

# Bruchmomente der kreuzweise bewehrten Platten

Autor(en): **Johansen, K.W.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **1 (1932)**

PDF erstellt am: **18.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-722>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# BRUCHMOMENTE DER KREUZWEISE BEWEHRTEN PLATTEN

LES MOMENTS DE RUPTURE DES DALLES A ARMATURES CROISÉES  
MOMENTS OF RUPTURE IN CROSS-REINFORCED SLABS

K. W. JOHANSEN,

Ingenieur des Laboratoriums für Baustatik der Technischen Hochschule, Kopenhagen.

Der erste Versuch zur Aufstellung einer rationellen Bruchtheorie für Eisenbetonplatten wurde von dem dänischen Ingenieur AAGE INGERSLEV unternommen<sup>1)</sup>, der für frei gestützte und eingespannte viereckige und polygonale Platten Formeln aufstellte. Er setzte voraus, daß die Platte längs gewisser gerader Linien — Bruchlinien —, wo die Bewehrung die Fließgrenze überschritten hat, zerbreche. Das Biegemoment könne daher längs dieser Linien als konstant vorausgesetzt und zugleich als Maximalwert angesehen werden. Aus dem letzteren Umstand folgerte INGERSLEV irrtümlicherweise, daß die Querkräfte an den Bruchlinien Null würden. Das ist nicht der Fall, aber sie lassen sich durch die Maximumbedingungen bestimmen, wodurch es möglich wird, auf Grund dieser plausiblen Voraussetzungen die nachstehende allgemeine Bruchtheorie aufzustellen.

Folgende Signaturen gelangen zur Anwendung:

<p>~~~~~ Bruchlinie</p> <p>— · — · — Drehachse</p> <p>———— Freier Rand</p> <p>      Frei gestützter Rand</p> <p>xxxxxxxxxxx Eingespannter Rand</p>	<p>==== Zwischenstützung</p> <p>■ ■ Säulen ohne und mit Einspannung in der Platte</p> <p>~~~~~<sup>x</sup> Querkräfte</p> <p>⊙ ⊕ Einzelkraft nach oben und nach unten</p> <p>———— Linienbelastung.</p>
--	--

## A. Die Bruchlinien.

Im Bruchzustande fließt das Eisen in den Bruchlinien, so daß dort plastische Formveränderungen auftreten, während die Plattenteile zwischen den Bruchlinien nur elastische Formveränderungen aufweisen; und da diese gegenüber den plastischen als verschwindend zu betrachten sind, können die einzelnen Plattenteile mit guter Annäherung als eben, und deren Schnittlinien, die Bruchlinien, als Gerade angesehen werden.

Man berücksichtigt also nur die Formänderungen in den Bruchlinien und nimmt an, daß sie in einer gegenseitigen Drehung zweier benachbarter Plattenteile bestehen. Diese relative Drehung erhält das gleiche Vorzeichen

<sup>1)</sup> „Ingeniören“ 1921, S. 507.

„The Institution of Structural Engineers' Journal“, January 1923.

wie das entsprechende Moment, ist also positiv, wenn die Platte oben gedrückt und unten gezogen wird. Die Plattenteile führen Drehungen um gewisse Achsen aus, deren Lage von den Auflagern abhängt. Da die Plattenteile eben sind, findet man,

- I. die Bruchlinie zwischen zwei Plattenteilen geht durch den Schnittpunkt ihrer Drehachsen.

Bei einem Plattenteil, der längs der Kante frei gestützt ist, muß die Drehachse in der Kante liegen, und bei einem Teil, der auf einer Säule gelagert ist, muß die Achse durch die Säule gehen, kann aber sonst beliebig liegen. Hiemit und mittels des obenstehenden Satzes kann man sich eine Vorstellung von dem Aussehen der Bruchfiguren (Fig. 1 und 2) bilden. Sind die Drehungen  $\Theta$  der Plattenteile gegeben, läßt sich die Bruchfigur konstruieren. Man denkt sich dann die deformierte Platte mit einer Ebene im Abstand  $s$  von der Ebene der Auflager geschnitten. Die Schnittlinien dieser Ebene mit den gedrehten Plattenteilen sind Niveaulinien des Polyeders, das

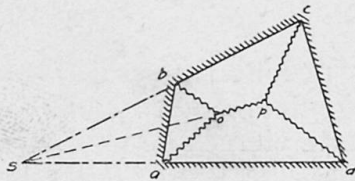


Fig. 1.

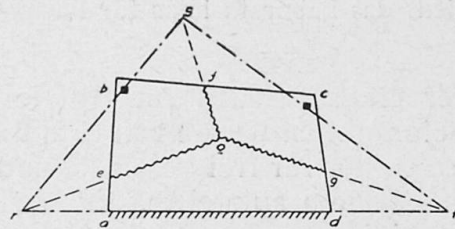


Fig. 2.

von der deformierten Platte gebildet wird. Die Niveaulinien liegen im Abstand  $s : \Theta$  von den Drehachsen und schneiden sich in den Bruchlinien, welche somit durch den Schnittpunkt der Drehachsen und den Schnittpunkt der entsprechenden Niveaulinien bestimmt sind (Fig. 3).

Da das Resultat unabhängig von  $s$  sein muß, kann man  $s$  proportional einer der Drehungen setzen, und man wird dann finden:

- II. die Bruchfigur ist durch die Drehachsen der Plattenteile und die Verhältniszahlen der Drehungen bestimmt.

Ist die Platte in  $n$  Teile geteilt, und sind alle Drehachsen bekannt, hängt die Bruchfigur nur von den  $n-1$  Verhältniszahlen der Drehungen ab.

Wenn eine Bruchlinie ( $aob$  in Fig. 4) einen Knick hat, muß dort eine zweite Bruchlinie ( $oc$ ) hinzustoßen, und deren Richtung und Drehung wird als geometrische Differenz zwischen den Drehungen in  $ao$  und  $ob$  bestimmt. Je nachdem ob die Bruchlinie an der konvexen oder der konkaven Seite des Knickes anstößt, erhält ihre Drehung das gleiche oder das entgegengesetzte Vorzeichen der Drehungen in  $aob$ .

Bruchlinien und ihre Drehungen werden nach Fig. 4 „zusammengesetzt“ und „zerlegt“.

Da die Bruchmomente nicht von der Größe der Drehungen abhängen, haben im Folgenden nur die Vorzeichen Bedeutung. Die Bruchlinien werden nach den Vorzeichen ihrer Drehungen (Momente) positiv oder negativ genannt.



**B. Die Schnittkräfte.**

1. Gleichbewehrte Platten.

In gleichbewehrten Platten, d.h. in Platten mit gleicher Bewehrung in zwei zueinander senkrechten Richtungen, ist das Bruchmoment  $m$  auf die Längeneinheit gleich in allen Richtungen. Das Biegemoment der Bruch-

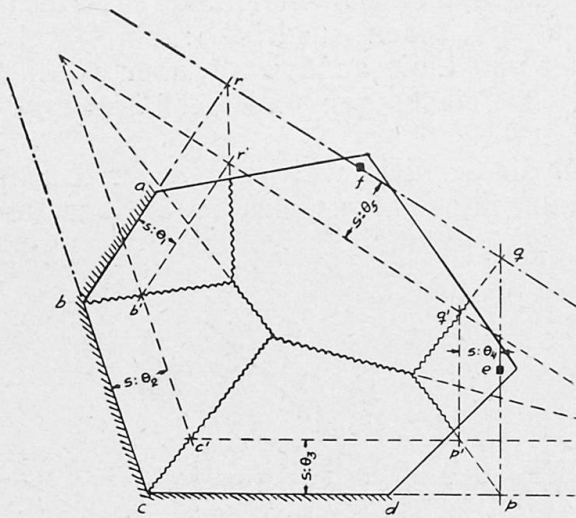


Fig. 3.

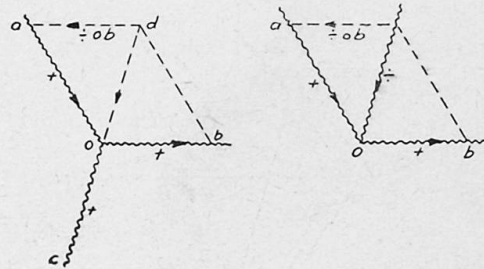


Fig. 4.

linie  $su$  von der Länge  $a$  (Fig. 5) ist  $ma$  und wird durch die als Vektor betrachtete Bruchlinien selbst dargestellt. Betrachtet man das Plattenstück  $B$ , so ist der Vektor in Richtung von  $s$  nach  $u$  gerichtet, indem der positive Umlaufsinn entgegen dem Uhrzeiger dreht. Außerdem wirken in  $su$  ein Drillungs-

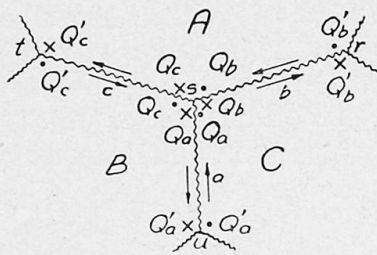


Fig. 5.

