Le flambement des arcs

LE FLAMBEMENT DES ARCS.

DAS KNICKEN DER BOGEN.

THE BUCKLING OF ARCHES.

Prof. Dr. Ing., Dr. Mat. C. TAGLIACOZZO, Libero Docente alla R. Università di Roma.

1. Dans une note parue récemment [1]) nous avons envisagé, d'une façon générale, le problème de l'équilibre critique des systèmes en „coaction élastique", dans le but d'établir — par analogie avec le même problème dans le cas ordinaire (celui des systèmes soumis à des forces extérieures données) — le procédé le plus propre à sa résolution.

Nous appliquerons maintenant les considérations générales de cette note à la recherche de la „déformation préalable critique" de l'arc circulaire articulé aux naissances en „coaction élastique".

La résolution de ce problème nous mènera aussi à la détermination immédiate de la poussée horizontale critique. Et nous jugeons utile de remarquer que, dans le cas envisagé, le problème de la charge critique d'un système élastique a été ramené au problème (dont la résolution est plus facile) de l'équilibre critique du même système soumis à une „coaction élastique" convenable.

Il importe toutefois de faire remarquer que l'intérêt porté à la théorie des „coactions élastiques" s'est beaucoup développé au cours de ces derniers temps, parce que cette théorie ne permet pas seulement d'aborder le problème relatif aux tensions dues à des causes autres que les forces extérieurement données (par ex., chaleur, retrait, etc.) mais aussi, ainsi que cela vient d'être montré par M. COLONNETTI [2]) et par M. DANUSSO [3]), elle peut servir de base au problème (de toute première importance pour la technique moderne) des systèmes élastiques présentant des éléments déformés au delà des limites d'élasticité.

2. Nous rappellerons [4]) en peu de mots qu'un corps se met en „coaction élastique" [5]), lorsqu'une cause tend à lui imprimer des défor-

---

[1]) Voir TAGLIACOZZO, Sulla stabilità dell'equilibrio elastico dei solidi in coazione, „Ricerche d'ingegneria", Roma, 1936, n. 5; ou Sulla stabilità dell'equilibrio elastico. Riassunto di un corso di lezioni dettate nel R. Istituto Superiore d'Ingegneria di Roma, l'anno accademico 1934—35, XIII; Edizione litografata, Roma, Libreria Signorelli, p. 160.

[2]) Voir COLONNETTI, Su l'equilibrio elastico dei sistemi in cui si verificano anche deformazioni non elastiche, Note I, II, III, IV, „Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei", Roma, 1937, fasc. 8, 9—10, 11, 12.

[3]) Voir DANUSSO, Le autotensioni — Spunti teorici ed applicazioni pratiche, „Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano", vol. VIII, 1934—XII.

[4]) Pour la théorie générale des „coactions élastiques", nous renvoyons à l'ouvrage de M. COLONNETTI, La statica delle costruzioni, U. T. E. T., Torino, 1928, vol. 1°, p. 317.

[5]) Ital. „coazione elastica"; all. „elastischer Zwang".

mations qui ne sont pas compatibles avec les liaisons (liaisons extérieures et intérieures, y compris la liaison de la continuité); celles-ci réagissent en provoquant d'autres déformations, qui, en s'additionnant aux déformations précédentes, engendrent des déformations totales compatibles avec les liaisons.

Envisageons, d'une manière toute générale, un système élastique remplissant un espace V, limité par la surface S, et soumis à des liaisons données. Nous le rapportons à trois axes de coordonnées rectangulaires $(0\,x\,y\,z)$.

Nous allons supposer que chaque élément du corps (en l'absence de forces extérieures données) subit des déformations — inélastiques (très petites, de l'ordre des déformations élastiques), qui ne sont pas compatibles avec les liaisons — dont nous désignerons les composantes („composantes de la déformation préalable“[6]) par

$$e_x,\; e_y,\; e_z,\; g_{xy},\; g_{yz},\; g_{zx}. \tag{1}$$

Puisque la continuité du corps doit demeurer inaltérée, ses éléments réagissent mutuellement, en engendrant les tensions

$$\sigma_x,\; \sigma_y,\; \sigma_z,\; \tau_{xy},\; \tau_{yz},\; \tau_{zx}. \tag{2}$$

A ces tensions correspondent des déformations élastiques

$$\varepsilon_x,\; \varepsilon_y,\; \varepsilon_z,\; \gamma_{xy},\; \gamma_{yz},\; \gamma_{zx}, \tag{3}$$

telles que les déformations totales

$$e_x + \varepsilon_x,\; e_y + \varepsilon_y,\; e_z + \varepsilon_z,\; g_{xy} + \gamma_{xy},\; g_{yz} + \gamma_{yz},\; g_{zx} + \gamma_{zx},$$

soient compatibles avec les liaisons.

