

Über die angenäherte Berechnung des zeitlichen Verlaufes der Porenwasserströmung in belasteten Tonkörpern und der damit verbundenen Formänderungen

Autor(en): **Fröhlich, O.K.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **5 (1937-1938)**

PDF erstellt am: **17.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-6155>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

ÜBER DIE ANGENÄHERTE BERECHNUNG DES ZEITLICHEN VERLAUFES DER PORENWASSERSTROMUNG IN BELASTETEN TONKÖRPERN UND DER DAMIT VERBUNDENEN FORMÄNDERUNGEN.

LE CALCUL APPROXIMATIF DE LA VARIATION DANS LE TEMPS DES COURANTS INTERSTICIELS DANS LES ÉPROUVETTES D'ARGILE SOUMISES À UNE CHARGE ET DES DÉFORMATIONS QUI EN RÉSULTENT.

THE APPROXIMATE CALCULATION OF TIME VARIATIONS IN THE FLOW OF WATER THROUGH THE PORES OF SPECIMENS OF CLAY UNDER PRESSURE, AND OF THE RESULTING VOLUME CHANGES.

Dr. Ing. O. K. FRÖHLICH, Beratender Ingenieur, Mannheim.

Einleitung.

In Erdbaulaboratorien wurde die durch Belastung hervorgerufene Porenwasserströmung planparalleler Tonschichten und zentral durchbohrter Tonzylinder und die damit verbundene Verformung dieser Tonkörper untersucht und mit den Ergebnissen der Berechnung auf Grund der partiellen Differentialgleichung:

$$c \nabla^2 w = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (1)$$

verglichen^{1) 2)}. Die Übereinstimmung der Zeit-Wasseraustrittskurven mit den theoretisch berechneten Werten war außerordentlich zufriedenstellend. In Gl. (1) bedeutet $c \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{sec}} \right]$ den sog. Verfestigungsbeiwert, welcher definiert ist durch:

$$c = \frac{k}{a \gamma} (1 + \varepsilon) \quad (2)$$

Es ist:

- ε die Porenziffer des homogen gedachten Tones bei Versuchsbeginn;
- k die mittlere Durchlässigkeitsziffer während der Verformung [cm/sec];
- a die Verdichtungs ziffer [cm²/g];
- γ das spez. Gewicht des Porenwassers [g/cm³];
- w der hydrostatische Überdruck in einem Punkte (x, y, z) des Tonkörpers zur Zeit t ;

∇^2 der LAPLACE'sche Operator $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$.

¹⁾ TERZAAGHI: „Erdbaumechanik“, 1925, S. 111 bis 183.

²⁾ RENDULÍĆ: „Der hydrodynamische Spannungsausgleich in zentral entwässerten Tonzylindern“. Ww. u. Techn. 1935, H. 23—24, 25—26.

Da die strenge Lösung von (1) schon in den einfachsten Fällen einen beträchtlichen Aufwand an Rechenarbeit erfordert und in schwierigen Belastungsfällen überhaupt nicht gelingt, ist es von Vorteil, Näherungsverfahren zu entwickeln, die den Verlauf der Porenwasserströmung im Tone infolge Belastung auf einfache Weise wiedergeben und auch in verwickelten Fällen (etwa bei veränderlicher Mächtigkeit von Tonschichten) noch anwendbar bleiben.

Im folgenden soll ein solches Näherungsverfahren für die Fälle paralleler Porenwasserströmung in von parallelen Ebenen begrenzten Tonschichten und radialer Strömung in Tonzylindern erläutert und seine Einfachheit und Verlässlichkeit dargetan werden.

I. Verfahren für die Berechnung des zeitlichen Verlaufes der Setzung von Tonschichten.

Ist Z die lotrechte Koordinatenachse, so geht Gl. (1) im vorliegenden Falle über in:

$$c \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (3)$$

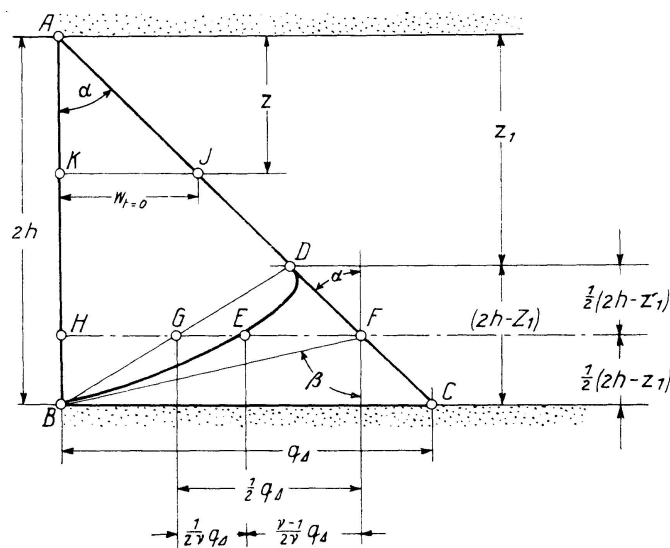


Fig. 1.

