

$n =$	1	2	3
$e_{1,n}$	$= - 4,854;$	$- 208,422;$	$- 5085,745;$
$e_{1,n}^*$	$= - 4,398;$	$- 384,438;$	$- 14075,076;$
$e_{1,n}^{**}$	$= - 14,17;$	$- 1808,17;$	$- 117261,124;$
$e_{1,n}^{***}$	$= + 13,04;$	$+ 3335,65;$	$+ 324527,065;$
$e_{3,n}$	$= - 4,769;$	$- 208,393;$	$- 5085,737;$
$e_{3,n}^*$	$= - 4,477;$	$- 384,490;$	$- 14075,099;$
$e_{3,n}^{**}$	$= + 14,14;$	$+ 1808,17;$	$+ 117261,124;$
$e_{3,n}^{***}$	$= - 13,07;$	$- 3335,66;$	$- 324527,065;$

$n =$	1	2	3	$n =$	1	2	3
$e_{2,n}$	$= - 0,084;$	$- 0,553;$	$- 2,343;$	$e_{4,n}$	$= - 0,050;$	$- 0,485;$	$- 2,263;$
$e_{2,n}^*$	$= - 0,009;$	$- 0,177;$	$- 1,247;$	$e_{4,n}^*$	$= - 0,015;$	$- 0,202;$	$- 1,291;$
$e_{2,n}^{**}$	$= - 0,104;$	$- 0,970;$	$- 5,988;$	$e_{4,n}^{**}$	$= + 0,078;$	$+ 0,932;$	$+ 5,957;$
$e_{2,n}^{***}$	$= + 0,014;$	$+ 0,341;$	$+ 3,283;$	$e_{4,n}^{***}$	$= - 0,019;$	$- 0,355;$	$- 3,301;$

avec  $x = -a_1 = -3,64$  m, et  $x = +a_2 = +2,52$  m.

Calcul des „ $A^{16}$ “:

Développements semblables des déterminants, avec „ $d = 0,30$  m“, et

$n =$	1	2	3	.....
$\bar{N}_n$	$= + 5,890 N_1;$	$+ 36,295 N_2;$	$+ 242,243 N_3;$	.....
$\bar{N}_n^*$	$= + 6,057 N_1;$	$+ 61,806 N_2;$	$+ 671,260 N_3;$	.....
$N_n$	$= 0,0198 \sin(0,157 v);$	$0,0197 \sin(0,314 v);$	$0,0196 \sin(0,471 v);$	.....

### 2. Exemple numérique pour le cas $H^2 - D_{0x}D_{0y} < 0$

Considérons une poutrelle en tôle ondulée de  $100 \cdot 100 \cdot 2$  (v. HÜTTE, Bd. 1, 1949, p. 1026), v. Fig. 3a, avec  $a = 40$  cm, et  $b = 200$  cm.

Nous aurons  $D_{0x} = 519$  kg·cm<sup>2</sup>  $H = 2C = 3428$  kg·cm<sup>2</sup>,  $u_x = u_y = 0$ .

Nous trouvons:

$$D_{0y} = 11730000 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2; \beta_n = 0,0157 \cdot n; \varphi_n = 0,139 \cdot n; \psi_n = 0,133 \cdot n;$$

et les constantes d'intégration s'en déduisent aisément.

<sup>16)</sup> De la condition de passage  $(q_x)_2 - (q_x)_1 = -p$ , pour „ $x = 0$ “, il résulte les séries suivantes, qu'admettent différentes rapidités de convergence:

$$\begin{aligned} & \sum_1^\infty (1/n) X_1 \sin \beta_n y \text{ pour l'effort tranchant; ou } \dots \cos \beta_n y. \\ & \sum_1^\infty (1/n^2) X_2 \sin \beta_n y \text{ pour le moment de flexion.} \\ & \sum_1^\infty (1/n^2) X_3 \cos \beta_n y \text{ pour le moment de torsion.} \\ & \sum_1^\infty (1/n^4) X_4 \sin \beta_n y \text{ pour les flèches.} \end{aligned}$$

### Résumé

L'équation aux dérivées partielles (1) du Dr. M. T. HUBER constitue la première base de connaissance mathématique de la plaque anisotrope et non homogène et sa résolution utile pour la pratique n'est possible qu'avec l'hypothèse de répartition linéaire de la charge, car les autres hypothèses donnent des séries qui sont quelquefois très lentement convergentes pour le moment de flexion et ne paraissent pas susceptibles d'applications au calcul numérique. Cependant il y a quelques séries, parmi elles, qui se prêtent aux calculs numériques, mais seulement pour les cas spéciaux.

Suivant la voie ouverte par MM. GALERKIN, OLSEN et REINITZHUBER, l'auteur étudie dans cet article les plaques rectangulaires anisotropes d'épaisseur constante, librement appuyées sur leurs côtés opposés, et il tient compte, pour les deux autres de l'absence d'appui.

### Zusammenfassung

Die partielle Differentialgleichung des berühmten Forschers Dr. M. T. HUBER bildet die Grundlage der mathematischen Erfassung der anisotropen inhomogenen Platte. Ihre praktische Auflösung ist nur möglich unter Annahme linear verteilter Belastung, da andere Voraussetzungen zu Reihenentwicklungen führen, die oft für die Biegemomente sehr schlecht konvergieren und für die numerische Auswertung nicht vorteilhaft erscheinen. Es gibt jedoch darunter einige Reihenentwicklungen, die der numerischen Behandlung zugänglich sind, jedoch nur in Spezialfällen.

Auf dem von GALERKIN, OLSEN und REINITZHUBER eingeschlagenen Wege untersucht der Verfasser rechteckige anisotrope Platten konstanter Dicke, die auf zwei gegenüberliegenden Seiten frei aufliegen und deren andere Ränder ganz frei sind.

### Summary<sup>17)</sup>

The equation with partial derivatives (1) of the eminent scientist Dr. M. T. HUBER constitutes the basis of the mathematical analysis of anisotropic and nonhomogeneous plates, and its effective solution in practice is possible only by accepting the linear load distribution, because other methods result in series that are sometimes very slowly convergent for the bending moment and do not seem to be suitable for numerical calculation. There are, however, some series among them which lend themselves to numerical calculations, but only for special cases.

According to the method proposed by B. G. GALERKIN, Dr. H. OLSEN and Dr. F. K. REINITZHUBER, the writer considers in this article anisotropic rectangular plates of constant thickness freely supported on two opposite sides and unsupported on the other two sides.

<sup>17)</sup> Je dois cette traduction, avec mes vifs remerciements, à Messrs. *Concrete Publications Ltd.*, Editeur, à Londres.