Par suite de la „déformation préalable“ (1) le corps accumule une énergie potentielle („énergie liée“[7] V) qui peut se dégager en anéantissant la connexion du corps)

$$\Phi = \iiint_V \varphi \cdot dV = \tfrac{1}{2}\iiint_V (\varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \varepsilon_z \sigma_z + \gamma_{xy}\tau_{xy} + \gamma_{yz}\tau_{yz} + \gamma_{zx}\tau_{zx})\, dV, \tag{4}$$

où φ, énergie rapportée à l'unité de volume, est une forme quadratique essentiellement positive des composantes (2) (ou des composantes (3)).

Il est utile de rappeler le théorème[8])

$$\begin{aligned}\iiint_V (\varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \varepsilon_z \sigma_z + \gamma_{xy}\tau_{xy} + \gamma_{yz}\tau_{yz} + \gamma_{zx}\tau_{zx})\, dV = \\ = -\iiint_V (e_x \sigma_x + e_y \sigma_y + e_z \sigma_z + g_{xy}\tau_{xy} + g_{yz}\tau_{yz} + g_{zx}\tau_{zx})\, dV,\end{aligned} \tag{5}$$

qui permet d'exprimer „l'énergie liée“ en fonction des composantes de la „déformation préalable“ (qui est la cause de l'état de tension du corps et la donnée du problème); comme le théorème de CLAPEYRON qui, pour le problème statique ordinaire, permet d'exprimer le travail moléculaire en fonction des forces extérieures données.

3. Rappelons que dans le cas courant d'un corps soumis à des forces extérieures données, on exprime la condition de l'équilibre critique en annulant la différentielle seconde de l'énergie totale du système pour toute

---

[6]) Ital. „componenti della deformazione impressa“.

[7]) Ital. „energia vincolata“; all. „Zwangsenergie“.

[8]) Voir SESINI, Sulle coazioni elastiche“, Nota prima, „Atti della Pontificia Accademia delle Scienze Nuovi Lincei“, tomo 79 (1925—1926).

variation possible de sa forme d'équilibre:

$$\delta^2 L_i = \delta^2 L_e,$$

où L_i représente le travail moléculaire du corps et L_e le travail des charges extérieures.

Dans le cas d'un système en „coaction élastique" (en l'absence de forces extérieures données) la variation de l'énergie totale, pour toute variation de la forme d'équilibre, se ramène à la variation de „l'énergie liée": alors la condition de l'équilibre critique est

$$\delta^2 \Phi = 0,$$

ou bien, d'après l'équation (5),

$$\delta^2 \iiint_V (e_x \sigma_x + e_y \sigma_y + e_z \sigma_z + g_{xy} \tau_{xy} + g_{yz} \tau_{yz} + g_{zx} \tau_{zx})\, dV = 0. \tag{6}$$

L'expression (6) est l'équation fondamentale du problème de l'équilibre critique des systèmes en „coaction élastique"; et elle permet la recherche de la „déformation préalable critique"[9]).

4. Envisageons maintenant une barre hyperstatique, droite ou courbe.

Si, comme en général dans la pratique, le rayon de courbure de la barre est grand par rapport à sa section droite, on peut notamment remplacer, dans l'expression de „l'énergie liée" Φ, les tensions et les déformations par leurs valeurs en fonction des caractéristiques de la sollicitation; et écrire, au lieu de l'expression (4),

$$\Phi = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^s \frac{N^2\, ds}{EA} + \int_0^s \frac{M^2\, ds}{EJ} + \int_0^s q \frac{T^2\, ds}{GA} \right\}.^{10)} \tag{7}$$

Supposons que la barre soit en état de tension par l'effet d'un système de „déformations préalables" (par ex., celui qui est engendré par une élévation uniforme de la température), caractérisé par les composantes

$$e_x = e_y = e_z = e = \eta t^0; \quad g_{xy} = g_{yz} = g_{zx} = 0, \tag{8}$$

où η représente le coefficient de dilatation linéaire.

