

# Encastrément élastique et flambage des colonnes

Autor(en): **Paris, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **7 (1943-1944)**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-8004>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## ENCASTREMENT ELASTIQUE ET FLAMBAGE DES COLONNES.

ÜBER DIE KNICKUNG VON ELASTISCH EINGESPANNTEN SÄULEN.

ELASTIC FIXING AND THE BUCKLING OF COLUMNS.

A. PARIS, Ingénieur civil, Professeur à l'Université de Lausanne.

Vrais cadres multiples, étagés suivant les deux directions du plan, les magasins et les entrepôts en béton armé appuient leurs planchers sur des colonnes, dont les fûts se superposent des sous-sols aux toits ou terrasses, qui les recouvrent. Ces ouvrages peuvent être isolés et ajourés au point que le raidissement par les cages d'escaliers ou des murs de refend éventuels en devient problématique. La charge de sécurité des colonnes diminue en fonction de l'élasticité des insertions des fûts dans les dalles, soit que se produisent des rotations aux noeuds, soit que la fixité horizontale des planchers fasse défaut.

Le professeur TIMOSHENKO a étudié quelques cas de ce genre. Son ouvrage « Strength of Materials » donne le calcul d'un cadre rectangulaire symétrique dans sa construction et dans sa charge, et qu'il considère par conséquent comme inapte à tout déplacement horizontal dans ses noeuds ainsi balancés. L'absence de solidarité extérieure et de mobilité linéaire conduit à une formule fermée de la charge critique, généralisation de celles d'EULER, qui en constituent les deux cas limites.

Le même auteur a traité, dans « Theory of elastic Stability », le cadre simple à deux jambes de force articulées à leurs pieds et chargées de forces égales aux noeuds supérieurs. Il retrouve ainsi des conditions de symétrie propres à l'établissement d'une solution explicite.

Le professeur K. KRISO, de Brunn, a abordé, dans le volume VI des Mémoires de l'association internationale des Ponts et Charpentes, sous « Knickberechnung mehrfeldriger beliebig gestützter Stäbe », le problème très complexe du flambage des barres d'une poutre treillisée à noeuds mobiles en toutes directions. La recherche des multiples inconnues se fait par voie algébrique.

M. NATER, ingénieur, a publié dans la Schweiz. Bauzeitung, en 1918 déjà, l'étude d'un poteau inséré dans un cadre multiple symétrique. Ici l'interdépendance conduit à une équation transcendante, dont la solution donne le facteur  $K^2$ , proportionnel à la charge critique  $P_{cr}$ , considérée comme limite du problème. L'équation ainsi obtenue, et qu'on peut écrire

$$[+ 2 + K^2 h (l_A + l_B)] \cos Kh + K [+ h - (l_A + l_B) - l_A l_B h K^2] \sin Kh - 2 = 0$$

permet comme le montre l'exemple numérique ci-dessous, une résolution rapide du problème du béton armé où l'on admet l'immobilité des noeuds.

Les symboles

$$\eta = \tau/M \quad (\text{indice de flexibilité d'un noeud}), \text{ et}$$

$$l_A = E \cdot J \cdot \eta_A \quad l_B = E \cdot J \cdot \eta_B \quad (\text{longueurs représentatives des insertions inférieure et supérieure})$$

y introduisent des constantes connues des ouvrages sous-jacents et superposés.

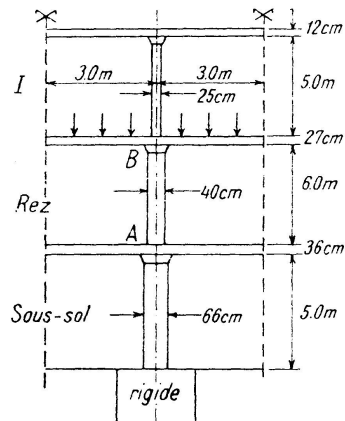


Fig. 1

Plancher champignon formant cadre étagé sur sol rigide.

Pilzdecke als Stockwerkrahmen über starrem Boden.

Mushroom ceiling forming floor frame on rigid ground.

Supposons donc, à titre d'exemple de ce cas de charge, un plancher champignon appuyé sur des colonnes superposées, le tout formant un cadre spatial symétrique dans sa construction et dans sa charge (Fig. 1). Les colonnes du rez, de 600 cm de hauteur, égales et également chargées, s'encastrent dans les planchers inférieur et supérieur que caractérisent les indices de flexibilité suivants:

$$\text{plancher inférieur: } J = 1170 \cdot 10^3 \quad \text{colonne } J = 1020 \cdot 10^3 \text{ cm}^4$$

indice de la dalle unilatérale déformée par deux couples extrêmes égaux et inverses

$$E \cdot \Theta_A = \frac{l}{2J} = \frac{600}{2 \times 1170 \cdot 10^3} = 0,257 \cdot 10^{-3}$$

indice de la colonne en cave

$$E \delta_A = \frac{500}{5 \times 1020 \cdot 10^3} = 0,123 \cdot 10^{-3}$$

indice de flexibilité résultant du noeud sous colonne AB (colonne cave et deux dalles contigues)

$$E \eta_A = 1 : \left( 2 \frac{1}{E \Theta_A} + \frac{1}{E \delta_A} \right) = 1 : 10^3 \left( \frac{2}{0,257} + \frac{1}{0,123} \right) = 0,0626 \cdot 10^{-3}.$$

On trouve pareillement, au noeud supérieur (plancher  $J = 492 \cdot 10^3$ ) auquel se superpose une colonne mince censée articulée dans la terrasse, l'indice de flexibilité

$$E \eta_B = 1 : \left( 2 \frac{1}{E \Theta_B} \right) + \frac{1}{E \delta_B} = 1 : 10^3 \left( \frac{2}{0,609} + \frac{1}{7,94} \right) = 0,294 \cdot 10^{-3}.$$