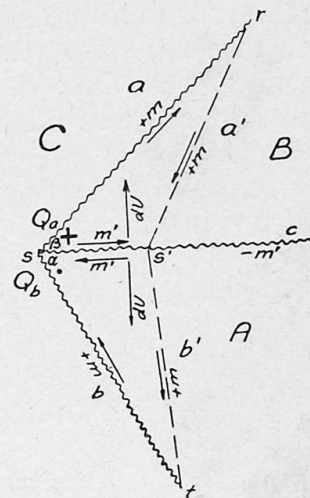


Fig. 6.

moment und eine Querkraft. Diese lassen sich eindeutig durch die Querkräfte  $Q_a$  und  $Q'_a$  in  $s$  und  $u$  angeben. Werden die entsprechenden Schnittkräfte in  $sr$  und  $st$  dargestellt, sieht man, daß in  $s$  wirken: auf den Plattenteil  $A$  die Querkraft  $Q_A = Q_b - Q_c$  (positiv nach oben), auf  $B$   $Q_B = Q_c - Q_a$  und auf  $C$   $Q_C = Q_a - Q_b$ , woraus sich ergibt:

$$Q_A + Q_B + Q_C = 0. \tag{1}$$



Diese Kräfte werden im Folgenden als Knotenkräfte bezeichnet, und ihre Summe ist stets Null, auch wenn mehrere Bruchlinien zum Knotenpunkt führen.

Da in Wirklichkeit Einzelkräfte und Linienbelastungen nicht vorkommen, sondern nur Belastungen, die um Punkte und Linien konzentriert sind, ist es nicht notwendig, in diesen Fällen spezielle Untersuchungen vorzunehmen. Dasselbe gilt für Auflagerungen auf Säulen und Balken (Mauern). Nachstehend werden zwar noch immer die theoretischen Ausdrücke: Einzelkraft, Linienbelastung, Unterstützung in Punkt und Linie angewandt, aber es wird mit den entsprechenden flächenverteilten Belastungen und Reaktionen gerechnet.

Weil  $m$  ein Maximalwert ist, gilt für die Schnitte, welche nahe der Bruchlinie liegen, der gleiche Wert des Biegemomentes. Dies genügt zur Bestimmung der Knotenkräfte.

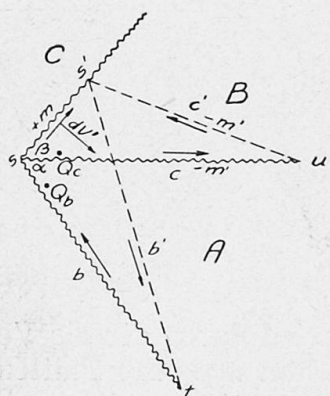


Fig. 7.

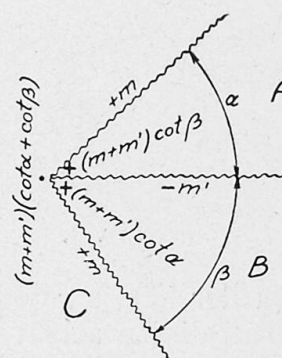


Fig. 8.

Betrachtet man einen Knotenpunkt mit zwei positiven und einer negativen Bruchlinie (Fig. 6), so werden durch die Bruchlinien und die benachbarten Schnitte  $a'$  und  $b'$  die Dreiecke  $tss'$  und  $rss'$  ausgeschnitten, welche unter dem Einfluß der äußeren und inneren Kräfte im Gleichgewicht sein sollen. Weil in  $a'$  und  $b'$  dasselbe  $m$  gilt wie in  $a$  und  $b$ , hat die Resultante der Biegemomente in  $a$  und  $a'$ :  $m \cdot ss'$  die gleiche Richtung wie das negative Biegemoment  $m' \cdot ss'$  in  $ss'$ . In  $ss'$  wirken außerdem ein Drillungsmoment  $dV$  und eine Querkraft  $dQ$ . Die Momentenbindung um  $a'$  für  $\Delta rss'$  ergibt, indem die Beiträge der Belastung und von  $dQ$  unendlich klein von höherer Ordnung sind

$$\begin{aligned} Q_a \cdot ds \cdot \sin \beta \\ = dV \cdot \sin \beta + (m + m') \cdot ds \cdot \cos \beta \\ Q_a = \frac{dV}{ds} + (m + m') \cot \beta. \end{aligned}$$

In gleicher Weise ergibt sich für  $\Delta tss'$

$$Q_b = \frac{dV}{ds} - (m + m') \cot \alpha.$$

Daraus ergibt sich nun

$$\begin{aligned} Q_c &= Q_a - Q_b \\ &= (m + m') (\cot \alpha + \cot \beta). \end{aligned} \tag{2c}$$

Wird  $s$  auf  $a$  verschoben, ergibt sich (Fig. 7) durch Momente um  $b'$  für  $\Delta tss'$

$$Q_b = \frac{dV'}{ds},$$

und durch Momente um  $c'$  für  $\Delta uss'$

$$Q_c = \frac{dV'}{ds} + (m + m') \cot \beta,$$

woraus

$$Q_A = Q_b - Q_c = -(m + m') \cot \beta \quad (2a)$$

und dementsprechend

$$Q_B = -(m + m') \cot \alpha. \quad (2b)$$

Die Ergebnisse erhellen aus Fig. 8.

In einem Knotenpunkt mit Bruchlinien von gleichem Vorzeichen ist  $m = -m'$ , also  $m + m' = 0$ , und somit ergibt sich

III. In einem Knotenpunkt, in dem alle Bruchlinien das gleiche Vorzeichen haben, sind sämtliche Knotenkräfte gleich Null.

Das gilt auch, wenn mehr als drei Bruchlinien zum Knotenpunkt führen. Haben die Bruchlinien dagegen verschiedene Vorzeichen, ergibt sich:

IV. In einem Knotenpunkt, in dem nicht alle Bruchlinien dasselbe Vorzeichen haben, können nur drei von den Bruchlinien verschiedene Richtungen haben.

Wäre z. B. in Fig. 8 noch eine positive Bruchlinie unter dem Winkel  $\alpha'$  gegen die negative Bruchlinie vorhanden, würde man durch Verschieben von  $s$  auf dieser ermitteln:

$$Q_B = -(m + m') \cot \alpha',$$

was nur den gleichen Wert wie oben ergibt, wenn  $\alpha' = \alpha$  ist.

Bei einem freien oder frei gestützten Rande ist  $\alpha + \beta = \pi$ ,  $m = 0$ , wodurch die Knotenkräfte zahlenmäßig gleich groß werden und gleich

$$Q_R = m' \cot \alpha,$$

in einem spitzen Winkel nach oben, in einem stumpfen nach unten wirkend (vergl. Fig. 20, Punkt  $d'$ ).

Für eine positive Bruchlinie erhält man  $Q_R$ , indem man  $m'$  durch  $-m$  ersetzt (vergl. Fig. 21).

## 2. Ungleich bewehrte Platten.

Solche Platten sind in zwei zueinander rechtwinkligen Richtungen im Verhältnis  $1:\mu$  bewehrt. Die Bruchmomente der entsprechenden Schnittrichtungen sind  $m$  und  $\mu m$ . Eine Bruchlinie  $ab$  (Fig. 9)<sup>1)</sup> in beliebiger Richtung läßt sich fein zickzackförmig in den Schnittrichtungen abgetreppt denken, entsprechend den Momenten  $m$  und  $\mu m$ . Die ersteren ergeben eine Resul-

<sup>1)</sup> In den Figuren sind die Bruchlinienrichtungen der Momente  $m$  und  $\mu m$  angegeben.



tante  $m \cdot ae$ , die letzteren  $\mu m \cdot eb$ . Wird  $ef = \mu \cdot eb$  gesetzt, ergibt sich  $m \cdot af$  als Bruchmoment für  $ab$ .

Man wird finden, daß ein Teil des Drillungsmomentes in  $ab$  vom Bruchmoment gebildet wird. Der restierende Teil und die Querkraft bestimmen wie vorher die zwei Querkräfte in den Endpunkten der Bruchlinie. Das Biegemoment in  $ab$  wird

$$m \cdot ae \cdot \cos v + \mu m \cdot eb \cdot \sin v = m \cdot ab \cdot \cos^2 v + \mu m \cdot ab \cdot \sin^2 v$$

also pro Längeneinheit

$$m_b = m \cdot \cos^2 v + \mu m \cdot \sin^2 v. \quad (3)$$

Der Beitrag des Bruchmomentes zum Drillungsmoment wird

$$m_d = (1 - \mu) m \cdot \sin v \cos v, \quad (4)$$

positiv normal nach innen gerechnet.

Aus (3) und (4) ist zu ersehen, daß  $m_b$  und  $m_d$  sich aus  $m$  und  $\mu m$  durch den LAND'schen oder MOHR'schen Kreis bestimmen lassen.