Alors, on trouve

$$\iiint_V (e_x \sigma_x + e_y \sigma_y + e_z \sigma_z + g_{xy} \tau_{xy} + g_{yz} \tau_{yz} + g_{zx} \tau_{zx})\, dV = \iiint_V e(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\, dV.$$

Rappelons à présent que pour les corps isotropes la somme

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

est, à chaque point, indépendante de la direction des axes de coordonnés,

---

[9]) Voir notre mémoire cité plus haut: Sulla stabilità dell'equilibrio elastico dei solidi in coazione...

[10]) Dans la formule (7) nous désignons par
A la section normale de la barre;
J le moment d'inertie de la section par rapport à son axe neutre;
s la longueur de l'axe de la barre;
E le module d'élasticité longitudinale, G le module d'élasticité transversale;
q le coefficient de réduction pour l'effort tranchant;
N l'effort normal, M le moment fléchissant, T l'effort tranchant.

Comme en général dans la pratique, on a considéré la barre composée d'éléments prismatiques, sollicités à la traction (ou à la compression), à la flexion et au cisaillement.

Dans cet article nous n'envisagerons que la possibilité du flambement dans le plan de l'axe de l'arc.

et elle peut être calculée en orientant ceux-ci, à chaque point, selon trois directions orthogonales quelconques.

Choisissons donc l'un des axes (par ex., l'axe des z) selon la direction n, normale au plan de la section droite de l'arc: on aura, pour ce repère particulier,

$$\sigma_x = \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = \sigma_n,$$

et

$$\iiint_V e(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\, dV = \int_0^s \iint_A e \cdot \sigma_n \cdot dA \cdot ds,$$

Puisque la quantité e est constante pour chaque section droite de l'arc, nous écrirons

$$\iint_A \sigma_n \cdot dA = N,$$

et, alors, nous obtiendrons

$$\int_0^s \iint_A e \cdot \sigma_n \cdot dA \cdot ds = \int_0^s e N ds,$$

et, d'après (5),

$$\Phi = \frac{1}{2}\left\{\int_0^s \frac{N^2\, ds}{EA} + \int_0^s \frac{M^2\, ds}{EJ} + \int_0^s q\,\frac{T^2\, ds}{GA}\right\} = -\frac{1}{2}\int_0^s e N ds.$$

5. Considérons maintenant un arc articulé aux naissances; et désignons par C sa corde et par J_x le moment d'inertie de son poids élastique par rapport à l'axe passant par les deux articulations.

Lorsqu'une cause quelconque (par ex. une élévation uniforme de la température) tend à engendrer la „déformation préalable" (8), chaque articulation réagit par une réaction X (dont la valeur absolue est notamment $\frac{eC}{J_x}$), capable d'engendrer le déplacement relatif XJ_x, égal et contraire à celui (eC) qui serait subi par les deux naissances de l'arc, si elles n'en étaient pas empêchées par les liaisons.

Nous avons, par conséquent,

$$\Phi = -\frac{1}{2}\int_0^s e N ds = -\frac{1}{2}\int_0^s e X \cos\varrho \cdot ds = \frac{1}{2}\int_0^s \frac{e^2 C \cos\varrho \cdot ds}{J_x},$$

où ϱ représente l'angle que la tangente à l'arc en un point quelconque forme avec l'axe passant par les naissances.

6. En particulier, envisageons un arc circulaire de rayon R et d'angle au centre θ; et désignons par α l'angle que la normale relative à un point quelconque de l'arc forme avec la normale relative à la naissance de gauche.

Alors,

$$\Phi = \frac{1}{2}\int_0^s \frac{e^2 C \cos\varrho \cdot ds}{J_x} = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\theta}{2}}^{+\frac{\theta}{2}} \frac{e^2 C \cos\varrho \cdot R\, d\varrho}{J_x} = \frac{e^2 C R}{2 J_x}\int_0^\theta \cos\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right) d\alpha =$$

$$= \frac{e^2 C R}{2 J_x}\left\{\cos\frac{\theta}{2}\int_0^\theta \cos\alpha \cdot d\alpha + \sin\frac{\theta}{2}\int_0^\theta \sin\alpha \cdot d\alpha\right\}.$$

7. Envisageons maintenant une petite variation de la forme d'équilibre de l'arc qui soit compatible avec les liaisons; et calculons l'énergie potentielle Φ_1, relative au système dans la nouvelle position; en tenant compte que le changement de forme apportera une contribution Φ' et que le changement de dimensions (allongement) dégagera une partie Φ'' de „l'énergie liée“ [11]).