La colonne du rez (moment d'inertie  $130 \cdot 10^3 \text{ cm}^4$ ) jouit ainsi des encastremements (longueurs représentatives)

$$\begin{aligned}
 l_A &= E \cdot \eta_A \times J = 0,0626 \cdot 10^{-3} \times 139 \cdot 10^{-3} = 8,7 \text{ cm} \\
 l_B &= E \cdot \eta_B \times J = 0,294 \cdot 10^{-3} \times \text{idem} = 41,6 \text{ „} \\
 l_A + l_B &= 50,3 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

L'équation transcendante

$$(+ 2 + K^2 \cdot 600 \cdot 50,3) \cos Kh + K(600 - 50,3 - K^2 \cdot 600 \cdot 8,7 \cdot 41,6) \sin Kh = + 2$$

admet la solution

$$K \cdot h = 333^\circ = 5,81$$

c'est-à-dire

$$K = 5,81 : 600 = 9,69 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$$

$$K^2 = 94,0 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-2}$$

qui conduit à la charge critique

$$\begin{aligned}
 P_{cr} &= K^2 \cdot E \cdot J = 94 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-2} \times 200\,000 \text{ kg/cm}^2 \times 139\,000 \text{ cm}^4 = \\
 &= 2\,605\,000 \text{ kg} = 2\,605 \text{ tonnes.}
 \end{aligned}$$

Le problème plus général, celui de la charge critique d'un poteau inséré dans une poutre continue dépourvue de force d'arrêt, fonctionnant donc comme cadre simple ou multiple, conduit à des solutions naturellement plus compliquées, que nous allons examiner en utilisant les ellipses d'élasticité des noeuds d'insertion. Nous obtiendrons ainsi des équations transcendantes suivant le type NATER, et dont le cas d'immobilité des noeuds formera la condition limite. Nous introduirons cette recherche par l'examen des ellipses d'élasticité des noeuds d'insertion des poteaux.

### I. Ellipse d'élasticité d'une tête de poteau.

Comme le professeur W. RITTER l'a montré dans ses « Anwendungen der graph. Statik », les déplacements d'un point quelconque d'un corps élastique s'expriment grâce à l'ellipse d'élasticité de ce point, courbe centrale du système antipolaire des directions de forces et des centres de rotation conjugués.

On connaîtra donc la nature des déplacements de la tête d'un poteau, solidaire des planchers qui le limitent haut et bas, dès qu'on aura défini l'ellipse de cette tête en fonction de l'élasticité de la base d'encastrement du poteau et de la résistance du plancher, qui s'appuie sur son sommet. Les déplacements des noeuds étant uniquement horizontaux, on ne connaît que les demi-axes verticaux de leurs ellipses.

Le plancher supporté résiste à la rotation de la tête et assure, en outre, l'égalité des déplacements horizontaux des sommets de tous les poteaux, qui s'y insèrent. La base du poteau se maintient plus fermement, en ce sens que la double action, rotation et déplacement, est tempérée par une résistance élastique, résistance qui peut devenir absolue si la base est un sol de fondation, non un plancher élastiquement déformable.

Considérons d'abord le premier poteau  $A_i A_s$ , et soient

$$m_1 = h_1 : E \cdot J_1 \qquad i_1 = h_1 \times \sqrt{1/12}$$

sa masse adjointe et le demi axe vertical de son ellipse d'élasticité.

Soit aussi  $\eta_A = \tau_A : M_A$  la rotation spécifique de la base d'appui  $A_i$ , quotient de la rotation  $\tau$  divisée par le moment  $M_A$ , qui la produit, son indice de flexibilité donc. Et soit en outre  $\delta_A$  l'indice de flexibilité de la tête  $A_s$  dans le pied de la colonne de l'étage supérieur.

Ces facteurs suffisent à définir comme suit l'ellipse d'élasticité du noeud  $A_s$ , au haut du poteau (Fig. 2). Une force horizontale passant par le centre cherché provoque un déplacement sans rotation du noeud, déplacement qui, transmis au plancher complet, ne provoque aucun effort dans les poteaux de l'étage supérieur. Les rotations dues à  $m_1$  et à  $\eta_A$  devant être égales et de signes contraires, on a l'ordonnée du centre

$$n_A = \frac{h_1}{2} \frac{m_1}{\eta_1 + m_1}.$$

Un couple  $M$  agissant sur le noeud complexe  $A_s$  le fait tourner autour du centre  $C_{As}$  de son ellipse; l'angle de rotation égal des deux lèvres du noeud  $A_s$ , où le couple se répartit entre fûts inférieur et supérieur, demande que

$$\begin{aligned} M \cdot m_{As} &= M_i (m_1 + \eta_A) = M_s \delta_A \\ M &= M_i + M_s \end{aligned}$$

ce qui donne à la masse adjointe du noeud l'expression

$$m_{As} = 1 : \left( \frac{1}{m_1 + \eta_A} + \frac{1}{\delta_A} \right).$$

Le demi axe  $z_{As}$  vertical résulte du calcul d'un déplacement horizontal parallèle du noeud  $A_s$  sous l'effet de la force  $H$  (Fig. 2), qui s'exprime par

$$m_{As} \cdot z_{As}^2 = m_1 \left( \frac{h_1}{2} - n_A \right) n_A^* + \eta_A \cdot n_A \cdot h_1$$

si  $n_A^*$  désigne l'ordonnée de l'antipôle du centre  $C_{As}$  relatif à l'ellipse propre du poteau, de centre  $C_1$  donc.