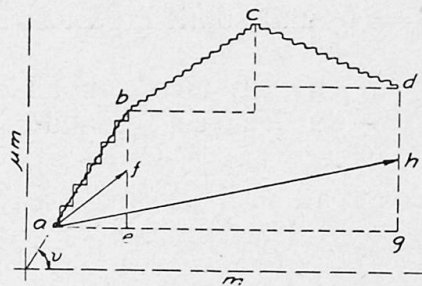


Fig. 9.

Für die Bruchlinie  $abcd$ , deren Momente alle das gleiche Vorzeichen haben, setzt sich die Resultante der Bruchmomente  $m \cdot ah$  zusammen aus  $m \cdot ag$  und  $\mu m \cdot gd = m \cdot gh$ .

In gleicher Weise wie bei gleich bewehrten Platten ergeben sich die Knotenkräfte (vergl. Fig. 8)

$$Q_A = - (m_b + m'_b) \cot \beta + (m_d + m'_d), \quad (5a)$$

$$Q_B = - (m_b + m'_b) \cot \alpha - (m_d + m'_d), \quad (5b)$$

$$Q_C = (m_b + m'_b) (\cot \alpha + \cot \beta), \quad (5c)$$

wo  $m'_b$  und  $m'_d$  die Komponenten des Bruchmomentes der negativen Bruchlinie sind,  $m_b$  und  $m_d$  die Komponenten eines positiven Bruchmomentes derselben Linie.

Für einen freien oder frei gestützten Rand ergibt sich

$$Q_R = m_b \cdot \cot \alpha + m_d, \quad (5r)$$

wo  $m_b$  und  $m_d$  die Komponenten des Bruchmomentes eines Schnittes in Richtung des Randes sind.

Die Sätze III und IV behalten ihre Gültigkeit auch für ungleich bewehrte Platten.

### C. Die Gleichgewichtsbedingungen. Die Arbeitsgleichung.

Unter Einwirkung der Belastung, der Bruchmomente und der Knotenkräfte sollen die einzelnen Plattenteile im Gleichgewicht sein; das ergibt für jeden Plattenteil drei Gleichgewichtsgleichungen, z. B. zwei Momentenglei-



chungen um Achsen in der Ebene der Platte und eine Projektionsgleichung auf die Normale der Platte. Ist die Platte in  $n$  Teile geteilt, erhält man  $3n$  Gleichungen zur Bestimmung der unbekanntenen Größen. Letztere sind: das Bruchmoment  $m$ , die Auflagerkräfte, die Drehachsen und die  $n-1$  Verhältniszahlen zwischen den Drehungen, die die Bruchfigur bestimmen. Die Drehungsverhältnisse bilden zusammen mit dem Bruchmoment  $n$  Unbekannte. Bei einem Plattenteil, der längs einer Kante gestützt ist, liegt die Drehachse in derselben, ist also bekannt, während die Größe und die Lage der Auflagerkraft unbekannt sind. Bei einem auf einer Säule gestützten Plattenteil muß die Drehachse durch dieselbe gehen, aber ihre Richtung ist unbekannt; die Auflagerkraft muß in der Säule liegen, so daß nur deren Wert unbekannt ist. Bei einem nicht gestützten Plattenteil fällt die Auflagerkraft weg, aber die Lage der Drehachse ist gänzlich unbekannt, d. h. es ergeben sich hier wie in den vorhergehenden Fällen zwei Unbekannte. Für alle  $n$  Plattenteile ergeben sich  $n + 2n = 3n$  Unbekannte, gemäß der Anzahl der Gleichungen.

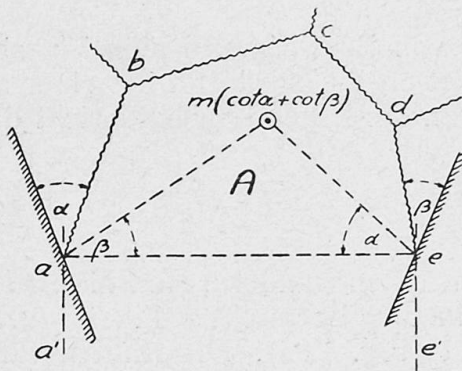


Fig. 10.

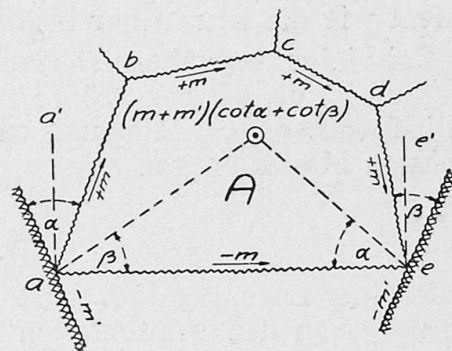


Fig. 11.

Bei einem gleich bewehrten Plattenteil  $A$ , der von der positiven Bruchlinie  $abcd$  begrenzt wird, an welche nur positive Bruchlinien grenzen, welche bei einem freien oder frei gestützten Rand beginnen und endigen, wird die Resultante der Biegemomente und der Knotenkräfte eine Einzelkraft  $m(\cot \alpha + \cot \beta)$  und wirkt wie in Fig. 10 angegeben.

Bei eingespannten Rändern und einer negativen Bruchlinie  $ae$  wird die Resultante  $(m + m')(\cot \alpha + \cot \beta)$  und wirkt wie in Fig. 11 angegeben. Der Angriffspunkt wird also in beiden Fällen durch Antragen der Randwinkel  $\alpha$  und  $\beta$  an die Sehne  $ae$  konstruiert. Die Richtigkeit hiervon ergibt sich, wenn man das Moment um die Achsen  $ae$ ,  $aa'$  und  $ee'$  aufstellt, wobei zu bedenken ist, daß nur in  $a$  und  $e$  Knotenkräfte auftreten, und zwar im Betrag von  $m \cot \alpha$  bzw.  $m \cot \beta$  in Fig. 10 und  $(m + m') \cot \alpha$  und  $(m + m') \cot \beta$  in Fig. 11.

Bisweilen mag es bequem sein, die Arbeitsgleichung zu verwenden. Da die elastischen Formveränderungen vernachlässigt werden können, kommt von den inneren Kräften nur die Arbeit der Bruchmomente in Betracht, die den Drehungen in den Bruchlinien proportional ist. Die Drehung einer Bruchlinie setzt sich aus den Drehungen der anstoßenden Plattenteile um ihre Drehungsachsen zusammen, so daß der Beitrag jedes Plattenteils das Produkt seiner Drehung und die Projektion des Bruchmomentes auf der Drehungsachse wird. Der Gesamtbeitrag eines Plattenteils besteht folglich aus dem Produkt der Drehung  $\Theta$  des Plattenteils mal die Projektion der Resultanten  $M$  seiner Bruchmomente auf die Drehachse, also ist:  $\Theta \cdot M \cdot \cos(\Theta, M)$ <sup>1)</sup>. Sind

<sup>1)</sup> Skalares Produkt der Vektoren  $\Theta$  und  $M$ .

$y$  die den Drehungen  $\Theta$  entsprechenden Bewegungen der Angriffspunkte der Belastung, ergibt sich durch Summation über die ganze Platte die Arbeitsgleichung

$$\sum Py = \sum \Theta \cdot M \cos(\Theta, M). \quad (6)$$

Dieselbe ist der Ausdruck für die Abhängigkeit des Bruchmomentes von der Bruchfigur.

Das Bruchmoment ist im Vorhergehenden als ein Maximalwert gegenüber den Momenten in den Schnitten in der Nähe der Bruchlinien aufgefaßt. Werden diese Schnitte so gelegt, daß eine neue Schnittfigur gebildet wird, welche die geometrischen Bedingungen erfüllt, sieht man, daß eine kleine Abänderung der Schnittfigur dasselbe  $m$  ergibt, also den Zuwachs  $dm = 0$ . Folglich ließe sich  $m$  als Maximalwert für sämtliche möglichen Schnittfiguren auffassen und die Bruchfigur als diejenige Schnittfigur, die  $m$  zum Maximum macht. Durch die Arbeitsgleichung (6) lassen sich dadurch sowohl das Bruchmoment wie die Bruchfigur bestimmen.

Bei vielen Aufgaben ist eine Mehrzahl von Bruchfiguren möglich, aber diejenige Figur, die das größte Bruchmoment ergibt, wird erst bei einer allmählich wachsenden Belastung entstehen, d. h. die Bruchfigur entspricht dem absoluten Maximum von  $m$ .