Précisons: si par suite du changement de forme, la variation de la courbure de l'arc est $\delta\left(\frac{1}{R}\right)$, nous obtiendrons [12])

$$\Phi' = \frac{1}{2}\int_0^s EJ\left[\delta\left(\frac{1}{R}\right)\right]^2 ds = \frac{1}{2}EJR\int_0^\theta\left[\delta\left(\frac{1}{R}\right)\right]^2 d\alpha,$$

et si, par suite du changement de dimensions, chaque élément de la barre subit l'allongement supplémentaire e', nous trouverons

$$\Phi'' = \frac{CR}{2J_x}\int_0^\theta (e-e')^2\cos\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)d\alpha.$$

Alors, la variation totale de l'énergie potentielle sera

$$\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi = \Phi' + \Phi'' - \Phi = \frac{1}{2}EJR\int_0^\theta\left[\delta\left(\frac{1}{R}\right)\right]^2 d\alpha +$$
$$+\frac{CR}{2J_x}\int_0^\theta (e-e')^2\cos\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)d\alpha - \frac{CRe^2}{2J_x}\int_0^\theta\cos\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)d\alpha.$$

8. Si nous désignons par u et v les déplacements, normal et tangentiel, d'un point quelconque de l'arc pendant le flambement, la courbure $\frac{1}{R}$ de la barre subira la variation [13])

$$\delta\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{R^2}\left(\frac{du}{d\alpha}+\frac{d^2v}{d\alpha^2}\right),$$

et chaque élément de la barre se dilatera de [14])

$$e' = \frac{1}{2R^2}\left\{\left(u+\frac{dv}{d\alpha}\right)^2+\left(\frac{du}{d\alpha}-v\right)^2-2R\left(-\frac{du}{d\alpha}+v\right)\right\}.$$

Pour que nous puissions établir la condition de l'équilibre critique (6), il faudra envisager des variations très petites de la forme d'équilibre; c'est-à-dire des variations représentées par des quantité de 2e ordre de grandeur par rapport aux autres quantités considérées.

Pour que la dilatation soit une quantité de 2e ordre de grandeur, il faut que la condition

$$v = \frac{du}{d\alpha} \tag{9}$$

soit vérifiée [15]).

---

11) Voir notre mémoire cité plus haut.

12) Nous négligeons l'influence de l'effort tranchant qui se développe lors de la flexion de la barre. Cette influence est insignifiante.

13) Voir Foeppl, Drang und Zwang, Oldenbourg, München und Berlin, 1928, Zweite Auflage, Zweiter Band, p. 24.

14) Voir Timoshenko, Sur la stabilité des systèmes élastiques, „Annales des ponts et chaussées“, Paris 1913 — III, p. 555.

15) Voir Timoshenko, ouvrage cité plus haut.

Alors

$$\delta\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{R^2}\left(\frac{du}{d\alpha} + \frac{d^2 v}{d\alpha^2}\right) = \frac{1}{R^2}\left(v + \frac{d^2 v}{d\alpha^2}\right) \tag{10}$$

et

$$e' = \frac{1}{2R^2}\left(u + \frac{dv}{d\alpha}\right)^2 = \frac{1}{2R^2}\left(u + \frac{d^2 u}{d\alpha^2}\right)^2. \tag{11}$$

La variation de la forme sera compatible avec les liaisons (articulations aux naissances), si on a

$$\begin{array}{l} \text{pour } \alpha = 0, \quad u = v = 0, \\ \text{pour } \alpha = \theta, \quad u = v = 0. \end{array}$$

Ces conditions sont vérifiées, si nous posons [16])

$$u = \sum_1^\infty {}_n A_n \left(1 - \cos\frac{2n\pi\alpha}{\theta}\right),$$

et, alors, d'après (9),

$$v = \frac{du}{d\alpha} = \sum_1^\infty {}_n A_n \frac{2n\pi}{\theta} \sin\frac{2n\pi\alpha}{\theta}.$$