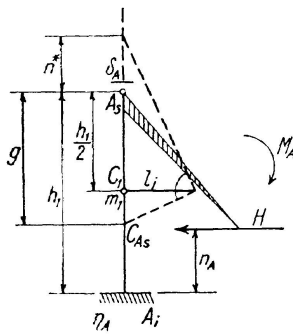


Fig. 2

Ellipse d'élasticité de la tête d'un poteau inséré élastiquement à ses extrémités.

Elastizitätseellipse für die Kante eines an beiden Enden elastisch eingespannten Pfeilers.

Ellipse of elasticity for the head of a column fixed elastically at its ends.

Insérée sur ce noeud  $A_s$ , la travée  $AB$  de longueur  $a$ , que nous supposons en outre librement appuyée sur le poteau  $B$ , possède une ellipse finale, qui caractérise les déformations élastiques de son point terminal  $B'$ , muni de l'accent simple parce qu'il initie la série de gauche. Les déplacements de  $B'$  sont tous horizontaux, ce pourquoi le centre  $C_B$ , se place sur la verticale par  $B$ ; d'une rotation sans déplacement vertical du point  $B'$  nous tirons

$$\text{masse adjointe } m_{B'} = m_A + m_a \quad \text{où } m_a = \frac{a}{EJ_a} \quad m_A = m_{As}$$

et d'un déplacement parallèle

$$\text{ordonnée du centre } e_{B'} = \frac{2 m_A}{4 m_A + m_a} \times g$$

le demi axe vertical étant alors donné par

$$m_{B'} z_{B'}^2 = m_A z_A^2 - \frac{2 m_A \times m_a}{2 m_A + m_a} \times e \cdot g \quad e = e_{B'}$$

L'ellipse d'un noeud intermédiaire,  $B_s$  par exemple, symbolise l'élasticité du point de soudure d'une travée et du poteau, qui aboutit à son extrémité; l'ellipse du noeud réagit sous une force résultante identiquement comme le ferait chacune des deux ellipses primitives sous la composante qui la concerne. On trouve donc le centre de l'ellipse cherchée en faisant agir séparément deux forces horizontales, qui provoquent le même déplacement parallèle dans les systèmes primitifs; leur résultante divise l'intervalle  $C_{Bs} - C_{B'}$  des centres dans le rapport

$$a_1 : a_2 = m_{Bs} \cdot z_{Bs}^2 : m_{B'} \cdot z_{B'}^2 .$$

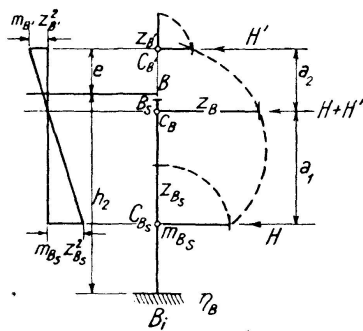


Fig. 3

Ellipse finale d'un noeud intermédiaire, formant soudure d'un poteau et d'une travée.

Endgültige Ellipse eines Knotens zwischen Pfeiler und Unterzug.

Final ellipse for an intermediate joint, where a column and a beam are welded together.

Un demi cercle, centré sur la verticale  $B$  et passant par les extrémités des deux demi-axes primitifs préalablement rabattus, selon construction du professeur W. RITTER, intercepte le demi-axe  $z_B$  sur la normale par le centre  $C_B$ . La masse adjointe résulte ensuite de l'égal déplacement utilisé pour fixer le centre et de l'équilibre des forces, grâce à la condition

$$m_B z_B^2 = \frac{m_{Bs} z_{Bs}^2 \times m_{B'} z_{B'}^2}{m_{Bs} z_{Bs}^2 + m_{B'} z_{B'}^2} \quad (\text{Figure 3})$$

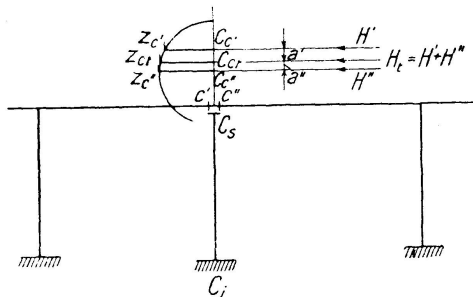


Fig. 4

Ellipse totale d'une tête de poteau.

Totale Ellipse eines Pfeilerkopfes.

Total ellipse for the head of a column.

Progressant ainsi de noeud en noeud dès l'extrémité gauche de la poutre continue, nous déterminons la série de gauche des ellipses finales et des ellipses de noeuds. Nous ferons de même en partant de l'extrémité droite de la poutre, établissant les ellipses de droite. Ces deux groupes seraient identiques, mais de sens inverses, en cas de symétrie de la poutre continue.

La connaissance des deux séries d'ellipses finales, de gauche et de droite nous permet d'établir les ellipses totales, une pour chaque noeud, et ceci donc en vue de déplacements dépourvus de composantes verticales (Fig. 4). Les centres de deux ellipses finales, affrontées au noeud considéré, se plaçant dans l'axe du poteau, on trouve le centre de l'ellipse totale grâce à la proportion issue de déplacements simples égaux de l'extrémité commune