#### D. Ecken.

In einer Ecke, gebildet von zwei frei gestützten Rändern, muß die Bruchlinie zwischen den Plattenteilen  $A$  und  $B$  in den Eckpunkt  $h$  hinauslaufen, welcher der Schnittpunkt der Drehachsen ist (Fig. 12 a). Die Knotenkräfte, welche für gleichbewehrte Platten  $Q_R = m \cot \alpha$  und  $Q'_R = m \cot \beta$  werden, zeigen, daß eine abwärts gerichtete Kraft  $Q_R + Q'_R$  in der Ecke auf die Platte wirkt, d. h. die Ecke muß im Auflager verankert sein. Ist dies nicht der Fall, wird die Platte sich vom Auflager in der Ecke abheben, indem  $C$  um die Achse  $ab$  (Fig. 12 b) wippt, und die Bruchlinie sich spaltet. Wird die „Wippe“  $C$  im Auflager verankert, bildet sich eine negative Bruchlinie  $ab$  (Fig. 12 c). Bei einer gewissen oberen Bewehrung in der Ecke fallen  $a$  und  $b$  mit  $h$  zusammen, so daß das ursprüngliche Bruchbild entsteht (Fig. 12 a). Dies setzt also außer Verankerung auch eine gewisse obere Bewehrung in der Ecke voraus. Dächte man sich von der Ecke ein kleines Stück abgeschnitten, würden die Knotenkräfte die Summe Null bekommen, so daß eine Verankerung nicht notwendig würde, aber trotzdem würde sich eine „Wippe“ bilden, weil diese Bruchfigur das größte Bruchmoment ergibt. Daraus ersieht man, daß das Erscheinen der „Wippen“ nicht so sehr eine Frage der Verankerung als eine Frage der Form der Platte ist.

Die Bestimmung dieser „Wippen“ soll für gleichbewehrte Platten mit Einzelkraftbelastung durchgeführt werden. Bei gleichmäßig verteilter Belastung spielen die „Wippen“ eine kleinere Rolle, so daß man sich dort mit einer annähernden Bestimmung begnügen kann.

Fig. 13 zeigt eine unverankerte, gleichbewehrte „Wippe“  $ahbc$ , mit einer Einzelkraft in  $c$  belastet. Da die „Wippe“ nicht auf den Auflagern ruht, muß die Resultante der Schnittkräfte gleich der Einzelkraft in  $c$  und ihr entgegengesetzt gerichtet sein. Gemäß dem Vorstehenden müssen die Winkel bei  $ab$  dann gleich den Randwinkeln  $\alpha$  und  $\beta$  sein. Man findet dann

$$\sphericalangle hab = \sphericalangle hba = \sphericalangle acb = \varphi = \pi - \alpha - \beta,$$



d. h.  $a$  und  $b$  liegen auf einem Kreis, der die Kanten berührt und durch  $c$  geht. Dadurch kann die „Wippe“ bestimmt werden, wenn  $c$  gegeben ist.

Wenn die „Wippe“  $ahbc$  verankert ist, entsteht die negative Bruchlinie  $ab$  mit dem Bruchmoment  $m'$  entsprechend der oberen Bewehrung. Die Resultierende der Schnittkräfte der „Wippe“  $abc$  ist bei der negativen Bruchlinie  $m'(\cot \alpha' + \cot \beta')$  — abwärts wirkend in  $g$  — und bei der positiven

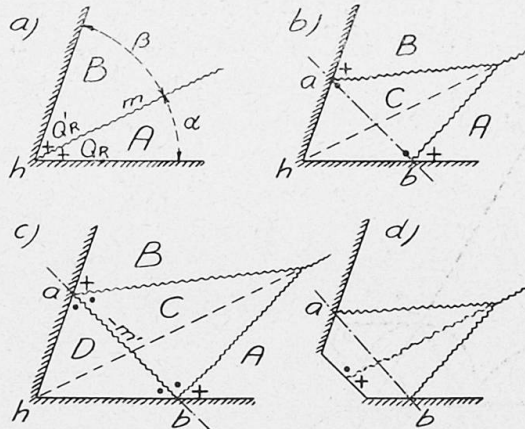


Fig. 12, a — d.

Bruchlinie  $acb$   $m(\cot \alpha + \cot \beta)$  — aufwärts wirkend in  $d$ . Aus Fig. 14 ersieht man, daß  $abe$  auf einem Kreis liegen, der in  $a$  und  $b$   $ah$  und  $bg$  berührt, während  $abf$  auf einem Kreis liegt, der in  $a$  und  $b$   $ag$  und  $bh$  berührt.

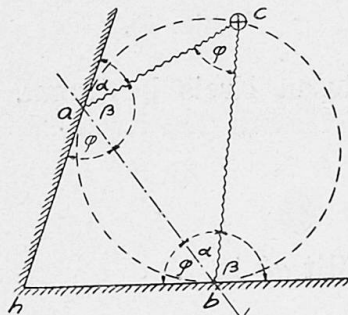


Fig. 13.

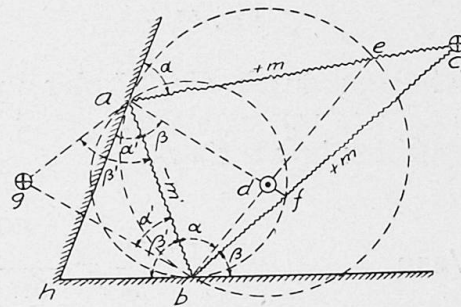


Fig. 14.

Die Resultante der Kräfte in  $g$  und  $d$  soll gleich der Einzelkraft in  $c$  und ihr entgegengerichtet sein, d. h.  $g$ ,  $d$  und  $c$  sollen auf einer Geraden liegen. Das ist der Fall, wenn das Viereck  $abfe$  sich einem Kreis einbeschreiben läßt (PASCAL'scher Satz), und in diesem Falle müssen die beiden Kreise zusammenfallen, also  $\alpha' = \beta'$  und  $g = h$  (Fig. 15). In  $h$  wirken  $2m' \cot \alpha' = 2m' \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$  abwärts und in  $d$   $m \cdot (\cot \alpha + \cot \beta)$  aufwärts. Die sich ergebende Resultante muß durch  $c$  gehen, d. h.

$$2m' \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \cdot ch = m \cdot (\cot \alpha + \cot \beta) \cdot cd.$$

Da  $2 \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = ab : hk$  und  $\cot \alpha + \cot \beta = ab : id$  und  $hk : id = hs : ds$ , ergibt sich  $m' \cdot ch : hs = m \cdot cd : ds$  oder

$$\frac{m'}{m} = \frac{cd}{sd} : \frac{ch}{sh} = \text{dem Doppelverhältnis } (hdsc).$$



Wird durch  $c h' h'' \perp$  zur Winkelhalbierenden gezogen, so ergibt sich  $h' h'' \parallel ab$ . Werden  $h, s, d$  und  $c$  von  $a$  aus auf  $h' h''$  projiziert, wird  $h$  in  $h', d$  in  $d'$  und  $c$  in  $c$  abgebildet, während  $s'$  ins Unendliche fällt. Bekanntlich haben die projizierten Punkte das gleiche Doppelverhältnis, also  $m':m = (h'd's'c) = cd':ch'$ . Den Punkt  $d'$  bestimmt man folglich durch Absetzen von  $cd' = ch' : m' : m$ . Da  $\Delta abf \sim \Delta cd'f$  bezüglich  $f$ , wird der Kreis um  $\Delta cd'f$  den Kreis um  $\Delta abf$  in  $f$  berühren. Da die Tangenten in  $c$  und  $d'$  den Rändern parallel sind, kann der Kreis  $cf d'$  konstruiert werden. Der gesuchte Kreis

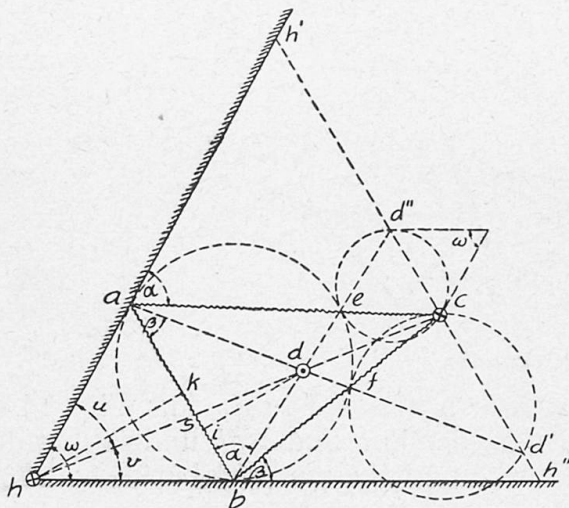


Fig. 15.

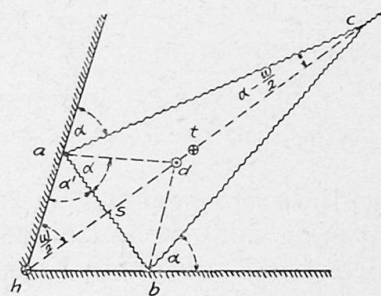


Fig. 16.

$abfe$  ist dann durch die Ränder und durch diesen Kreis bestimmt. Wird  $cd'' = ch'' \cdot m' : m$  abgetragen, erhält man entsprechend den Kreis  $ced''$ , der den gesuchten in  $e$  berührt.