En introduisant ces expressions dans les formules (10) et (11), nous obtiendrons

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{1}{R}\right) &= \frac{1}{R^2}\left[\sum_1^\infty {}_n A_n \frac{2n\pi}{\theta}\sin\frac{2n\pi\alpha}{\theta} - A_n\left(\frac{2n\pi}{\theta}\right)^3 \sin\frac{2n\pi\alpha}{\theta}\right] = \\ &= \frac{1}{R^2}\left\{\sum_1^\infty {}_n A_n \sin\frac{2n\pi\alpha}{\theta}\left[\frac{2n\pi}{\theta} - \left(\frac{2n\pi}{\theta}\right)^3\right]\right\}, \end{aligned} \tag{10'}$$

et

$$\begin{aligned} e' &= \frac{1}{2R^2}\left[\sum_1^\infty {}_n A_n\left(1 - \cos\frac{2n\pi\alpha}{\theta}\right) + A_n\left(\frac{2n\pi}{\theta}\right)^2 \cos\frac{2n\pi\alpha}{\theta}\right]^2 = \\ &= \frac{1}{2R^2}\left\{\sum_1^\infty {}_n A_n\left[1 + \cos\frac{2n\pi\alpha}{\theta}\left(\left[\frac{2n\pi}{\theta}\right]^2 - 1\right)\right]\right\}^2. \end{aligned} \tag{11'}$$

9. D'après (10'), on aura

$$\begin{aligned} \Phi' = \tfrac{1}{2} EJR \int_0^\theta \left[\delta\left(\frac{1}{R}\right)\right]^2 d\alpha &= \frac{EJR}{2}\int_0^\theta\left(\frac{1}{R^2}\sum_1^\infty {}_n A_n\left[\frac{2n\pi}{\theta} - \left(\frac{2n\pi}{\theta}\right)^3\right]\sin\frac{2n\pi\alpha}{\theta}\right)^2 d\alpha = \\ &= \frac{EJ}{2R^3}\,\frac{\theta}{2}\sum_1^\infty {}_n A_n^2\left[\frac{2n\pi}{\theta} - \left(\frac{2n\pi}{\theta}\right)^3\right]^2, \end{aligned}$$

parce que

$$\int_0^\theta \sin\frac{2n\pi\alpha}{\theta}\sin\frac{2m\pi\alpha}{\theta}\,d\alpha = \begin{cases} \dfrac{\theta}{2} \; si \; m = n. \\ 0 \; si \; m \neq n. \end{cases}$$

[16]) Cette série est la même que celle qu'a employée M. Timoshenko (voir l'ouvrage cité plus haut) pour le problème de l'équilibre critique de l'arc circulaire, articulé aux naissances et soumis à une charge constante et normale à l'axe.

10. On peut négliger e'^2 dans l'expression

$$(e-e')^2 = e^2 + e'^2 - 2ee';$$

on aura par conséquent

$$\Phi'' - \Phi = -\frac{CRe}{J_x}\int_0^\theta e'\cos\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right)d\alpha = -\frac{CRe}{J_x}\left\{\cos\frac{\theta}{2}\int_0^\theta e'\cos\alpha\, d\alpha + \sin\frac{\theta}{2}\int_0^\theta e'\sin\alpha\, d\alpha\right\} =$$

$$= -\frac{CRe}{2J_xR^2}\left\{\cos\frac{\theta}{2}\int_0^\theta\left[\sum_1^\infty{}_n A_n\left(1 + H_n\cos\frac{2n\pi\alpha}{\theta}\right)\right]^2\cos\alpha\, d\alpha +\right.$$

$$\left.+ \sin\frac{\theta}{2}\int_0^\theta\left[\sum_1^\infty{}_n A_n\left(1 + H_n\cos\frac{2n\pi\alpha}{\theta}\right)\right]^2\sin\alpha\, d\alpha\right\}, \tag{12}$$

où nous avons posé, pour abréger,

$$H_n = \left(\frac{2n\pi}{\theta}\right)^2 - 1. \tag{13}$$

On a notamment

$$\int_0^\theta\left(\sum_1^\infty{}_n A_n\right)^2\cos\alpha\, d\alpha = \left(\sum_1^\infty{}_n A_n\right)^2\sin\theta,$$

$$\int_0^\theta\left(\sum_1^\infty A_n\right)^2\sin\alpha\, d\alpha = \left(\sum_1^\infty{}_n A_n\right)^2(1-\cos\theta),$$