Die Näherungsberechnung soll nun an einem besonderen Fall gezeigt werden. Eine Tonschicht von der Mächtigkeit $2h$ werde unter Wasser geschüttet und der Einwirkung ihres Eigengewichtes überlassen. Die Bauzeit T (Zeit für das Schütten) möge im Verhältnis zur Setzungsdauer als klein angesehen werden dürfen ($T = 0$). Die Unterlage der Schüttung sei wasserdurchlässig und stehe in Verbindung mit dem Wasser über der Tonschicht (Oberwasser), so daß in der Tiefe $2h$ kein hydrostatischer Überdruck zustande kommen kann.

Im ersten Augenblick nach vollendeter Schüttung verläuft der Porenwasserüberdruck $w_{t=0}$ nach der Geraden AC in Fig. 1, in welcher $q_d = 2h \cdot \gamma_s$ und γ_s das scheinbare Raumgewicht des Tones (unter Wasser) bedeutet. Da voraussetzungsgemäß die Unterlage durchlässig ist und mit dem Oberwasser in Verbindung steht, sinkt der Überdruck BC in der Tiefe $z = 2h$ sofort auf Null. Nach Ablauf einer gewissen Zeit t , während welcher Porenwasser

sowohl lotrecht nach oben als auch lotrecht nach unten entwichen ist, wird der hydrostatische Überdruck im Porenwasser durch den Linienzug $ADEB$ (Isochrone) in Fig. 1 veranschaulicht sein. Die Kurve DEB sei als Parabel vom Grade ν angenommen, wobei ν noch nicht festgesetzt wird, sondern als „Verfügbare“ dienen möge. Während der Überdruck in der Tiefe z , dargestellt durch die Strecke JK , in der Zeit $t = 0$ bis $t = t$ unverändert blieb, ist der Überdruck in der Tiefe $z_1 + \frac{1}{2} (2h - z_1)$ von FH auf EH gesunken.

Mit dem Fortschreiten der Porenwasserströmung rückt der Punkt D auf der Schrägen AC (Nullisochrone) höher, bis er schließlich mit A zusammenfällt; dies geschehe zur Zeit $t = t_I$ und dieser erste Teil des Strömungsvorganges sei „Phase I“ genannt.

Bisher wurde der physikalische Vorgang, welcher durch die Wirkung des Toneigengewichtes hervorgerufen wurde, mittels Fig. 1 nur grob gekennzeichnet; nunmehr möge Gl. (3) Anwendung finden.

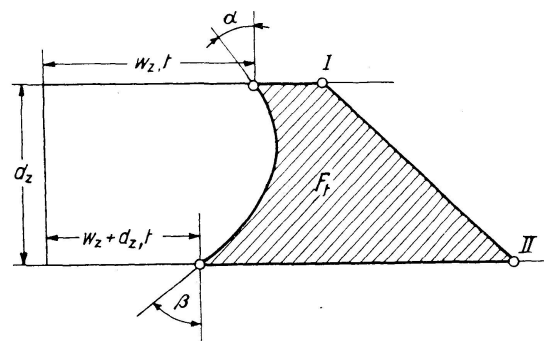


Fig. 2.

Verfasser hat an anderer Stelle³⁾ gezeigt, daß Gl. (3) für eine Tonlamelle von der Dicke dz nichts anderes aussagt als die folgende einfache Gleichung mit den in Fig. 2 angegebenen Bezeichnungen:

$$\frac{dF_t}{dt} = c(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \quad (4)$$

Die Näherung, auf welche wir die Berechnung basieren wollen, besteht darin, daß Gl. (4) nicht auf eine Lamelle mit der unendlich kleinen Dicke dz , wofür sie abgeleitet wurde, sondern auf die Schichte mit der endlichen Dicke $2h$ angewendet wird. Die Berechnung ergibt dann natürlich nicht den Isochronenverlauf wie das strenge Verfahren, sondern nur den zeitlichen Zusammenhang je zweier aufeinander folgenden Kurven einer willkürlich angenommenen Isochronenschar. Durch geeignete Wahl der „Verfügbaren“ ν ist es möglich, sich den strengen Ergebnissen bis zu einem praktisch zufriedenstellenden Grade anzupassen.

Die Ausrechnung nach Gl. (4) verläuft für die I. Phase des Strömungsvorganges wie folgt:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q_d}{2h}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2} \frac{q_d}{h} \cdot \frac{2h + z_1}{2h - z_1}$$

$$F_t = \frac{1}{2} \frac{\nu}{\nu + 1} q_d (2h - z_1), \quad dF_t = -\frac{1}{2} \frac{\nu}{\nu + 1} q_d \cdot dz_1$$

³⁾ TERZAGHI-FRÖHLICH: „Theorie der Setzung von Tonschichten“, Wien und Leipzig 1936, S. 38.