Wenn 
$$\frac{m'}{m} = \frac{\cos^2 \frac{\omega}{2}}{\sin u \cdot \sin v}, \quad \text{fällt } ab \text{ in } h.$$

Mit Einspannung an beiden Rändern erhält man die gleiche Konstruktion wie in Fig. 13, da die Resultante der Schnittkräfte dieselbe Lage hat wie bei einfach unterstützten Rändern ohne Verankerung.

Bei gleichmäßig verteilter Belastung betrachte man die symmetrische „Wippe“  $abc$  in der Fig. 16. In  $h$  wirken  $2m' \cot \alpha' = 2m' \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$  abwärts, in  $d$   $2m \cdot \cot \alpha$  aufwärts und im Schwerpunkt  $t$  von  $abc$   $\frac{1}{2} p : ab : cs$  abwärts. Das Moment um  $t$  ergibt

$$2m' \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \cdot ht = 2m \cot \alpha \cdot td,$$

da  $td = \frac{1}{3} cs - sd = as \left[ \frac{1}{3} \cot \left( \alpha - \frac{1}{2} \omega \right) - \operatorname{tg} \alpha \right],$  und  
 $ht = hs + \frac{1}{3} cs = as \left[ \cot \frac{1}{2} \omega + \frac{1}{3} \cot \left( \alpha - \frac{1}{2} \omega \right) \right],$  ergibt sich  
 $m' \operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega \cdot \left[ \cot \frac{1}{2} \omega + \frac{1}{3} \cot \left( \alpha - \frac{1}{2} \omega \right) \right] = m \cot \alpha \left[ \frac{1}{3} \cot \left( \alpha - \frac{1}{2} \omega \right) - \operatorname{tg} \alpha \right],$   
 oder

$$3(m + m') \operatorname{tg} \left( \alpha - \frac{1}{2} \omega \right) = m \cot \alpha - m' \operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega,$$

woraus

$$\cot \alpha = \left[ \sqrt{\left(1 + \frac{m'}{m}\right) \left(4 + \frac{m'}{m} + 3 \cot^2 \frac{\omega}{2}\right)} - 2 - \frac{m'}{m} \right] \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \quad (7a)$$

Aus der Projektionsgleichung  $\frac{1}{2} p \cdot ab \cdot cs + 2 m' \operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega = 2 m \cot \alpha$  ergibt sich mit diesem Wert von  $\cot \alpha$

$$hs = \sqrt{\frac{2m}{3p}} \left[ \sqrt{4 + \frac{m'}{m} + 3 \cot^2 \frac{\omega}{2}} - 2 \sqrt{1 + \frac{m'}{m}} \right]. \quad (7b)$$

Schließlich gibt das Moment um  $ab$  sofort

$$cs = \sqrt{\frac{6(m + m')}{p}}. \quad (7c)$$

Wenn  $ab$  in  $h$  verschwindet (vergl. Fig. 12 a), wird  $hs = 0$ , dies ergibt:

$$\frac{m'}{m} = \cot^2 \frac{\omega}{2} \quad (7d)$$

Für  $m' = 0$  erhält man die nicht verankerte „Wippe“, oder was in diesem Zusammenhang das gleiche bleibt, die verankerte „Wippe“ ohne obere Bewehrung in der Ecke. In der verankerten „Wippe“ mit oberer Bewehrung soll diese Bewehrung natürlich durch die Bruchlinie  $ab$  geführt werden, die

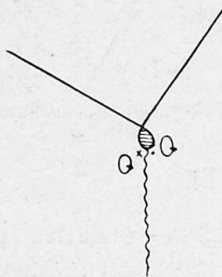


Fig. 17.

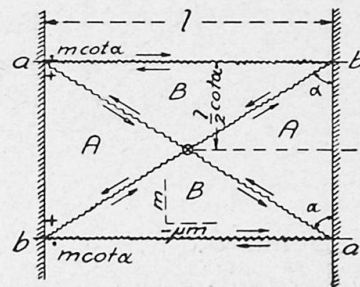


Fig. 18.

$m' = 0$  entspricht, da diese Bruchlinie sonst entsteht. Die Formeln für die eingespannte „Wippe“ sind aus den Formeln der nicht verankerten „Wippe“ herzuleiten, dadurch, daß man darin  $m$  durch  $m + m'$  ersetzt.

Da die „Wippen“ in den meisten Fällen nahezu symmetrisch sind, lassen sich Gl. (7) als Näherungsformeln verwenden. Man berechnet dann zunächst  $m$  durch die Bruchfigur entsprechend der Fig. 12 a, und mittels dieses vorläufigen Wertes wird dann die „Wippe“ bestimmt. Aus der neuen Bruchfigur kann man nunmehr für  $m$  einen verbesserten Wert finden, z. B. durch Anwendung der Arbeitsgleichung.

In einer einspringenden Ecke kann (Fig. 17) eine Bruchlinie nur dann enden, wenn eine entsprechende Kraft auf die Platte in der Ecke wirkt. Existiert diese Kraft nicht, oder kann keine Reaktion vom Auflager ausgehen, muß man annehmen, daß ein kleiner Teil der Platte nahe der Ecke zerstört wird, wodurch der Knick des Randes aufgehoben wird. Der Randwinkel und somit die Knotenkraft werden unbestimmt; da aber die Bruchlinie durch die Ecke geht, erhält man dadurch eine besondere Bedingung für die Bruchfigur, welche diese Unbestimmtheit aufhebt.



### E. Beispiele.

#### 1. Freigestützter Plattenstreifen mit Einzelkraft in der Mitte.

Die Platte wird an der Unterseite rechtwinklig zu den Auflagern und an der Oberseite parallel zu denselben bewehrt. Letztere Bewehrung ist  $\mu$  mal so groß wie die erstere. Die Bruchfigur wird in Fig. 18 dargestellt.

Die Kraft  $P$  verteilt sich als  $P_A$  auf  $A$  und  $P_B$  auf  $B$ . Die Knotenkräfte werden laut (5r)  $Q_R = m \cot \alpha$ . Die Projektionsgleichung für  $B$  ergibt  $P_B = 2m \cot \alpha$  und das Moment um  $ab'$  ergibt  $P_B \cdot \frac{l}{2} \cot \alpha = \mu ml$ , also  $\cot \alpha = \sqrt{\mu}$ . Das Moment um  $ab$  für  $A$  ergibt  $P_A \cdot \frac{l}{2} = ml \cdot \cot \alpha$ , d. h.  $P_A = P_B = 2m \cot \alpha = 2m \sqrt{\mu}$ , und mit  $P = 2P_A + 2P_B = 8m \sqrt{\mu}$ , ergibt sich  $m = P : 8 \sqrt{\mu}$ .

Diesem entspricht eine Nutzbreite von  $2l \sqrt{\mu}$ .

Unter Anwendung der Arbeitsgleichung läßt sich die Aufgabe folgendermaßen lösen:  $P$  wird um das Stück  $\delta$  gesenkt. Dadurch drehen sich  $A$  um

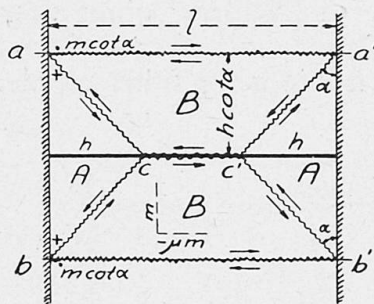


Fig. 19.

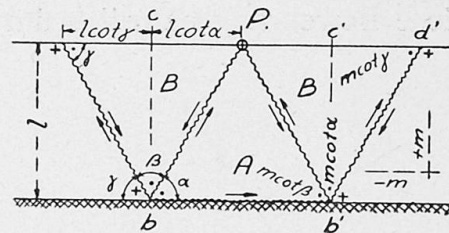


Fig. 20.

$\delta : \frac{1}{2} l$ , und  $B$  um  $\delta : \frac{1}{2} l \cot \alpha$ . Die Resultante der Bruchmomente ist bei  $A$   $ml \cot \alpha$ , bei  $B$   $\mu ml$ , beide in den entsprechenden Drehachsen  $ab$  und  $ab'$  gelegen. Gl. (6) lautet dann:

$$P \cdot \delta = 2 \cdot \frac{2\delta}{l} ml \cot \alpha + 2 \cdot \frac{2\delta}{l} \operatorname{tg} \alpha \cdot \mu ml,$$

dies ergibt:  $m = P : 4 (\cot \alpha + \mu \operatorname{tg} \alpha)$  mit dem Maximum  $P : 8 \sqrt{\mu}$  für  $\cot \alpha = \sqrt{\mu}$ .

#### 2. Derselbe Plattenstreifen mit Linienbelastung.

Die Bruchfigur in Fig. 19 ergibt für  $A$  durch die Momentenbedingung um  $ab$   $\frac{1}{2} \bar{p} h^2 = 2mh \cot \alpha$ . Für  $B$  erhält man durch Momente um  $aa'$   $\frac{1}{2} \bar{p} (l - 2h) h \cot \alpha = \mu ml$ , und durch die Projektionsgleichung  $\frac{1}{2} \bar{p} (l - 2h) = 2m \cot \alpha$ . Aus diesen Gleichungen findet man  $h = \frac{1}{3} l$ ,  $\cot \alpha = \sqrt{\frac{3}{2} \mu}$ ,  $m = pl : 6 \sqrt{6 \mu}$ , entsprechend der Nutzbreite  $1,84 l \sqrt{\mu}$ .