$$\int_0^\theta 2\sum_1^\infty{}_{nm} A_n A_m H_n\cos\frac{2n\pi\alpha}{\theta}\cos\alpha\, d\alpha = 2\sum_1^\infty{}_{nm} A_n A_m H_n\frac{\sin\theta}{1-\left(\frac{2n\pi}{\theta}\right)^2},$$

$$\int_0^\theta 2\sum_1^\infty{}_{nm} A_n A_m H_n\cos\frac{2n\pi\alpha}{\theta}\sin\alpha\, d\alpha = 2\sum_1^\infty{}_{nm} A_n A_m H_n\frac{1-\cos\theta}{1-\left(\frac{2n\pi}{\theta}\right)^2},$$

tandis que des calculs, longs mais non difficiles, nous donnent

$$\int_0^\theta\left(\sum_1^\infty{}_n A_n H_n\cos\frac{2n\pi\alpha}{\theta}\right)^2\cos\alpha\, d\alpha = \sum_1^\infty{}_{nm} A_n A_m H_n H_m\frac{\left\{1-\left(\frac{2n\pi}{\theta}\right)^2-\left(\frac{2m\pi}{\theta}\right)^2\right\}\sin\theta}{1+\left\{\left(\frac{2n\pi}{\theta}\right)^2-\left(\frac{2m\pi}{\theta}\right)^2\right\}^2-2\left\{\left(\frac{2n\pi}{\theta}\right)^2+\left(\frac{2m\pi}{\theta}\right)^2\right\}},$$

$$\int_0^\theta\left(\sum_1^\infty{}_n A_n H_n\cos\frac{2n\pi\alpha}{\theta}\right)^2\sin\alpha\, d\alpha = \sum_1^\infty{}_{nm} A_n A_m H_n H_m\frac{\left\{1-\left(\frac{2n\pi}{\theta}\right)^2-\left(\frac{2m\pi}{\theta}\right)^2\right\}(1-\cos\theta)}{1+\left\{\left(\frac{2n\pi}{\theta}\right)^2-\left(\frac{2m\pi}{\theta}\right)^2\right\}^2-2\left\{\left(\frac{2n\pi}{\theta}\right)^2+\left(\frac{2m\pi}{\theta}\right)^2\right\}}.$$

En introduisant ces valeurs dans l'expression (12), on aura, d'après (13),

$$\Phi'' - \Phi = -\frac{Ce}{2RJ_x}\left\{\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta + \sin\frac{\theta}{2}(1-\cos\theta)\right\}\left[\left(\sum_1^\infty{}_n A_n\right)^2 + \sum_1^\infty{}_{nm} A_n A_m H_n H_m\,\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{1-\left(\frac{2n\pi}{\theta}\right)^2-\left(\frac{2m\pi}{\theta}\right)^2}{1+\left\{\left(\frac{2n\pi}{\theta}\right)^2-\left(\frac{2m\pi}{\theta}\right)^2\right\}^2-2\left\{\left(\frac{2n\pi}{\theta}\right)^2+\left(\frac{2m\pi}{\theta}\right)^2\right\}} + 2\sum_1^\infty{}_{nm} A_n A_m H_n\frac{1}{1-\left(\frac{2n\pi}{\theta}\right)^2}\right] =$$

$$= -\frac{Ce\sin\frac{\theta}{2}}{J_xR}\left[\left(\sum_1^\infty{}_n A_n\right)^2 + \sum_1^\infty{}_{nm} A_n A_m\left\{\frac{\left(\frac{2n\pi}{\theta}\right)^2\left(\frac{2m\pi}{\theta}\right)^2\left\{5-\left(\frac{2n\pi}{\theta}\right)^2-\left(\frac{2m\pi}{\theta}\right)^2\right\}}{1+\left\{\left(\frac{2n\pi}{\theta}\right)^2-\left(\frac{2m\pi}{\theta}\right)^2\right\}^2-2\left\{\left(\frac{2n\pi}{\theta}\right)^2+\left(\frac{2m\pi}{\theta}\right)^2\right\}}-1\right\}\right].$$