Setzt man diese Werte in (4) ein, so erhält man:

$$c dt = - \frac{1}{4} \frac{\nu}{\nu + 1} (2h - z_1) \cdot dz_1 \quad (5)$$

Die Integration mit Berücksichtigung der zeitlichen Randbedingung, daß für $t = 0$, $z_1 = 2h$ sein muß, führt auf:

$$ct = \frac{1}{8} \frac{\nu}{\nu + 1} (2h - z_1)^2 \quad (6)$$

Die I. Phase ist beendet, wenn Punkt D mit A zusammenfällt, d. h., wenn $z_1 = 0$ geworden ist. Hieraus ergibt sich mittels (6):

$$ct_1 = \frac{1}{2} \frac{\nu}{\nu + 1} h^2 \quad (7)$$

Führt man einen dimensionslosen Zeitfaktor

$$\tau = \frac{ct}{h^2} \quad (8)$$

ein, so nimmt (6) die Form:

$$\tau = \frac{1}{8} \frac{\nu}{\nu + 1} \left(2 - \frac{z_1}{h}\right)^2 \quad (6a)$$

an, und (7) wird:

$$\tau_1 = \frac{1}{2} \frac{\nu}{\nu + 1} \quad (7a)$$

Drückt man die dem Zeitpunkt t (bzw. Zeitfaktor τ) entsprechende Setzung der Tonschicht durch einen Verfestigungsgrad μ aus, mit dem man die endgültige Setzung vervielfältigen muß, um die Setzung zur Zeit t (τ) zu erhalten, so gilt⁴⁾:

$$\mu = \frac{F_t}{F_0} \quad (9)$$

worin F_0 nach Fig. 1 die sog. Lastfläche $\Delta ABC = q_A h$ bedeutet.

Für die I. Phase des Verfestigungsvorganges ist nach Gl. (9):

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{\nu}{\nu + 1} \left(2 - \frac{z_1}{h}\right) \quad (10)$$

Aus einem Vergleiche von (6a) mit (10) folgt:

$$\mu = \sqrt{\frac{2\nu}{\nu + 1} \tau} \quad (11)$$

Dies ist die dimensionslos gemachte Zeit-Setzungskurve der Tonschichte während der ersten Phase des Verfestigungsvorganges; sie gilt für die

Grenzen: $0 \leq \tau \leq \frac{1}{2} \frac{\nu}{\nu + 1}$ des Zeitfaktors τ .

Am Ende der Phase I ist die Isochrone eine Parabel vom Grade ν mit dem Pfeil $\frac{1}{2\nu} q_A$ und der lotrechten Sehne $2h$ geworden (Fig. 3).

⁴⁾ TERZAGHI-FRÖHLICH: „Tonschichten“, S. 33.

Während der II. Phase des Porenwasserströmungsvorganges sollen die Isochronen als Parabeln vom Grade ν betrachtet werden, deren Sehne $2h$ konstant ist und deren Pfeil w_t von $\frac{1}{2\nu} q_d$ bis Null abnimmt. w_t ist der hydrostatische Überdruck im Porenwasser in der Schichtmitte.

Die Ausrechnung nach Gl. (4) für Phase II des Vorganges verläuft wie folgt:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta = \nu \cdot \frac{w_t}{h}, \quad F_t = q_d h - \frac{2\nu}{\nu+1} w_t h, \quad dF_t = -\frac{2}{\nu+1} h \cdot dw_t$$

Setzt man diese Werte in (4) ein, so erhält man:

$$c dt = -\frac{1}{\nu+1} h^2 \cdot \frac{dw_t}{w_t} \quad (12)$$

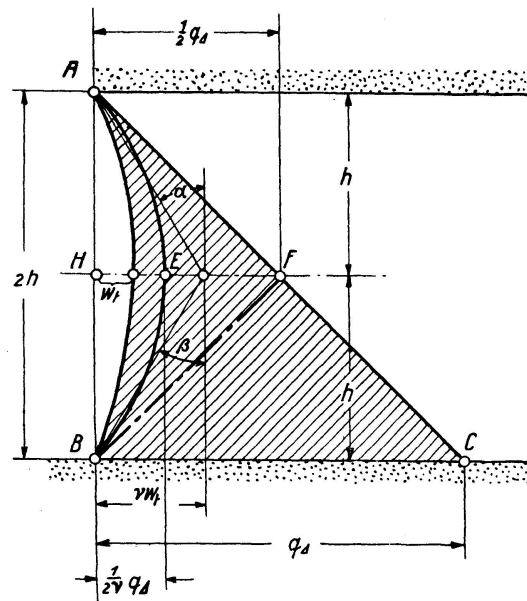


Fig. 3.

Die Integration mit Berücksichtigung der Anfangsbedingung, daß für $t = t_I$, $w_t = \frac{1}{2\nu} q_d$ sein muß, führt auf:

$$c t = \frac{h^2}{\nu+1} \ln \frac{q_d}{2\nu w_t} + c t_I \quad (13)$$

Geht man mittels (8) zum Zeitfaktor τ für Phase II über, so folgt unter Berücksichtigung von (7a):

$$\tau = \frac{1}{\nu+1} \left\{ \ln \frac{q_d}{2\nu w_t} + \frac{\nu}{2} \right\} \quad (14)$$

Mit Hilfe von (9) gelangt man zu dem Werte des Verfestigungsgrades:

$$\mu = 1 - \frac{2\nu}{\nu+1} \cdot \frac{w_t}{q_d} \quad (15)$$

Durch Elimination von $\frac{q_d}{w_t}$ aus (14) und (15) ergibt sich:

$$\mu = 1 - \frac{1}{\nu+1} e^{-(\nu+1)\tau + \frac{1}{2}\nu} \quad (16)$$

Diese (dimensionslos gemachte) Zeit-Setzungskurve der Tonschichte gilt für die Dauer der II. Phase mit den Grenzen:

$$\frac{1}{2} \frac{\nu}{\nu + 1} \leq \tau \leq \infty$$

Die Wahl der Disponiblen ν muß nun so erfolgen, daß Gl. (11) und (16) möglichst gute Annäherungen der strengen (μ, τ) -Gleichung geben. Diese lautet nach „Tonschichten“, S. 107, Gl. (8):

$$\mu = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2} e^{-\frac{\pi^2}{4} m^2 \tau} \quad (17)$$