#### 3. Eingespannter Plattenstreifen mit Einzelkraft auf dem freien Rand.

Die Platte wird an der Unterseite parallel zur Einspannung und an der Oberseite rechtwinklig zur Einspannung bewehrt. Die beiden Bewehrungen sind gleich stark.



Die Bruchfigur wird wie in Fig. 20 dargestellt.  $P$  verteilt sich auf  $A$  und  $B$  als  $P_A$  bzw.  $P_B$ . Die Knotenkräfte sind in der Fig. angegeben. Stellt man die Momente um  $bb'$  für  $A$  auf, erhält man keinen Beitrag vom Bruchmoment der positiven Bruchlinie. Man erhält  $P_A \cdot l = m \cdot 2l \cot \alpha$ , also  $P_A = 2m \cot \alpha$ . Wird das Moment um die freie Kante für  $B$  aufgestellt, erhält man entsprechend  $m \cot \alpha \cdot l = m \cdot l \cot \gamma$ , indem das Bruchmoment der positiven Bruchlinie keinen Beitrag leistet. Wird das Moment um  $bc$  (für  $B$ ) genommen, gibt das negative Bruchmoment keinen Beitrag, und man erhält

$$P_B \cdot l \cot \alpha + m \cot \gamma \cdot l \cot \gamma = ml.$$

Die Projektionsgleichung für  $B$  gibt  $P_B = m \cot \alpha + m \cot \gamma$ . Man erhält daraus  $\cot \alpha = \sqrt{1/3}$ ,  $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$ .  $m = P : 2\sqrt{3}$ , entsprechend der Nutzbreite  $3,5 l$ .

4. Rechteckige Platte, an drei Seiten freigestützt, an der vierten Seite frei, mit gleichmäßig verteilter Belastung  $p$  und Linienbelastung  $\bar{p}$  auf dem freien Rand.

Die Bruchfigur in Fig. 21 ergibt durch Moment um  $cd$  für  $A$

$$ma = \frac{p}{6} \cdot a \cdot a^2 \cot^2 \alpha + \frac{\bar{p}}{2} \cdot a^2 \cdot \cot^2 \alpha + \mu m \cot \alpha \cdot a \cot \alpha,$$

und durch Moment um  $de$  für  $B$

$$2\mu ma \cot \alpha + 2\mu ma \cot \alpha = 2 \cdot \frac{1}{6} p \cdot a \cot \alpha \cdot a^2 + \frac{1}{2} \bar{p} (b - 2a \cot \alpha) a^2 + \bar{p} (b - 2a \cot \alpha) a.$$

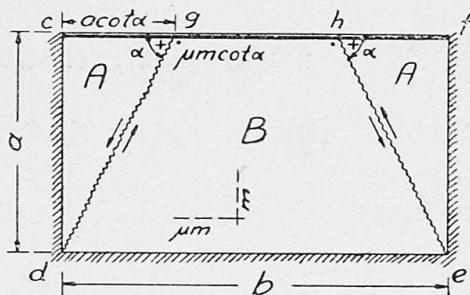


Fig. 21.

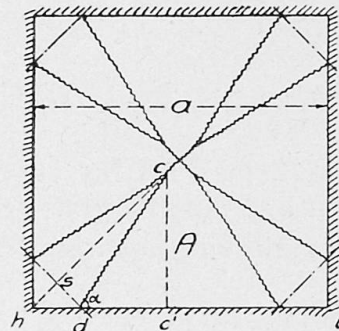


Fig. 22.

Hieraus erhält man

$$m = \frac{pa^2}{6} \left( 1 + 3 \frac{\bar{p}}{pa} \right) \frac{\cot^2 \alpha}{1 - \mu \cot^2 \alpha} = \frac{pa^2}{6\mu} \left[ \frac{3}{4} \frac{b}{a} \left( 1 + 2 \frac{\bar{p}}{pa} \right) \cdot \operatorname{tg} \alpha - 1 - 3 \frac{\bar{p}}{pa} \right],$$

dies ergibt

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\mu + K^2} + K,$$

$$m = \frac{pab + 2\bar{p}b}{8(\sqrt{\mu + K^2} + K)},$$

wo

$$K = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{pa + 3\bar{p}}{pa + 2\bar{p}}.$$

Die Formeln gelten nur, wenn  $a \cot \alpha \leq \frac{b}{2}$ . Ist das nicht der Fall, erhält man ein Stück Bruchlinie von der Mitte der freien Kante parallel zu  $cd$

und vom Endpunkt dieses Stücks Bruchlinien zu den Ecken  $d$  und  $e$ . Wenn  $\bar{p} = 0$ , werden die Gleichungen in diesem Falle dieselben wie für die rechteckige Platte mit den Seiten  $2a$  und  $b$ , die auf allen vier Seiten frei gestützt sind.

5. Rechteckige Platte mit gleichmäßig verteilter Belastung, ringsum frei gestützt oder eingespannt.

Man sieht sofort, daß die Gleichungen in diesen Fällen dieselben werden wie die von INGERSLEV<sup>1)</sup>. Diese setzen laut (7 d) voraus, daß in den Ecken eine obere Bewehrung gleich der unteren Bewehrung vorhanden ist, was in der Praxis nicht immer der Fall ist. Es mag daher nützlich sein, den Einfluß der oberen Bewehrung auf die Tragfähigkeit zu untersuchen, z. B. bei einer frei gestützten quadratischen Platte (Fig. 22). Hat dieselbe eine obere Bewehrung entsprechend  $m' = \frac{1}{2} m$ , ergibt sich aus (7 a)  $\cot \alpha = 0,854$ , und mit  $m = pa^2:24$  ergibt sich  $hs = 0,048 a$ ,  $hd = 0,068 a$ ,  $cs = 0,612 a$ ,  $ch = 0,660 a$  und  $cc' = 0,466 a$ . Das Moment um  $hi$  für  $A$  ergibt dann

$$m(1 - 2 \cdot 0,068) a = \frac{1}{6} pa \cdot \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{1}{6} p \cdot 0,068 a \cdot 0,466^2 a^2,$$

woraus  $m = pa^2:23,5$ .

Mit  $m' = 0$  erhält man  $\cot \alpha = 0,646$ ,  $hs = 0,108 a$ ,  $hd = 0,153 a$ ,  $cs = 0,5 a$ ,  $ch = 0,680 a$  und  $cc' = 0,43 a$ . Die Momentengleichung für  $A$  ergibt dann

$$m(1 - 2 \cdot 0,153) a = \frac{1}{6} pa \cdot \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{1}{6} p \cdot 0,153 a \cdot 0,43^2 \cdot a^2,$$

oder  $m = pa^2:21,5$ . Wird mit diesem Wert umgerechnet, erhält man  $m = pa^2:22$ .

Aus dem Wert für  $hd$  ersieht man, daß die Bewehrung zweckmäßig im Abstand  $a:6$  aufgebogen werden kann.

Für die eingespannte Platte erhält man  $m + m' = pa^2:22$ .

6. Ringsum frei gestützte oder eingespannte, gleichbewehrte Platte mit Einzelkraft.

Man konstruiert zunächst die „Wippen“ (Fig. 23) und findet dann durch die Arbeitsgleichung, indem  $P$  um  $\delta$  gesenkt wird

$$P \cdot \delta = \sum (m + m') s \cdot \frac{\delta}{h}.$$

Für die frei gestützte Platte erhält man

$$P = m \sum \frac{s}{h}.$$

Für die eingespannte Platte erhält man

$$P = (m + m') \sum \frac{s}{h}$$

<sup>1)</sup> The Strength of rectangular slabs. — The Institution of Structural Engineers' Journal, Jan. 1923.



Ist die Platte frei gestützt mit verankerten Ecken, werden die „Wippen“ nach Fig. 15 konstruiert, und man erhält

$$P = m \sum \frac{s}{h} + (m + m') \sum \frac{s}{h},$$

wo die erste Summe der Beitrag der Kantenteile, die letzte die der „Wippen“ ist.