11. D'après les conditions que nous avons posées pour l'élastique, l'équilibre de l'arc sera critique, lorsque

$$\varDelta\,\Phi = \Phi_1 - \Phi = \Phi' + \Phi'' - \Phi = 0;$$

c'est-à-dire, lorsque

$$\frac{EJ}{2R^3}\,\frac{\theta}{2}\sum_{1}^{\infty}{}_{n} A_n^2\left[\frac{2n\pi}{\theta}-\left(\frac{2n\pi}{\theta}\right)^3\right]^2 =$$

$$= \frac{Ce\sin\frac{\theta}{2}}{J_x R}\left[\left(\sum_{1}^{\infty}{}_{n} A_n\right)^2 + \sum_{1}^{\infty}{}_{nm} A_n A_m\left\{\frac{\left(\frac{2n\pi}{\theta}\right)^2\left(\frac{2m\pi}{\theta}\right)^2\left\{5-\left(\frac{2n\pi}{\theta}\right)^2-\left(\frac{2m\pi}{\theta}\right)^2\right\}}{1+\left\{\left(\frac{2n\pi}{\theta}\right)^2-\left(\frac{2m\pi}{\theta}\right)^2\right\}^2-2\left\{\left(\frac{2n\pi}{\theta}\right)^2-\left(\frac{2m\pi}{\theta}\right)^2\right\}}-1\right\}\right];$$

par conséquent

$$e_{cr.} = \frac{r^2\theta^2}{2C^2}\,\frac{\sum_{1}^{\infty}{}_{n} A_n^2\left[\frac{2n\pi}{\theta}-\left(\frac{2n\pi}{\theta}\right)^3\right]^2}{\left(\sum_{1}^{\infty}{}_{n} A_n\right)^2 + \sum_{1}^{\infty}{}_{nm} A_n A_m\left\{\frac{\left(\frac{2n\pi}{\theta}\right)^2\left(\frac{2m\pi}{\theta}\right)^2\left\{5-\left(\frac{2n\pi}{\theta}\right)^2-\left(\frac{2m\pi}{\theta}\right)^2\right\}}{1+\left\{\left(\frac{2n\pi}{\theta}\right)^2-\left(\frac{2m\pi}{\theta}\right)^2\right\}^2-2\left\{\left(\frac{2n\pi}{\theta}\right)^2+\left(\frac{2m\pi}{\theta}\right)^2\right\}}-1\right\}}, \tag{14}$$

où r est le rayon de giration du poids élastique de l'arc par rapport à l'axe passant par les naissances:

$$r^2 = \frac{J_x}{\int_0^s \frac{ds}{EJ}}.$$

En annulant dans l'expression (14) tous les coefficients A_n, sauf A_1, on obtiendra la valeur minima de $e_{cr.}$:

$$e_{cr.} = \frac{r^2\theta^2}{2C^2}\,\frac{\left[\frac{2\pi}{\theta}-\left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^3\right]^2}{\frac{\left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^4\left\{5-2\left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^2\right\}}{1-4\left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^2}} = \frac{r^2\theta^2}{2C^2}\,\frac{4\left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^6-9\left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^4+6\left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^2-1}{\left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^2\left\{2\left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^2-5\right\}}.$$

En effectuant la division par la règle de Ruffini, on aura

$$e_{cr.} = \frac{r^2\theta^2}{2C^2}\left\{\frac{4\left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^4+\left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^2+8{,}5}{2\left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^2} + \frac{20{,}25}{2\left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^2\left\{\left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^2-2{,}5\right\}}\right\} =$$

$$= \frac{4\pi^2 r^2}{C^2} + \frac{r^2\theta^2}{C^2}\left\{0{,}25 + 0{,}53125\,\frac{\theta^2}{\pi^2} + \frac{0{,}50625\,\theta^4}{\pi^2(1{,}6\,\pi^2-\theta^2)}\right\}. \tag{15}$$

Dans le cas où l'angle θ est suffisamment petit (arc surbaissé), on a, à une petite erreur près,

$$e_{cr.} = \frac{4\pi^2 r^2}{C^2}. \tag{15'}$$

Les formules (15) et (15′) résolvent le problème que nous nous étions posé.