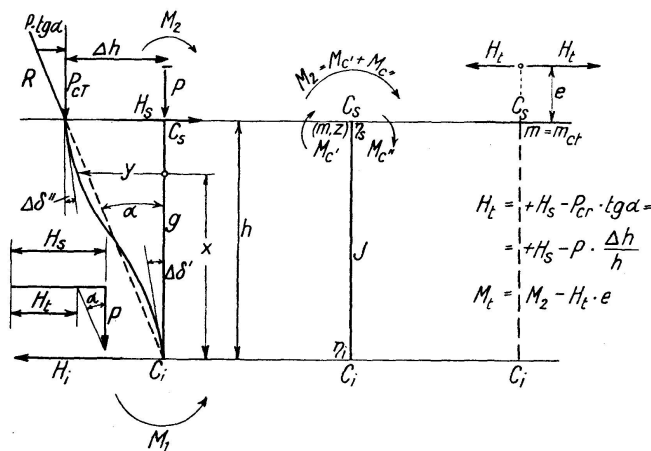
$$a' : a'' = m_{C'} z_{C'}^2 : m_{C''} z_{C''}^2$$

déplacements imposés par deux forces  $H'$  et  $H''$ . Un demi-cercle de RITTER, passant par les extrémités de  $z_{C'}$  et  $z_{C''}$  rabattus, intercepte le demi-axe  $z_C$  à hauteur du centre qui vient d'être déterminé. La masse adjointe résulte ensuite de l'égalité des déplacements

$$m_{Ct} z_{Ct}^2 = \frac{m_{C'} z_{C'}^2 \times m_{C''} z_{C''}^2}{m_{C'} z_{C'}^2 + m_{C''} z_{C''}^2}$$

## II. Charge critique d'un poteau à tête retenue élastiquement.

Considérons le cas général d'une distribution arbitraire des résistances des colonnes et des planchers, ainsi que des charges imposées. L'élasticité des insertions de poteaux, haut et bas des planchers limites des colonnes calculées, s'exprime conformément aux indices de flexibilité, tels que le professeur E. MOERSCH les définit dans son ouvrage « Durchgehender Träger ».



Charge critique d'un poteau retenu élastiquement par planchers déformables (rotations et déplacements horizontaux).

Kritische Last eines in deformierbaren Decken elastisch eingespannten Pfeilers (Drehungen und horizontale Verschiebungen).

Critical load on a column held elastically by unstable ceilings (subject to rotations and horizontal displacements).

Nous étudierons en premier lieu le cas simple de la charge d'un seul poteau. Soit  $C_i C_s$  ce poteau (Fig. 5). De hauteur  $h$  et de moment d'inertie  $J$ , constant, il supporte une charge  $P$ , que la tendance au flambage accompagne de couples d'insertion  $M_1$  et  $M_2$  dans les sols inférieur et supérieur; nous cherchons la grandeur critique  $P_{cr}$  de cette charge  $P$ .

La poussée  $-H_s$  du sommet déplace le plancher supérieur. Entraînée par ce déplacement, la charge  $P$  ne reste confondue avec l'axe du poteau qu'en empruntant une composante horizontale  $P \cdot \text{tg } \alpha$  à l'équilibre général, laissant une résultante

$$H_t = H_s - P \cdot \text{tg } \alpha$$

qui provoque le déplacement du plancher

$$\Delta h = -H_t \cdot m z^2$$

où l'on caractérise l'ellipse totale du noeud par

$$\begin{aligned} m &= m_{Ct} \\ z &= z_{Ct} . \end{aligned}$$

Le déplacement inverse du plancher inférieur ne nous intéresse pas, car il se transmet sans résistance à toute la superstructure.

On écrit en conséquence la grandeur du moment fléchissant à l'abscisse verticale  $x$  le long du poteau

$$M_x = M_2 + H_s (h - x) - P(\Delta h - y)$$

expression qui conduit à l'équation différentielle

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = - M_x$$

c'est-à-dire à

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P}{EJ} y = - \frac{H_s}{EJ} (h - x) - \frac{M_2}{EJ} + \frac{P}{EJ} \Delta h .$$

Les symboles

$$K^2 = \frac{P}{EJ} \quad A = \frac{H_s}{EJ} \quad B = + \frac{M_2}{EJ}$$

donnent à cette équation la forme

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + K^2 y = - A (h - x) - B + K^2 \cdot \Delta h$$

qu'on intègre par

$$- y = C_1 \cos Kx + C_2 \sin Kx + \frac{A}{K^2} (h - x) + \frac{B}{K^2} - \Delta h$$

équation où le déplacement du plancher, fonction de la poussée résultante  $H_s$ , et par conséquent de

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta h}{h}$$

s'exprime par

$$\Delta h = - (H_s - P \cdot \operatorname{tg} \alpha) m z^2 = - \left( H_s - P \cdot \frac{\Delta h}{h} \right) m z^2$$

ce qui donne l'expression définitive du déplacement

$$\Delta h = + H_s \cdot h \cdot \frac{m z^2}{P m z^2 - h} = + E J A h \frac{m z^2}{E J K^2 m z^2 - h} .$$

Le biaisement de l'axe théorique de la colonne s'accompagne de rotations des deux tangentes de départ solidaires des noeuds élastiques haut et bas, rotations dont la grandeur dépend des moments aux extrémités:

base ( $x = 0, y = 0$ )

$$\begin{aligned} \Delta \delta' &= \left( + M_2 + H_s \cdot h - P \cdot H_s \cdot h \frac{m z^2}{P m z^2 - h} \right) \eta_i = \\ &= \left( + M_2 - H_s \cdot h \frac{h}{P m z^2 - h} \right) \eta_i = E J B \eta_i - E J A \frac{h \cdot \eta_i}{P m z^2 - h} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\text{sommet } (x = h, y = \Delta h) \quad \Delta \delta'' &= + M_t \cdot m = (+ M_2 - H_t \cdot e) m = \\
&= \left[ + M_2 - \left( H_s - P \cdot \frac{\Delta h}{h} \right) e \right] m = \left( + M_2 + H_s \cdot e \frac{h}{P m z^2 - h} \right) m = \\
&= + E J B m + \frac{E J A e h m}{E J K^2 m z^2 - h}.
\end{aligned}$$