Gl. (11) und (16) und ihre Gültigkeitsgrenzen lauten für $\nu = 1, 2$ und 3 wie folgt:

ν	μ Gl. (11)	Gültigkeits- grenzen	μ Gl. (16)	Gültigkeits- grenzen
1	$\sqrt{\tau}$	$0 \leq \tau \leq \frac{1}{4}$	$1 - \frac{1}{2} e^{-2\tau + \frac{1}{2}}$	$0,25 \leq \tau \leq \infty$
2	$\sqrt{\frac{3}{4}\tau}$	$0 \leq \tau \leq \frac{1}{3}$	$1 - \frac{1}{3} e^{-3\tau + 1}$	$\frac{1}{3} \leq \tau \leq \infty$
3	$\sqrt{\frac{3}{2}\tau}$	$0 \leq \tau \leq \frac{3}{8}$	$1 - \frac{1}{4} e^{-4\tau + \frac{3}{2}}$	$0,375 \leq \tau \leq \infty$

In der folgenden Übersicht sind für einige Argumente τ die zugehörigen Verfestigungsgrade μ für die strenge Gl. (17) und die Näherungsgleichungen (11) bzw. (16) für $\nu = 1, 2$ und 3 zusammengestellt.

τ	0,048	0,100	0,200	0,400	0,800	1,00
μ nach Gl. (17)	0,2464	0,3562	0,5041	0,6973	0,8874	0,9313
μ nach Gl. (11) und (16) für:						
$\nu = 1$	0,2191	0,3162	0,4472	0,6296	0,8336	0,8884
$\nu = 2$	0,2530	0,3652	0,5164	0,7271	0,9178	0,9549
$\nu = 3$	0,2683	0,3873	0,5477	0,7738	0,9543	0,9795

Aus dieser Übersicht geht hervor, daß man die beste Annäherung an die strenge Zeit-Setzungskurve (Wasseraustrittskurve) erhält, wenn man die gemeine Parabel als Isochrone wählt.

Wie man sich leicht überzeugen kann, gilt der Wert $\nu = 1$ für die geradlinige Isochrone: Linienzug BFA in Fig. 1; für $\tau = \frac{1}{4}$ rückt Punkt F in die Schichtmitte und es ist $F_I = \frac{1}{2} F_0$, also $\mu_I = \frac{1}{2}$.

Die strenge Zeit-Setzungskurve liegt zwischen den Kurven für $\nu = 1$ und $\nu = 2$ und zwar näher an $\nu = 2$.

Dasselbe Ergebnis erhält man auch für andere Verteilungen der Anfangsspannungen über die Mächtigkeit der Tonschicht.

II. Verfahren für die Berechnung des zeitlichen Verlaufes der Verformung von Tonzylindern mit radial nach innen gerichteter Porenwasserströmung.

Wird ein Tonzylinder (Außendurchmesser $2r_2$, Innendurchmesser $2r_1$, Höhe h) mit einer wasserdichten Haut umgeben und einem allseitigen

Druck q_0 ausgesetzt, so tritt eine nach innen gerichtete radiale Porenwasserströmung ein, wenn das Wasser durch den durchlässigen Kern, der mit einem Standrohr in Verbindung steht, entweichen kann.

Der Verlauf der hydrostatischen Überdrücke des Porenwassers ist in Fig. 4 für je einen Zeitpunkt der ersten und der zweiten Phase durch die Isochronen J_I bzw. J_{II} angedeutet. Gl. (1) geht für den vorliegenden Fall über in:

$$c \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (18)$$

Die strenge Lösung mittels dieser Beziehung ist in ²⁾ zu finden.

Eine Näherung erhält man, wenn man das nach DARCY während des Zeiteilchens dt in den Kern strömende Wasser: $\frac{k}{\gamma'} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot 2 r_1 \pi \cdot h \cdot dt$ der Volumenverminderung des Tonzylinders in derselben Zeit $\frac{a}{1 + \varepsilon} dF_t \cdot 2 q_s \pi \cdot h$, siehe „Tonschichten“ (3) S. 25, Gl. (6) gleichsetzt.

Mit $dF_t \cdot 2 q_s \pi = dV_t$ erhält man:

$$\frac{dV_t}{dt} = 2\pi r_1 \cdot c \operatorname{tg} \alpha \quad (19)$$

Diese Beziehung bedeutet für das zentrisch-symmetrische Problem des hydrodynamischen Spannungsausgleiches dasselbe wie Gl. (4) für die eindimensionale Porenwasserströmung.

Auch hier sollen die Isochronen als Parabeln vom Grade ν angenommen werden, wobei ν als „Verfügbare“ anzusehen ist.