Durch diese Formeln erhält man z. B. für eine frei gestützte quadratische Platte mit Einzelkraft in der Mitte und oberer Bewehrung in den Ecken entsprechend

$$\begin{array}{rcccl} m' : m = & 0 & 0,5 & 1 \\ m = P : & 6,6 & 7,7 & 8. \end{array}$$

Bei gekrümmter Randlinie (Fig. 24) erhält man für die frei gestützte Platte

$$P = m \int_a^b \frac{ds}{h} + m \int_c^d \frac{ds}{h} + m \sum \frac{s}{h}.$$

In diesem Falle kann man ohne Aufstellung von neuen Voraussetzungen die Verteilung der Auflagerkräfte bestimmen, indem von einem jeden Punkt

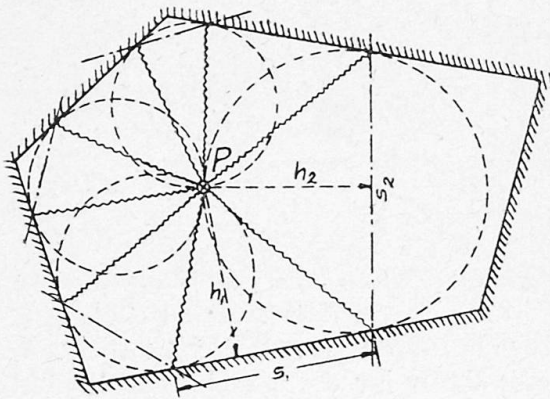


Fig. 23.

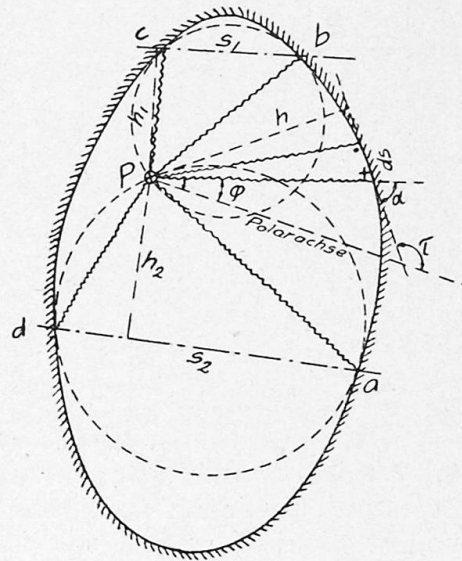


Fig. 24.

des Randes eine Bruchlinie nach  $P$  führen muß. Das in der Figur dargestellte kleine Dreieck trägt  $dP$  von  $P$ , und die Projektionsgleichung wird dann für eine frei gestützte Platte

$$q \cdot ds = dP + Q_R - (Q_R + dQ_R) = dP - dQ_R.$$

Die Momentengleichung um die Tangente ergibt

$$m \cdot ds = h \cdot dP.$$

Mit  $Q_R = m \cot \alpha$  erhält man dadurch

$$p = \frac{dP}{ds} - \frac{dQ_R}{ds} = \frac{m}{h} - \frac{dm \cot \alpha}{ds} = m \cdot \left( \frac{1}{h} + \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha ds} \right).$$



Der Winkel der Tangente mit der Polarachse ist  $\tau$ , und  $\pi - \alpha = \tau - \varphi$ , also

$$-\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\tau}{ds} - \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi \cdot \sin \alpha}{rd\varphi} = \frac{1}{\rho} - \frac{\sin^2 \alpha}{h}$$

wo  $\rho$  der Krümmungsradius ist, positiv gegen  $P$  gerechnet. Wird dies eingesetzt, erhält man

$$q = \frac{2m}{h} - \frac{m}{\rho \sin^2 \alpha}.$$

Für eine eingespannte Platte ergibt sich  $m + m'$  statt  $m$ . Eine kreisförmige Platte mit Radius  $r$  und mit einer Einzelkraft im Abstände  $a$  vom Zentrum belastet, erhält bei freier Auflagerung oder Einspannung

$$m \text{ oder } m + m' = \frac{P}{2\pi} \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2}}.$$

### 7. Decke mit Treppenöffnung.

Belastung: 600 kg/m<sup>2</sup>, die dargestellte Wand 200 kg/m und von der Treppe 400 kg/m am kurzen Rand der Öffnung.

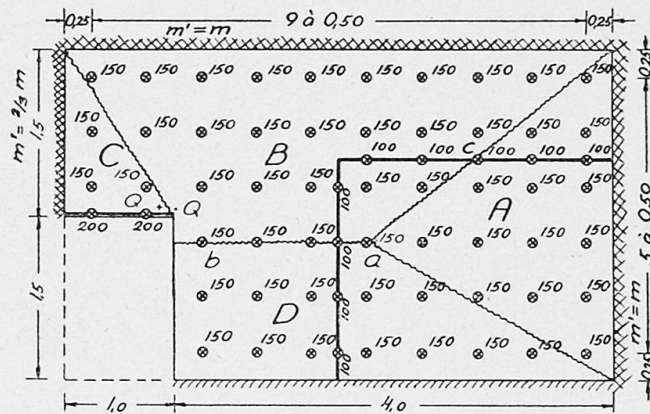


Fig. 25.

Bei praktischen Berechnungen vermag man nur ausnahmsweise die Gleichgewichtsgleichungen zu lösen. Man schätzt daher eine Bruchfigur und bestimmt für jeden Plattenteil das Bruchmoment  $m$ . Weichen diese Werte von  $m$  nicht allzu viel voneinander ab, dann ist die geschätzte Bruchfigur nicht viel von derjenigen verschieden, welche  $m$  zum Maximum macht, wenn  $m$  durch die Arbeitsgleichung bestimmt wird. Ist das Gegenteil aber der Fall, kann man aus den Abweichungen leicht ersehen, wie die geschätzte Bruchfigur abgeändert werden muß zwecks besserer Übereinstimmung unter den Werten der einzelnen Plattenteile für  $m$ . Wenn Übereinstimmung einigermaßen erzielt ist, wird  $m$  mittels der Arbeitsgleichung bestimmt. Weil gleichmäßig verteilte Belastungen sich nicht so bequem behandeln lassen, werden dieselben durch ein passendes System von Einzelkräften ersetzt.

In dem vorliegenden Falle wird die Platte in Quadrate aufgeteilt, mit der Seitenlänge 0,5 m und der Linienbelastung in Strecken von 0,5 m. In den Schwerpunkten dieser Teile wirken die gezeigten Kräfte (Fig. 25). Weil „starke“ Teile der Platte (z. B. Einspannungen und schwach belastete Teile) die Bruchlinien „abstoßen“, und „schwache“ Teile (z. B. Löcher und stark

belastete Teile) die Bruchlinien „anziehen“, erhält die Bruchfigur das dargestellte Aussehen. Die Kräfte an den Bruchlinien werden schätzungsweise auf die Plattenteile nach den Flächen innerhalb der kleinen Quadrate verteilt. Die Kraft in  $a$  wird z. B. mit 30 kg für  $A$  und 60 kg für  $B$  und  $D$  verteilt. Die anderen Kräfte in  $ab$  und die Kraft in  $c$  werden hälftig nach jeder Seite verteilt. In der Ecke wirkt die unbekannte Knotenkraft  $Q$ . Die Momentengleichungen um die Kanten werden für

$$A: (m+m) \cdot 3,0 = (6 \cdot 150 + 100) 0,25 + (4 \cdot 150 + 100) 0,75 + (3 \cdot 150 + 50) \cdot 1,25 \\ + 150 \cdot 1,75 + 30 \cdot 2,25 = 1730 \text{ kg. } m = 289 \text{ kg.}$$

$$B: (m+m) \cdot 5,0 = 9 \cdot 150 \cdot 0,25 + 7 \cdot 150 \cdot 0,75 + (2 \cdot 100 + 50) \cdot 1,0 + (5 \cdot 150 + 100) \cdot 1,25 \\ + (3 \cdot 75 + 50 + 60) \cdot 1,75 - Q \cdot 1,5 = 3023 - 1,5 \cdot Q.$$

$$C: (m + \frac{2}{3}m) \cdot 1,5 = (2 \cdot 150 + 200) 0,25 + (150 + 200) 0,75 + Q \cdot 1,0 = 388 + Q.$$

$$D: m \cdot 4,0 = (7 \cdot 150 + 100) 0,25 + (5 \cdot 150 + 100) 0,75 + (3 \cdot 75 + 50 + 60) \cdot 1,25 = 1343. \\ m = 336 \text{ kg.}$$

Aus den Gleichungen für  $B$  und  $C$  ergibt sich  $m = 262$  kg.

Die drei Werte für  $m$  zeigen, daß die Bruchfigur zur Bestimmung von  $m$  mit der Arbeitsgleichung brauchbar ist. Wird  $ab$  um 1 gesenkt, dann wird  $Q$  um 1,50:1,75 gesenkt, und die Drehungen werden  $\theta_A = 1:2,25$ ,  $\theta_B = 1:1,75$ ,  $\theta_C = 1,50:1,75$ , und  $\theta_D = 1:1,25$ . Werden die aufgeschriebenen Momentengleichungen mit den Drehungen multipliziert, erhält man gerade die Beiträge zur Arbeitsgleichung. Man erhält

$$\frac{6m}{2,25} + \frac{10m}{1,75} + \frac{2,5m}{1,75} \cdot 1,5 + \frac{4m}{1,25} = \frac{1730}{2,25} + \frac{3023}{1,75} + \frac{388}{1,75} \cdot 1,5 + \frac{1343}{1,25},$$

oder

$$m = 285 \text{ kg.}$$

Die angegebene Theorie steht mit den Versuchen in schöner Übereinstimmung, aber dieser Nachweis sowie die Bestimmung der Verteilung der Auflagerkräfte sind einer späteren Arbeit vorbehalten.