12. La formule (15) nous permet la détermination immédiate de la poussée horizontale critique[17]) $X_{cr.}$ de l'arc circulaire articulé aux naissances:

$$X_{cr.} = \frac{e_{cr.} C}{J_x} = \frac{4\pi^2 r^2 C}{C^2 J_x} + \frac{r^2 \theta^2 C}{C^2 J_x}\left\{0{,}25 + 0{,}53125\frac{\theta^2}{\pi^2} + \frac{0{,}50625\,\theta^4}{\pi^2(1{,}6\,\pi^2 - \theta^2)}\right\} =$$

$$= \frac{4\pi^2 EJ}{R\theta C} + \frac{EJ\theta}{RC}\left\{0{,}25 + 0{,}53125\frac{\theta^2}{\pi^2} + \frac{0{,}50625\,\theta^4}{\pi^2(1{,}6\,\pi^2 - \theta^2)}\right\}.$$

Dans le cas où l'arc est très surbaissé, on a, à une petite erreur près,

$$X_{cr.} = \frac{4\pi^2 EJ}{sC}.$$

13. Il est utile de remarquer que, dans le cas étudié ici, la considération d'un problème relatif à un corps soumis à une „coaction élastique" convenable fournit un moyen facilitant la résolution du problème analogue, relatif au même système soumis à des forces extérieures données.

En effet, pour ce corps nous aurions dû envisager le travail moléculaire

$$L_i = \frac{1}{2}\left\{\int_0^s \frac{M^2\,ds}{EJ} + \int_0^s \frac{N^2\,ds}{EA} + \int_0^s q\frac{T^2\,ds}{GA}\right\},$$

dont l'expression n'est pas aussi simple que celle de „l'énergie liée"

$$\Phi = -\frac{1}{2}\int_0^s e N\,ds;$$

et, par conséquent, le calcul de la variation de l'énergie totale du système pendant le flambement aurait été plus compliqué.

Résumé.

Le présent mémoire a pour but d'appliquer les considérations générales développées par l'auteur dans une note parue récemment, à la recherche de la „déformation préalable critique" de l'arc circulaire articulé aux naissances „en coaction élastique".

La résolution de ce problème mène aussi à la détermination immédiate de la poussée horizontale critique. Il est utile de remarquer que, dans le cas étudié dans cette note, la considération d'un problème relatif à un corps soumis à une „coaction élastique" convenable fournit un moyen pour faciliter la résolution du problème analogue relatif au même système soumis à des forces extérieures données.

---

[17]) Ce problème a été l'objet de recherches nombreuses, qui sont restées limitées aux arcs très surbaissés, ou à ceux dont la fibre moyenne coïncide avec la ligne des pressions.

Voir: Timoshenko, ouvrage cité plus haut; Baticle, Arcs encastrés à fibre moyenne parabolique très surbaissée, „Le Génie Civil", Paris, 1929, premier semestre, n. 5; Mesnager, Arcs circulaires surbaissés ou non, ibidem; Pigeaud, Note sur le flambement des arcs, ibidem, 1929, premier semestre, n. 8; Mesnager, Baticle, Chambaud, Le flambement des arcs, ibidem, 1929, premier semestre, n. 12; Tournayre, Note sur le flambement des arcs surbaissés, ibidem, 1929, 2e semestre, n. 8, 9; Belluzzi, Sul comportamento degli archi elastici molto ribassati, „Annali dei Lavori Pubblici", Roma, 1929, n. 6.

Zusammenfassung.

Vorliegende Abhandlung bezweckt die Anwendung der allgemeinen Betrachtungen, die der Verfasser in einem kürzlich veröffentlichten Aufsatz bezüglich der kritischen Vorverformung des Zweigelenk-Kreisbogens in elastischem Zwang angestellt hat.

Die Lösung dieses Problems führt auch zur unmittelbaren Bestimmung des kritischen Horizontalschubes. Die Untersuchung einer Aufgabe, die sich auf einen Körper bezieht, der einem verträglichen elastischen Zwang unterworfen ist, liefert ein Mittel zur Vereinfachung der Lösung der übereinstimmenden Aufgabe, das gleiche System zu berechnen, das durch gegebene äußere Kräfte beansprucht ist.

Summary.

The object of this paper is to apply the general considerations developed by the author in a recent note to investigate the "preliminary critical deformation" of a circular arch hinged "with elastic restraint" at the springings.

The solution to this problem also provides an immediate determination of the critical horizontal thrust. It is worth noting also that, in the case here studied, the consideration of a problem which relates to a body under a suitable "elastic restraint" offers a means of solving the similar problems which arise when the same system is acted upon by external forces.