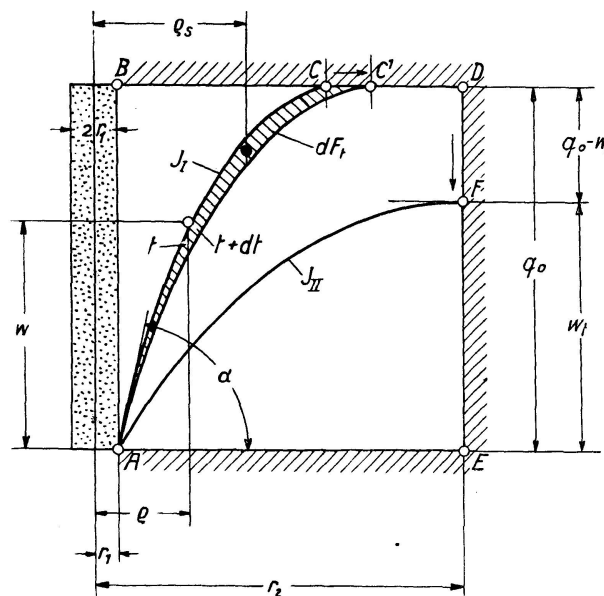


Fig. 4.

Phase I.

Die Fläche ABC in Fig. 4 ist: $F_t = \frac{1}{\nu + 1} (q_1 - r_1) q_0$; ihr Schwerpunkt besitzt von der Zylinderachse den Abstand $\frac{1}{\nu + 2} (q_1 - r_1) + r_1$. Der Raum-

inhalt des Umdrehungskörpers mit der Meridianfläche ABC ist:

$$V_t = \frac{2\pi}{(\nu+1)(\nu+2)} \varrho_1^2 q_0,$$

wobei r_1 gegenüber ϱ_1 vernachlässigt wurde. Wenn ϱ_1 um $d\varrho_1$ wächst, vergrößert sich das Volumen V_t um $dV_t = \frac{4q_0\varrho_1 d\varrho_1}{(\nu+1)(\nu+2)}$. Schließlich brauchen wir noch das Gefälle der Isochrone J_I im Punkte A; es ist nach einer bekannten Parabeleigenschaft: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\nu q_0}{\varrho_1}$, wenn, wie früher, r_1 gegen ϱ_1 vernachlässigt wird. Setzt man die Werte für dV_t und $\operatorname{tg} \alpha$ in (19) ein, so folgt:

$$t = \frac{2}{\nu(\nu+1)(\nu+2)cr_1} \int \varrho_1^2 d\varrho_1 + C \quad (20)$$

Da für $t = 0$ auch $\varrho_1 = 0$ ist, ergibt die Integration unter Vernachlässigung von r_1 gegen ϱ_1 :

$$t = \frac{2}{3} \frac{1}{\nu(\nu+1)(\nu+2)} \cdot \frac{\varrho_1^3}{cr_1} \quad (21)$$

Dieses Ergebnis gilt von $\varrho_1 = 0$ bis $\varrho_1 = r_2$, d. h. während der Phase I. Für $\varrho_1 = r_2$ folgt:

$$t_I = \frac{2}{3} \frac{1}{\nu(\nu+1)(\nu+2)} \cdot \frac{r_2^3}{cr_1} \quad (21a)$$

Der Verfestigungsgrad ist analog Gl. (9) gegeben durch:

$$\mu = \frac{V_t}{V_0} \quad (22)$$

worin $V_0 = \pi r_2^2 q_0$ (Vernachlässigung von r_1 gegen r_2). Durch Einsetzen von V_t in (22) ergibt sich:

$$\mu = \frac{2}{(\nu+1)(\nu+2)} \left(\frac{\varrho_1}{r_2} \right)^2 \quad (23)$$

Führt man noch einen dimensionslosen Zeitfaktor τ ein:

$$\tau = \frac{ct}{r_2^2} \quad (24)$$

so nimmt (21) die Form an:

$$\tau = \frac{2}{3} \frac{1}{\nu(\nu+1)(\nu+2)} \left[\frac{\varrho_1}{r_2} \right]^2 \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \quad (25)$$

Durch Elimination von ϱ_1 aus (23) und (25) erhält man die Gleichung der Zeit-Setzungskurve für die Dauer der I. Phase:

$$\tau = \frac{1}{3\sqrt{2}} \frac{\mu}{\nu} \sqrt{(\nu+1)(\nu+2)\mu} \cdot \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \quad (26)$$

Ihre Gültigkeitsgrenzen sind gegeben durch:

$$0 \leq \tau \leq \frac{2}{3\nu(\nu+1)(\nu+2)} \cdot \left(\frac{r_2}{r_1} \right) = \tau_I$$

bzw.

$$0 \leq \mu \leq \frac{2}{(\nu+1)(\nu+2)} = \mu_I$$

Phase II.