Nous condensons ces expressions en posant

$$\omega = K \cdot h \quad K \cdot e = \varepsilon \quad K \cdot z = \zeta \quad S = \frac{E J}{h} \eta_i \quad L = \frac{E J}{h} m_{Ct}$$

et pouvons écrire en conséquence les quatre conditions d'extrémités

$$\begin{aligned}
+ C_1 + A \left( + \frac{h}{K^2} + \frac{L h z^2}{1 - L \zeta^2} \right) + B \frac{1}{K^2} &= 0 \\
+ C_2 K - A \left( + \frac{1}{K^2} + \frac{S h^2}{1 - L \zeta^2} \right) - B S h &= 0 \\
+ C_1 \cos \omega + C_2 \sin \omega + B \frac{1}{K^2} &= 0 \\
+ C_1 K \sin \omega - C_2 K \cos \omega + A \frac{1 - L \zeta^2 + L \omega \varepsilon}{K^2 (1 - L \zeta^2)} - B L h &= 0.
\end{aligned}$$

Ces quatre équations homogènes lient les quatre constantes d'intégration  $A B C_1 C_2$ , dont l'élimination conduit à deux valeurs égales de  $C_2$ ; d'où résulte l'équation transcendante

$$\begin{aligned}
[+ 2 - 2 \cos \omega - (1 - \lambda) \omega \cdot \sin \omega - \lambda \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega + L S \omega^3 \cdot \sin \omega] - \\
- L \zeta^2 [2 - 2 \cos \omega + \lambda \cdot \omega \cdot \sin \omega] + L \cdot \omega \cdot \varepsilon [1 - \cos \omega + S \cdot \omega \cdot \sin \omega] = 0
\end{aligned}$$

où l'on a fait

$$L + S = \lambda.$$

Nous reprendrons, à titre d'exemple numérique, les données de la figure 1, mais en précisant que le bâtiment comporte trois colonnes, dotées de moments d'inertie différents, à savoir

$$\begin{aligned}
\text{colonnes extérieures} \quad J_1 &= 180 \cdot 10^3 \\
\text{colonne médiane} \quad J_2 &= 139 \cdot 10^3
\end{aligned}$$

et que le plancher porté garde la même raideur  $J = 492 \cdot 10^3$ .

Ces caractères se traduisent, dans l'ellipse totale du noeud médian, par les dimensions

$$\begin{aligned}
\text{masse adjointe} \quad m_{Bt} &= 2,28 \cdot 10^{-3} \\
\text{demi-axe vertical} \quad z_{Bt} &= 112 \text{ cm} \\
\text{ordonnée du centre} \quad e &= 138 \text{ cm}.
\end{aligned}$$

On demande à connaître la charge critique de la colonne médiane, seule chargée dans ce cas.

Les coefficients de l'équation transcendante sont, pour  $E = 1$  (qui s'élimine dans cette résolution)

$$S = 0 \quad L = \frac{1 \times 139 \cdot 10^3}{600} \cdot 2,29 \cdot 10^{-3} = 0,531 \quad \lambda = L$$

$$\varepsilon = K \cdot e = \frac{138}{600} \omega = 0,230 \omega$$

$$\zeta = K \cdot z = \frac{112}{600} \omega = 0,187 \omega$$

faisant

$$L \cdot \omega \cdot \varepsilon = 0,531 \cdot \omega \times 0,230 \cdot \omega = 0,122 \omega^2$$

$$L \cdot \zeta^2 = 0,531 \times 0,187^2 \omega^2 = 0,019 \omega^2.$$

Le terme en  $\zeta^2$  joue pratiquement peu de rôle; nous le conservons néanmoins et obtenons l'équation

$$+ 2 + 0,084 \omega^2 - 2 \cos \omega - 0,469 \omega \cdot \sin \omega - 0,615 \omega^2 \cdot \cos \omega - 0,010 \omega^3 \cdot \sin \omega = 0$$

qui admet la racine

$$\omega = 295^\circ = 5,145.$$

La charge critique résulte de

$$\omega^2 = K^2 h^2 = \frac{P}{EJ} h^2 = 5,145^2$$

par

$$P_{cr} = \frac{5,145^2 \times 200\,000 \text{ kg/cm}^2 \times 139\,000 \text{ cm}^4}{600^2} = 2\,050\,000 \text{ kg} = 2050 \text{ tonnes}$$

chiffre qui représente 78% du résultat obtenu sans tenir compte de la mobilité des noeuds, modérée du reste ici par la raideur relative des colonnes extérieures.

### III. Charge critique d'un ensemble de poteaux solidarités par une poutre.

Nous ne supposons de symétrie ni dans l'ouvrage ni dans les charges des diverses colonnes.

La charge de chaque colonne conduit à un déplacement du plancher; le cumul de ces mouvements élastiques et coordonnés représentera le déplacement total

$$\Delta h = \Delta h_A + \Delta h_B + \dots \Delta h_N.$$

Chaque tête de poteau de la lignée subit le déplacement complet; le moment fléchissant dans l'un de ces poteaux,  $C_i C_s$  par exemple, s'exprime alors par

$$cM_x = + cM_2 + H_C (h_C - x) - P_C \cdot \Delta h + P_C \cdot y.$$

Et l'équation de l'élastique

$$EJ_C \frac{d^2 y}{dx^2} = - cM_x$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P_C}{EJ_C} y = - \frac{H_C}{EJ_C} (h_C - x) - \frac{cM_x}{EJ_C} + \frac{P_C}{EJ_C} \Delta h$$

prend la forme

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + K_C^2 y = - A_C (h_C - x) - B_C + K_C^2 \Delta h$$

grâce aux symboles

$$K_C^2 = + \frac{P_C}{EJ_C} \quad A_C = + \frac{H_C}{EJ_C} \quad B_C = + \frac{cM_2}{EJ_C}$$