### Zusammenfassung.

Es wird vorausgesetzt, daß eine kreuzweise bewehrte Platte längs gewisser Linien, den Bruchlinien, infolge des Fließens der Bewehrung bricht. Durch Vernachlässigung der elastischen gegenüber den plastischen Formänderungen ergeben sich gerade Bruchlinien, die nach den Vorzeichen ihrer Momente bezeichnet werden. Die möglichen Verbindungen dreier Bruchlinien sind in Fig. 4 dargestellt.

Das Biegemoment längs einer Bruchlinie kann als konstant betrachtet werden und sein Betrag pro Längeneinheit, das Bruchmoment  $m$ , zugleich als Maximalwert für alle in der Nähe der Bruchlinie liegenden Schnitte. Die in der Bruchlinie außer dem Biegemoment wirkenden Drehmomente und Querkräfte lassen sich durch Einzelkräfte in den Knoten der Bruchfigur darstellen. Diese Knotenkräfte, deren Summe immer Null ist, werden durch die Maximalbedingungen des Bruchmomentes bestimmt; das Ergebnis ist in Fig. 8 angegeben. Haben die Bruchlinien das gleiche Vorzeichen, also  $m' = m$ , so werden die Knotenkräfte gleich Null.



Die Platte wird durch die Bruchlinien in mehrere Plattenteile zerlegt. Wenn die Knotenkräfte bestimmt sind, können die Gleichgewichtsbestimmungen der einzelnen Plattenteile angeschrieben werden, und hieraus ergeben sich Bruchfigur und Bruchmoment. Es wird gezeigt, daß diese Aufgabe immer eine Lösung besitzt, die für die praktische Berechnung bequeme Arbeitsgleichung wird ebenfalls aufgeführt.

Die Untersuchung ergibt das bekannte Abheben der Ecken durch Bildung der „Wippe“  $C$  (Fig. 12b). Werden die Ecken im Auflager verankert, so bildet sich die negative Bruchlinie  $ab$  aus (Fig. 12c), woraus der Einfluß der oberen Bewehrung der Ecken hervorgeht. Es werden geometrische Konstruktionen und Formeln der „Wippen“ angegeben.

Aus den Beispielen können folgende Ergebnisse hervorgehoben werden: Ein einfach gestützter Plattenstreifen mit Einzelkraft in der Mitte (Fig. 18), in der Unterseite rechtwinklig zu den Auflagern und in der Oberseite parallel zu denselben bewehrt (letztere Bewehrung ist  $\mu$  mal so groß wie die erstere), hat eine Nutzbreite von  $2\sqrt{\mu}$  mal der Spannweite. Für einen eingespannten Plattenstreifen mit Einzelkraft auf der Kante (Fig. 20) und bewehrt wie oben ( $\mu = 1$ ), wird die Nutzbreite 3,5 mal der Spannweite. Eine einfach gestützte quadratische Platte mit gleichmäßig verteilter Belastung und mit einer oberen Eckbewehrung von gleicher Stärke wie die der Unterseite hat ein Bruchmoment  $pa^2: 24$ , mit der halben Eckbewehrung  $pa^2: 23,5$  und ohne Eckbewehrung  $pa^2: 22$ . Für eine Einzelkraft in der Mitte bekommt man entsprechend  $P: 8$ ,  $P: 7,7$  und  $P: 6,6$ .

### Résumé.

On suppose qu'une plaque avec armature croisée, se rompt suivant certaines lignes dites lignes de fracture, par suite de l'allongement (écoulement) de l'armature. En négligeant les déformations élastiques par rapport aux déformations plastiques, on obtient comme ligne de rupture des droites qui sont classées d'après le signe de leur moment. Les relations possibles entre trois lignes de rupture sont représentées sur la figure 4. Le moment de flexion le long d'une ligne de rupture peut-être considéré comme constant et sa valeur par unité de longueur, le moment de rupture  $m$ , peut-être considérée comme valeur maxima pour toutes les sections situées dans le voisinage des lignes de rupture. Les moments de torsion qui, en dehors des moments de flexion, agissent le long des lignes de rupture, ainsi que les forces transversales, sont représentés par des forces agissant aux points d'intersection des lignes de rupture. Ces forces, dont la somme est toujours nulle, sont déterminées par les conditions maxima du moment de rupture; le résultat est représenté dans la figure 8. Si les lignes de rupture ont le même signe, c'est-à-dire si  $m = m'$ , les forces appliquées aux points d'intersection sont nulles.

La plaque est divisée par les lignes de rupture en plusieurs sections. Si les forces appliquées aux points d'intersection sont déterminées, les conditions d'équilibre pour les différentes sections de plaque peuvent être représentées par des équations, et l'on en déduit les diagrammes et les moments de rupture. Il est démontré que ce problème comporte toujours une solution. Les conditions d'égalité de travail, dont on peut se servir pour les calculs pratiques, sont également traitées.

Les recherches conduisent au phénomène bien connu du soulèvement des angles avec formation d'une „bascule“  $C$  (fig. 12 b). Si les angles de la plaque sont encastrés, on obtient la ligne de rupture négative  $ab$  (fig. 12 c) d'où ressort l'influence de l'armature supérieure des angles. Le mémoire donne les formules et les constructions géométriques de la soi-disant „bascule“.

Des exemples donnés, on peut déduire les résultats suivants: Soit une plaque de grande longueur reposant librement sur des appuis, sur le milieu de laquelle agit une force (fig. 18), et armée à sa partie inférieure perpendiculairement à la ligne des appuis et sur sa face supérieure parallèlement à cette ligne (cette dernière armature étant  $\mu$  fois plus forte que la première). On trouve, que sa largeur utile est égale à  $2\sqrt{\mu}$  fois sa longueur entre appuis. Dans le cas d'une plaque encastrée (fig. 20) soumise sur son arête à une force unique et armée de la même manière que précédemment ( $\mu = 1$ ), la largeur utile sera 3,5 fois la longueur entre appuis. Une plaque carrée reposant librement sur ses appuis, soumise à une charge répartie uniformément et dont l'armature des angles est la même sur les faces supérieure et inférieure aura un moment de rupture  $pa^2: 24$ ; si l'armature inférieure n'est que la moitié de l'armature supérieure, on aura  $pa^2: 23,5$ ; sans aucune armature des arêtes,  $pa^2: 22$ . Si la force est appliquée au milieu de la plaque, on aura respectivement pour les trois cas  $P: 8$ ,  $P: 7,7$  et  $P: 6,6$ .

### Summary.

It is presumed that a cross-reinforced slab breaks along certain lines, the lines of fracture, in consequence of yielding of the reinforcement. By neglecting the elastic deformations in comparison to the plastic deformations, straight lines of fracture are obtained having the same signs as the moments causing them. The possible relations of three lines of fracture are shown in fig. 4.

The bending moment along a line of fracture may be considered as constant and its amount per unit length, the moment of fracture  $m$ , at the same time as a maximum value for all sections in the neighbourhood of the line of fracture. The twisting moments and transverse forces acting in the line of fracture in addition to the bending moment, may be represented by single forces at the point where the lines of fracture meet. The forces at that point, whose sum is always zero, are determined by the maximum conditions of the moment of fracture; the result is given in fig. 8. If the lines of fracture have the same sign, i. e.  $m' = m$ , the forces at the point where they meet will equal zero.

The plate will be divided into several parts by the lines of fracture. If the forces at the point where these lines meet are determined, the conditions for equilibrium of the separate parts of the plate can be written down, and from this the fracture figure and moment are obtained. It is shown that the problem always has a solution; the convenient equation of energy for practical calculations is also given.

The investigation shows the known rising of the corners by formation of the "see-saw"  $C$  (fig. 12 b). If the corners are anchored down, the negative line of fracture  $ab$  occurs (fig. 12 c), from which the influence of the upper reinforcement of the corners is shown. Geometric constructions and formulae for the "see-saws" are given.



Of the examples, the following results may be particularly noted: A simply supported strip of plate with a single force at the middle (fig. 18), reinforced on the lower side at rightangles to the supports and on the upper side parallel to them (the latter reinforcement being  $\mu$  times as great as the former), has an effective width of  $2\sqrt{\mu}$  times the span width. For a firmly held strip of plate with a single force at the edge of the opposite side (fig. 20) and reinforced as above ( $\mu = 1$ ), the effective width becomes 3.5 times the span width. A simply supported square plate with uniformly distributed load, and with the upper reinforcement of the corners equally as strong as the lower reinforcement, has the moment at fracture  $pa^2: 24$ , with half upper reinforcement of the corner  $pa^2: 23.5$ , and without upper corner reinforcement  $pa^2: 22$ . For a single force in the middle, the corresponding values  $P: 8$ ,  $P: 7.7$  and  $P: 6.6$  are obtained.