Auch hier gilt Gl. (19), weil die Tangente an die Isochrone J_{II} im Punkte A (Fig. 4) waagrecht ist. Das Volumen des Umdrehungskörpers mit der Meridianfläche $ABDFA$ ist:

$$V_t = (q_0 - w_t) \pi r_2^2 + \frac{2 \pi r_2^2}{(\nu + 1)(\nu + 2)} w_t$$

daher:
$$dV_t = - \frac{\nu(\nu + 3)}{(\nu + 1)(\nu + 2)} \pi r_2^2 \cdot dw_t;$$

das Gefälle der Isochrone J_{II} in A beträgt:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\nu w_t}{r_2}$$

Setzt man diese beiden Werte in Gl. (19) ein, so folgt:

$$t = - \frac{\nu + 3}{(\nu + 1)(\nu + 2)} \cdot \frac{r_2^3}{2c r_1} \int \frac{dw_t}{w_t} + C$$

Mit Gl. (24) und der zeitlichen Randbedingung, daß für $\tau = \tau_I$, $w_t = q_0$ sein muß, erhalten wir:

$$\tau = \frac{\nu + 3}{2(\nu + 1)(\nu + 2)} \cdot \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \cdot \ln \left(\frac{q_0}{w_t} \right) + \tau_I \quad (27)$$

Der Verfestigungsgrad μ ergibt sich aus (22) zu:

$$\mu = 1 - \frac{\nu(\nu + 3)}{(\nu + 1)(\nu + 2)} \cdot \frac{w_t}{q_0} \quad (28)$$

Durch Elimination von w_t/q_0 aus den beiden vorstehenden Gleichungen folgt die Gleichung der Zeit-Setzungskurve für die Dauer der Phase II:

$$\tau = \frac{\nu + 3}{2(\nu + 1)(\nu + 2)} \cdot \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \left\{ \ln \frac{\nu(\nu + 3)}{(\nu + 1)(\nu + 2)} - \ln(1 - \mu) + \frac{4}{3\nu(\nu + 3)} \right\} \quad (29)$$

mit den Gültigkeitsgrenzen:

$$\frac{2}{3\nu(\nu + 1)(\nu + 2)} \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \leq \tau \leq \infty$$

bzw.

$$\frac{2}{(\nu + 1)(\nu + 2)} \leq \mu \leq 1.$$

Im Folgenden soll als Beispiel für die Ausrechnung der Zeit-Wasser-austrittskurve ein Tonzylinder mit den Abmessungen $r_1 = 0,4$ cm, $r_2 = 2,5$ cm, $h = 8$ cm betrachtet werden, für welchen RENDULIĆ die (τ, μ) -Kurve nach der strengen Gl. (18) ermittelt hat.

Zu diesem Zwecke ist es praktisch, die Gl. (26) und (29) nach μ aufzulösen, wobei gleichzeitig die Sonderwerte: $\nu = 4$, $\nu = 5$, $\nu = 6$ und $r_2/r_1 = 6.25$ berücksichtigt werden sollen:

$$\begin{array}{ll} \nu = 4: & \mu = 0,626 \tau^{2/3} \quad \text{für } 0 \leq \tau \leq 0,03475 \\ & \mu = 1 - e^{-1,372 \tau - 0,0214} \quad \text{„ } 0,03475 \leq \tau \leq \infty \\ \nu = 5: & \mu = 0,650 \tau^{2/3} \quad \text{für } 0 \leq \tau \leq 0,01985 \\ & \mu = 1 - e^{-1,680 \tau - 0,0155} \quad \text{„ } 0,01985 \leq \tau \leq \infty \\ \nu = 6: & \mu = 0,667 \tau^{2/3} \quad \text{für } 0 \leq \tau \leq 0,0124 \\ & \mu = 1 - e^{-1,990 \tau - 0,0117} \quad \text{„ } 0,0124 \leq \tau \leq \infty \end{array}$$

Die Rechnungsergebnisse für einige Argumente τ nach den vorstehenden Gleichungen und nach der strengen Gl. (18) sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

$\tau = \frac{ct}{r_2^2}$	μ				I ↓ ↑ II ↓
	nach der strengen Gl. (18)	Nach dem Näherungsverfahren für:			
		$\nu = 4$	$\nu = 5$	$\nu = 6$	
0,0032	0,0124	0,0135	0,014	0,014	
0,008	0,0274	0,0251	0,026	0,027	
0,016	0,0475	0,0395	0,041	0,043	
0,032	0,0727	0,0646	0,067	0,073	
0,16	0,266	0,214	0,248	0,281	
0,32	0,437	0,369	0,425	0,457	
0,80	0,746	0,673	0,743	0,798	
1,12	0,850	0,789	0,850	0,894	
1,60	0,932	0,881	0,933	0,959	
2,40	0,982	0,964	0,982	0,992	
3,20	0,995	0,988	0,995	0,998	