la rotation extrême

$$\omega_C = K_C h_C$$

intervient plus bas. L'intégrale

$$-y = cC_1 \cos K_C x + cC_2 \sin K_C x + \frac{A_C}{K_C^2} (h_C - x) + \frac{B_C}{K_C^2} - \Delta h$$

contient quatre constantes, qui doivent satisfaire aux conditions de déplacement et de rotation des deux extrémités, ce qui donne les équations

$$\begin{aligned} &+ cC_1 + A_C \frac{h_C}{K_C^2} + B_C \frac{1}{K_C^2} - \Delta h = 0 \\ &+ K_C cC_2 - A_C \frac{1}{K_C^2} = + (cM_2 + H_C h_C - P_C \cdot \Delta h) r_C \\ &+ cC_1 \cdot \cos \omega_C + cC_2 \cdot \sin \omega_C + B_C \frac{1}{K_C^2} - \Delta h = - \Delta h \\ &- K_C \cdot cC_1 \sin \omega_C + K_C \cdot cC_2 \cos \omega_C - A_C \frac{1}{K_C^2} = \\ &= - \left( cM_2 - H_C e_C + P_C \frac{\Delta h}{h_C} e_C \right) m_C. \end{aligned}$$

Le déplacement cumulé  $\Delta h$  vaut

$$\Delta h = \sum_{C=A}^N \left( -H_C + P_C \frac{\Delta h}{h_C} \right) m_C z_C^2$$

ce qui donne

$$\Delta h = \frac{\sum_A^N (h_C L_C A_C z_C^2)}{\sum_A^N (L_C K_C^2 z_C^2) - 1} = \frac{\sum (A)}{\sum (K) - 1}$$

quotient dont le module d'élasticité a disparu puisque la masse adjointe  $m$  le contient en dénominateur. Les conditions aux extrémités deviennent dès lors

$$\begin{aligned} &+ cC_1 + A_C \frac{h_C}{K_C^2} + B_C \frac{1}{K_C^2} - \frac{\sum (A)}{\sum (K) - 1} = 0 \\ &+ K_C \cdot cC_2 - A_C \left( + S_C h_C^2 + \frac{1}{K_C^2} \right) - S_C h_C B_C + S_C h_C K_C^2 \frac{\sum (A)}{\sum (K) - 1} = 0 \\ &+ cC_1 \cos \omega_C + cC_2 \sin \omega_C + B_C \frac{1}{K_C^2} = 0 \\ &- K_C \cdot cC_1 \sin \omega_C + K_C \cdot cC_2 \cos \omega_C - A_C \left( + \frac{1}{K_C^2} + L_C h_C e_C \right) + L_C h_C B_C + \\ &+ L_C K_C^2 e_C \frac{\sum (A)}{\sum (K) - 1} = 0. \end{aligned}$$

On élimine successivement deux des constantes, puis la troisième  $C_2$  s'exprime par deux valeurs équivalentes en fonction des constantes  $A$  relatives aux divers poteaux, et qui donnent l'équation homogène

$$\begin{aligned}
 & + A_C [(+ \cos \omega_C - 1 - S_C \omega_C^2)(+ 1 - \cos \omega_C + L_C \omega_C \sin \omega_C) + \\
 & + (+ L_C \omega_C^2 \cos \omega_C + \omega_C \sin \omega_C - 1 + \cos \omega_C - L_C \varepsilon_C \omega_C + L_C \varepsilon_C \cos \omega_C) \times \\
 & \times (1 - \cos \omega_C + S_C \omega_C \sin \omega_C)] + \\
 & + \frac{\sum(A)}{\sum(K) - 1} [+ S_C \omega_C \cdot K_C^3 (+ 1 - \cos \omega_C + L_C \omega_C \sin \omega_C) + \\
 & + (+ L_C K_C \varepsilon_C - L_C K_C \varepsilon_C \cos \omega_C - L_C K_C \omega_C \cos \omega_C - K_C \sin \omega_C) \times \\
 & \times K_C^2 \times (1 - \cos \omega_C + S_C \omega_C \sin \omega_C)] = 0
 \end{aligned}$$

où  $K = \omega/h$ .

On dispose d'autant d'équations homogènes de ce type qu'il y a de facteurs  $A$ , c'est-à-dire  $A_A$  au poteau  $A$ ,  $A_B$  au  $B$ , etc.; hormis la nullité de tous ces facteurs, il y a une solution indéterminée qui les lie tous par la nullité du déterminant des coefficients des termes en  $A$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & n_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & n_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & n_n \end{vmatrix} = 0$$

L'équation  $D = 0$  lie donc les valeurs  $A$  de telle manière que nous pouvons ou bien en choisir  $(n-1)$  dont aucune ne dépasserait la charge critique du poteau, et déterminer en conséquence la  $n$ ème, qui ne doit pas être négative,

ou bien admettre entre ces charges critiques une proportion, celle des moments d'inertie par exemple.

Nous choisirons cette seconde porte de sortie.

Supposons, à titre d'exemple, le plancher à trois poteaux étudié au chapitre précédent, alors dans la supposition de la charge sur celui du milieu seul. Ces poteaux, dont les extérieurs, égaux, sont plus robustes que le médian, supportent des charges pareillement distribuées

$$A = C \quad \text{et} \quad B$$

deux inconnues donc.