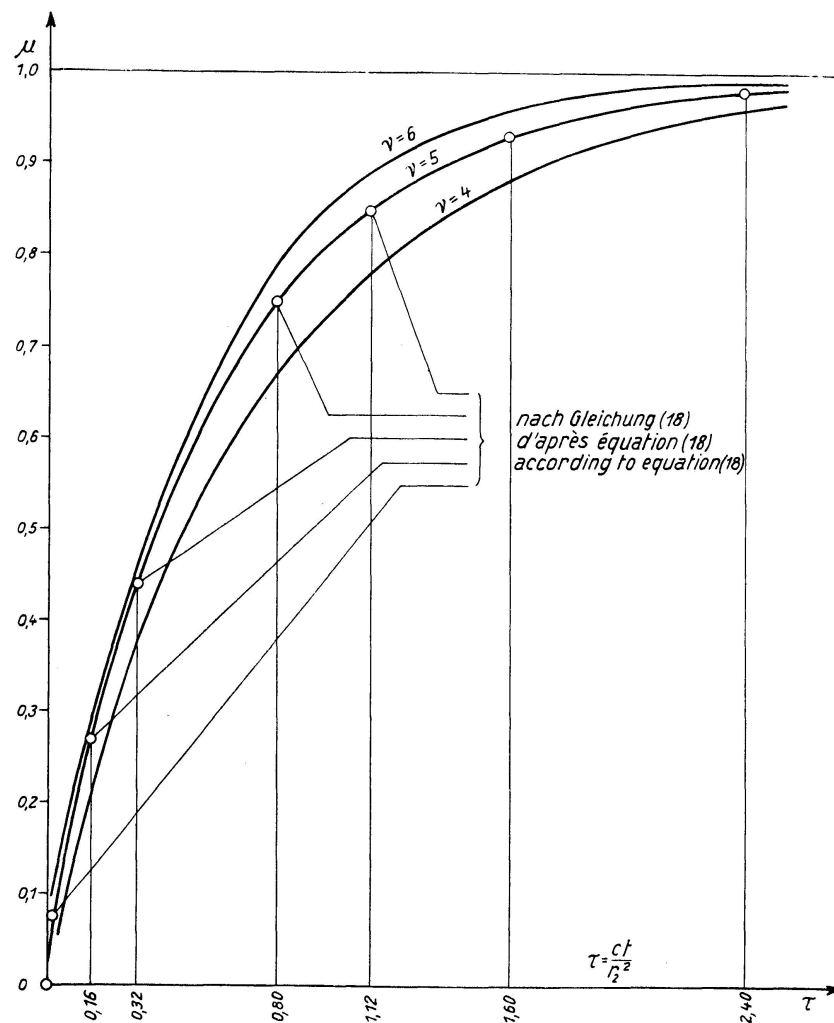


Fig. 5.

In Fig. 5 sind die Wasseraustrittskurven für $\nu = 4, 5$ und 6 aufgetragen; die Übereinstimmung der Kurve für $\nu = 5$ mit den Ergebnissen der strengen Behandlung ist, wie man aus der Figur erkennt, eine sehr gute. Die größten Unterschiede zwischen der strengen und der angenäherten Berechnung betragen unter 6 % der Gesamtformänderung und liegen im Beginn der Kurve, wo der Verfestigungsgrad noch unter 10 % ist; bei μ -Werten von rund 25 % ist der Fehler schon unter 2 % gesunken.

III. Verfahren für die Berechnung des zeitlichen Verlaufes der Verformung von Tonzylindern mit radial nach außen gerichteter Porenwasserströmung.

Ein Tonzylinder vom Durchmesser $2r_2$ und der Höhe h werde an seiner Mantelfläche mit einer Hülle aus einem Sand-Glimmergemenge umgeben, welches mit einem Standrohr in Verbindung steht, um Entwässerung nach außen zu gestatten. Die Stirnflächen des Zylinders seien durch wasserundurchlässige Platten begrenzt. Ein allseitiger, plötzlich aufgebrachter Druck q_0 ruft eine Porenwasserströmung hervor, die in Fig. 6 veranschaulicht ist. Auch hier gilt die Gl. (19), welche mit den Bezeichnungen der Fig. 6 folgende Form annimmt:

$$\frac{dV_t}{dt} = 2 \pi r_2 c \operatorname{tg} \alpha \quad (30)$$

worin $V_t = 2\pi q_s F_t$ bedeutet. Die Kurve AC ist eine Isochrone für die Phase I der Strömung, AF bezieht sich auf die Phase II.

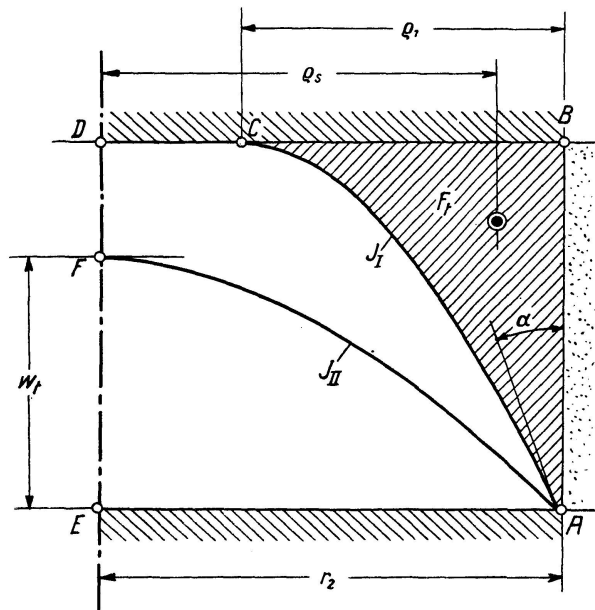


Fig. 6.

Die Ausrechnung von (30) verläuft analog jener unter II. vorgeführten und ergibt folgende Gleichungen:

Phase I.

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{1}{\nu(\nu+1)} \left(\frac{q_1}{r_2}\right)^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3(\nu+2)} \left(\frac{q_1}{r_2}\right) \right] \\ \mu &= \frac{2}{\nu+1} \left(\frac{q_1}{r_2}\right) \left[1 - \frac{1}{\nu+2} \left(\frac{q_1}{r_2}\right) \right]\end{aligned}$$

Gültig für: $0 \leq \frac{q_1}{r_2} \leq 1$.

Phase II.

$$\mu = 1 - \frac{\nu}{\nu + 2} e^{-2(\nu + 2)(\tau - \tau_I)}$$

Gültig für: $\tau_I \leq \tau \leq \infty$

wobei
$$\tau_I = \frac{3\nu + 2}{6\nu(\nu + 1)(\nu + 2)}.$$

Die strenge Lösung für den vorliegenden Fall ist aus der Theorie der Wärmeleitung bekannt. Die numerische Ausrechnung für die Wasseraustrittskurve zeigt, daß die strenge (μ, τ) -Kurve zwischen den Näherungskurven für $\nu = 2$ und $\nu = 1$ liegt, und zwar unabhängig von der Größe des Halbmessers r_2 .

Während der I. Phase gibt die Kurve $\nu = 2$, während der II. Phase hingegen die Kurve $\nu = 1$ genauere Werte; die größte Abweichung zwischen den strengen und den genäherten μ -Werten ist 4 %.

Schlußbemerkung.

Der Wert der Näherungslösungen liegt hauptsächlich darin, daß Probleme mit verwickelten Randbedingungen (zeitlich veränderliche Belastung und Schichtenmächtigkeit) mittelst dieser Näherungsverfahren noch behandelt werden können, während die Hindernisse gegen eine mathematisch strenge Behandlung solcher Fälle sich als unübersteigbar erwiesen haben. Ferner lassen sich diese Verfahren auch auf andere Probleme, beispielsweise auf den nicht-stationären Zustand der Grundwasserbewegung bei der Absenkung des Grundwasserspiegels mit Brunnen anwenden, wo die Lösung der strengen Differentialgleichung bisher überhaupt nicht gelungen ist. Diese Anwendung der erläuterten Verfahren soll an anderer Stelle gezeigt werden.

Zusammenfassung.

In der vorliegenden Arbeit werden Näherungsverfahren für die Berechnung des zeitlichen Verlaufes der hydrodynamischen Spannungen und Formänderungen in planparallelen Tonschichten und Tonzylindern infolge allseitiger Belastung entwickelt. Die Porenwasserströmung in den Tonschichten ist senkrecht zur Schichtbegrenzung, die in den Tonzylindern radial (nach innen bzw. nach außen) gedacht. Die Ergebnisse der Näherungsverfahren werden mit den mathematisch strengen Lösungen verglichen, wobei sich durchwegs praktisch zufriedenstellende Übereinstimmung ergibt. Die Kurven des hydrostatischen Porenwasserüberdruckes (Isochronen) der Näherungslösungen sind Parabeln vom Grade ν ; im Falle der Parallelströmung (Tonschichten) ist $\nu = 2$; für die radiale, nach innen gerichtete Strömung in Zylindern mit dünnem Kern gilt $\nu = 5$, während die strenge Lösung für radiale, nach außen gerichtete Strömung in Zylindern zwischen $\nu = 2$ (in ersten Hälfte des Verdichtungsvorganges) und $\nu = 1$ liegt.

Résumé.

Dans ce mémoire l'auteur développe quelques procédés approximatifs pour le calcul de la variation dans le temps des tensions hydrodynamiques

et des déformations dans des couches parallèles et des cylindres d'argile chargés suivant toutes les directions. Le courant de l'eau interstitielle est supposé perpendiculaire aux couches dans l'argile en couches et radial (vers l'intérieur, resp. vers l'extérieur) dans les cylindres d'argile. Les résultats fournis par les méthodes approximatives sont comparés à ceux fournis par les solutions exactes; la concordance peut être considérée comme pratiquement satisfaisante. Les courbes de la surpression hydrostatique de l'eau interstitielle (isochrones) fournies par les solutions approximatives sont des paraboles de degré ν ; dans le cas d'un courant parallèle (argile en couches) $\nu = 2$; dans le cas d'un courant radial dirigé vers l'intérieur (cylindre d'argile à noyau mince) $\nu = 5$ alors que d'après la solution exacte cette valeur varie entre $\nu = 2$ (dans la première moitié du processus de durcissement) et $\nu = 1$ dans un cylindre d'argile avec un courant dirigé vers l'extérieur.

Summary.

In this paper approximate methods are developed for calculating the variation in time of hydrodynamic stresses and strains due to loading on all sides in clay strata and cylinders. The direction of flow of the pore water in the clay strata is perpendicular to the stratification, and in clay cylinders radially inward or outward. The results obtained by the approximate method are compared with mathematically accurate solutions, and in all cases an agreement satisfactory for practical purposes is obtained. The curves for the excess hydrostatic pressure of the pore water (isochrones) as obtained from the approximate solutions are parabolae of degree ν ; in the case of parallel flow (through clay strata) $\nu = 2$; in the case of the radial flow directed inward in the cylinders having a thin core $\nu = 5$; in the result obtained from the strict solution, corresponding to radial flow outward in cylinders, the value lies between $\nu = 2$ (for the first half of the process of pore-filling) and $\nu = 1$.

Leere Seite
Blank page
Page vide