L'ellipse du noeud  $B$ , formé par la travée  $AB$  et le poteau  $B_i B_s$ , a son centre et son demi-axe définis par les valeurs, calculées par ailleurs selon les formules données ci-avant selon le schéma:

$$\text{ellipse de linteau} \quad m_a = 600 : 1 \times 4,92 \cdot 10^3 = 1,22 \cdot 10^3$$

$$\text{ellipse finale } AB' \quad e_{B'} = 138 \text{ cm} \quad z_{B'} = 112 \text{ cm}$$

$$m_{B'} z_{B'}^2 = 56,80$$

$$\text{ellipse du sommet } B_s \quad a = 300 \text{ cm} \quad i_2 = 173 \text{ cm}$$

$$m_2 = 600 : 1 \times 139 \cdot 10^3 = 4,32 \cdot 10^3$$

$$m_2 i_2^2 = 4,32 \cdot 10^3 \times 173^2 = 129,0.$$

Le centre de l'ellipse du noeud se place au sommet  $B$  lui-même ( $g = 0$ ), où le demi-cercle de RITTER donne

$$z_B = 254 \text{ cm.}$$

La masse adjointe résulte du produit

$$m_B z_B^2 = \frac{129,0 \times 56,8}{129,0 + 56,8} = 39,4$$

ce qui donne

$$m_B = 39,4 : 254^2 = 0,61 \cdot 10^{-3}$$

L'ellipse finale de la travée  $BC'$ , insérée en  $B$ , a son centre au noeud  $C$  puisque  $g = 0$  en  $B$ ; sa masse adjointe

$$m_{C'} = 1,83 \cdot 10^{-3}$$

conduit au produit

$$m_{C'} \cdot z_{C'}^2 = 39,4 = m_{At} \cdot z_{At}^2$$

égal à  $m_B z_B^2$ .

L'ellipse totale de  $C'$  se confond avec cette ellipse finale du noeud, faute d'une travée se soudant à  $C'$  au-dessus de la tête  $C_s$  du poteau.

L'exemple précédent nous avait donné l'ellipse totale du noeud  $B$  par

$$m_{Bt} z_{Bt}^2 = 28,4$$

avec les moments d'inertie

$$J_1 = 180 \cdot 10^3 \quad \text{et} \quad J_2 = 139 \cdot 10^3$$

des colonnes de hauteur uniforme 600 cm. Nous pouvons donc écrire les deux polynomes (où  $E = 1$  puisqu'il s'élimine)

$$\begin{aligned} \sum (A) &= h_A L_A z_A^2 A_A + h_B L_B z_B^2 A_B + h_C L_C z_C^2 A_C = \\ &= 1 \times (2J_1 m_A z_A^2 A_A + J_2 m_B z_B^2 A_B) = \\ &= 2 \times 180 \cdot 10^3 \times 39,4 A_A + 139 \cdot 10^3 \times 28,4 A_B = \\ &= 14\,200 \cdot 10^3 A_A + 3\,940 \cdot 10^3 A_B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum (K) &= 2 L_A K_A^2 z_A^2 + L_B K_B^2 z_B^2 = \frac{2J_C}{h_C} m_A z_A^2 K_A^2 + \frac{J_B}{h_B} m_B z_B^2 K_B^2 = \\ &= 2 \frac{180 \cdot 10^3}{600} 39,4 K_A^2 + \frac{139 \cdot 10^3}{600} 28,4 K_B^2 = 0,066 \omega_A^2 + 0,018 \omega_B^2 \end{aligned}$$

ce qui conduit au quotient

$$\frac{\sum (A)}{\sum (K) - 1} = \frac{14\,200 \cdot 10^3 A_A + 3\,940 \cdot 10^3 A_B}{0,066 \omega_A^2 + 0,018 \omega_B^2 - 1}$$

L'équation transcendante, appliquée successivement au deux noeuds  $A_s$  et  $B_s$ , donne la paire de conditions

$$\begin{aligned} \text{I) } &+ A_A [ + 2000 - 4000 \cos \omega + 2000 \cos^2 \omega + \omega ( + 450 \sin \omega \cdot \cos \omega - 450 \sin \omega ) + \\ &+ \omega^2 ( - 168 - 214 \cos \omega + 382 \cos^2 \omega ) + \omega^3 ( - 28,1 \sin \omega + \\ &+ 28,1 \sin \omega \cdot \cos \omega ) + \omega^4 ( - 36,0 + 45,8 \cos \omega - 9,8 \cos^2 \omega ) ] + \\ &+ A_B [ \omega^3 ( + 18,2 \sin \omega \cdot \cos \omega - 18,2 \sin \omega ) + \omega^4 ( - 10,0 + 10 \cos^2 \omega ) ] = 0 \\ &= a \cdot A_A + b \cdot A_B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{II)} \quad & + A_B [ + 2000 - 4000 \cos \omega + 2000 \cos^2 \omega + \omega ( + 469 \sin \omega \cdot \cos \omega - \\
& - 469 \sin \omega + 653 \cos^2 \omega ) + \omega^2 ( - 46 - 439 \cos \omega - 168 \cos^2 \omega ) + \\
& + \omega^3 ( + 21,2 \sin \omega - 21,2 \sin \omega \cdot \cos \omega - 54,8 \cos^2 \omega ) + \omega^4 ( + 51,1 \cos \omega + \\
& + 11,9 \cos^2 \omega - 10,2 ) ] + A_A [ - 7,96 \omega^2 \cos \omega + \omega^3 ( + 65,6 \sin \omega \cdot \cos \omega - \\
& - 65,6 \sin \omega ) + \omega^4 ( + 7,96 - 42,7 \cos \omega + 42,7 \cos^2 \omega ) ] = 0 \\
& = c \cdot A_A + d \cdot A_B
\end{aligned}$$

où nous avons introduit une seule valeur  $\omega$ , que nous considérons comme moyenne.

Les quatre facteurs  $a, b, c, d$  du déterminant, ainsi définis, donnent, si on les calcule pour la racine

$$\omega = 225^\circ = 3,93 \quad \sin \omega = -0,707 \quad \cos \omega = 0,707$$

les valeurs

$$a = -4610 \quad b = +150 \quad c = +19040 \quad d = -640$$

qui résolvent le déterminant par

$$\begin{aligned}
D &= a \cdot d - b \cdot c = +4610 \cdot 640 - 150 \cdot 19040 = \\
&= 10^3 (+2940 - 2850) = +10^3 \cdot 90
\end{aligned}$$

c'est-à-dire avec une erreur de 3% sur les produits partiels. La solution voisine

$$\omega = 230^\circ$$

donnerait

$$D = 10^3 (+9050 - 410) = +10^3 \cdot 8640$$

donc aussitôt une erreur bien plus grande. La solution extrapolée

$$= 225^\circ - 5^\circ \frac{90}{8640 + 90} = 224,94^\circ$$

montre que  $225^\circ$  constitue la réponse plausible.

Si nous admettons maintenant la proportion

$$\frac{P_A}{J_A} = \frac{P_B}{J_B} \quad \text{c'est-à-dire} \quad K_A^2 = K_B^2 = K_{\text{moyen}}^2$$

et la hauteur  $h$  étant constante

$$\omega_A = \omega_B = \omega_{\text{moyen}} = 3,93$$

nous obtenons la charge critique des deux catégories de poteaux par

$$P_A = P_C = \frac{E J_1 \omega^2}{h^2} = \frac{200\,000 \text{ kg/cm}^2 \times 180 \cdot 10^3 \text{ cm}^4}{600^2 \text{ cm}^2} \times 3,93^2 = 1\,540\,000 \text{ kg}$$

$$P_B = \frac{E J_2 \omega^2}{h^2} = \frac{200\,000 \times 139 \cdot 10^3}{600^2} \times 3,93^2 = 1\,190\,000 \text{ kg}.$$

Le poteau médian admettait une charge critique de 2050 tonnes lorsqu'il était sollicité seul dans le même cadre élastique; la déformation cumulée réduit donc ce chiffre à

$$1190 \text{ t} = 58 \% \text{ de } 2050 \text{ tonnes}$$

et, relativement au poteau à tête immobile, à

$$1190 \text{ t} = 45 \% \text{ de } 2605 \text{ tonnes.}$$

### Résumé.

Une colonne isolée subit le phénomène du flambage de manière indépendante conformément aux équations établies par le prof. TIMOSHENKO, puis par M. NATER, ingénieur; elle admet ainsi la charge critique maximum compatible avec ses conditions d'insertion et de mobilité aux extrémités. Par contre, une lignée de colonnes, de sections arbitrairement choisies et inégales entre elles, voit la somme de charges critiques des poteaux solidarisés tomber bien en dessous du total des charges critiques des colonnes indépendantes.

L'établissement de formules analytiques, propres à évaluer la somme critique des charges des colonnes solidaires, se heurte à des complications et conduit à des expressions peu maniables. Au contraire, l'application de la méthode de l'ellipse d'élasticité du prof. Dr. W. RITTER (E. P. F.) condense successivement les résultats obtenus des éléments introduits, et conduit avec élégance au résultat cherché.

Ce résultat, un total de charges, constitue une limite pour l'ensemble des colonnes. On pourra admettre, par exemple, sa distribution en proportion des moments d'inertie individuels des poteaux.

La charge totale des poteaux solidarisés par un plancher non contrebuté peut tomber à moins de la moitié du cumul des charges critiques individuelles.

### Zusammenfassung.

Eine einzelne Säule ist der Knickung unterworfen, gemäß den durch Prof. TIMOSHENKO und Ingenieur NATER aufgestellten Gleichungen; demnach trägt sie eine maximale kritische Last, welche von den Einspannverhältnissen und den Bewegungsmöglichkeiten ihrer beiden Endpunkte abhängig ist. Im Gegensatz dazu sinkt die kritische Gesamtlast einer Säulenreihe, deren Querschnitte willkürlich und ungleich sind, weit unter den Betrag, der durch die Summe der kritischen Lasten der einzelnen, unabhängigen Säulen gegeben ist.

Die analytische Untersuchung zur Abschätzung der kritischen Gesamtlast der solidarisch wirkenden Säulen führt zu verwickelten und wenig handlichen Formeln. Dagegen empfiehlt sich die Anwendung der Methode der Elastizitätsellipse von Prof. W. RITTER (E. T. H.), welche, die Einzelergebnisse zusammenfassend, in eleganter Weise das Ziel erreicht.

Das Endergebnis, d. h. die kritische Gesamtlast, hat die Bedeutung einer oberen Grenzbelastung für die Gesamtheit der Säulen. Deren Aufteilung auf die Einzelsäulen kann z. B. im Verhältnis der Trägheitsmomente vorgenommen werden.

Die Gesamtlast einer Säulenreihe, bei welcher die Säulen durch eine seitlich nicht versteifte Decke miteinander in Verbundwirkung stehen, kann kleiner als die Hälfte der Summe der kritischen Einzellasten ausfallen.

### Summary.

An isolated column is subject to buckling according to the equations established by Prof. TIMOSHENKO and Mr. NATER: it withstands a maximum critical load which depends on the conditions of fixing and the possibility of moving at the extremities. In contrast to that, the critical total load on a line of columns, whose cross-sections are arbitrarily chosen and unequal,

falls far below the sum of the critical loads which the columns could carry if they were isolated.

The analytical investigation to evaluate the critical total load on columns acting together, leads to formulae which are complicated and not very easy to manage. On the other hand, application of the method of the elasticity ellipse of Prof. W. RITTER (E. T. H.) summarises successively the results obtained from the elements introduced and leads elegantly to the solution.

This result, a total of loads, gives a limit for the whole set of columns. The load could, for example, be distributed among the columns in proportion to their moments of inertia.

The total load which can be supported by a row of columns connected together by a ceiling which is not laterally stiffened, may fall to less than half the sum of the critical loads which the columns could carry independently.



Leere Seite  
Blank page  
Page vide