Représentation conforme et la méthode du facteur intégrant

Autor(en): **Rogueff, B. / Dimoff, L.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **66 (1968)**

Heft 4

PDF erstellt am: **19.03.2021**

Persistenter Link: http://doi.org/10.5169/seals-222293

DK 517.54:528.235.1

Représentation conforme et la méthode du facteur intégrant

B. Rogueff et L. Dimoff

Résumé

On montre l'application de la théorie du facteur intégrant bien connue en analyse mathématique – dans les problèmes de projection conforme dans la cartographie.

Les auteurs étudient la représentation conforme d'une surface gauche (surface non développable) sur une surface développable et sur le plan et en particulier la représentation conforme sur une surface de révolution et le plan. Ils continuent avec la représentation conforme de l'ellipsoïde terrestre sur un plan et aboutissent avec la projection classique de Gauss.

Zusammenfassung

Die Integration einer Differentialgleichung mit zwei Veränderlichen hat Euler durch die Theorie des integrierenden Faktors verallgemeinert. Sie wurde später von Jakobi für Systeme von Differentialgleichungen erweitert.

Die Theorie des integrierenden Faktors findet in der mathematischen Analyse der konformen Abbildungen Anwendung.

Die Verfasser wenden die Theorie für die mathematische Kartographie an, indem sie eine konforme Abbildung einer unabwickelbaren Fläche auf eine abwickelbare Fläche betrachten. Sie schließen nach derselben Methode auf zylindrische, kegelförmige und andere Abbildungen des Erdellipsoids und wenden sie zuletzt auf die Gaußsche Projektion an.

1. Représentation conforme

La méthode d'intégration d'une équation différentielle à deux variables séparées a été généralisée par Euler avec sa théorie du facteur intégrant et puis elle a été développée par Jacobi aux équations différentielles simultanées.

Cette théorie trouve une application très importante dans les problèmes de représentation conforme de la cartographie.

Soit (S) une surface analytique, définie paramétriquement par les équations

$$x = x\,(u, v) \qquad y = y\,(u, v) \qquad z = z\,(u, v) \tag{1}$$

où les paramètres u et v sont des coordonnées curvilignes et que nous écrivons sous la forme d'une seule équation vectorielle

$$M = M\,(u, v). \tag{2}$$

La différentielle

$$dM = \frac{\partial M}{\partial u}\,du + \frac{\partial M}{\partial v}\,dv \tag{3}$$

est l'élément linéaire de (S). Les deux vecteurs

$$\frac{\partial M}{\partial u} \qquad \frac{\partial M}{\partial v} \tag{4}$$

sont tangentiels par rapport aux deux courbes

$$v = \text{const.} \qquad u = \text{const.} \tag{5}$$

de la même surface.

A l'aide de multiplications scalaires on trouve la première forme quadratique

$$d\sigma^2 = dM^2 = E du^2 + 2\, F du\, dv + G dv^2, \tag{6}$$

où

$$\left.\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial M}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \\ F &= \frac{\partial M}{\partial u} \cdot \frac{\partial M}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} \\ G &= \left(\frac{\partial M}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Soit N un vecteur de longueur 1, dirigé suivant la normale en un point M de (S), défini par le produit vectoriel

$$N = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial u} \times \dfrac{\partial M}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} \tag{8}$$

où

$$EG - F^2 = \left(\frac{\partial M}{\partial u} \times \frac{\partial M}{\partial v}\right)^2 \neq 0. \tag{9}$$

Le produit scalaire de (8) par différentielle vectorielle

$$d^2 M = \frac{\partial^2 M}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2 M}{\partial u\, \partial v} du\, dv + \frac{\partial^2 M}{\partial v^2} dv^2 + \frac{\partial M}{\partial u} d^2 u + \frac{\partial M}{\partial v} d^2 v \tag{10}$$

donne la deuxième forme quadratique de (S)

$$d^2 M \cdot N = E' du^2 + 2\, F' du\, dv + G' dv^2 \tag{11}$$

avec

$$\left.\begin{aligned}
E' &= \frac{\left(\dfrac{\partial M}{\partial u}, \dfrac{\partial M}{\partial v}, \dfrac{\partial^2 M}{\partial u^2}\right)}{\sqrt{EG - F^2}} \\
F' &= \frac{\left(\dfrac{\partial M}{\partial u}, \dfrac{\partial M}{\partial v}, \dfrac{\partial^2 M}{\partial u\, \partial v}\right)}{\sqrt{FG - F^2}} \\
G' &= \frac{\left(\dfrac{\partial M}{\partial u}, \dfrac{\partial M}{\partial v}, \dfrac{\partial^2 M}{\partial v^2}\right)}{\sqrt{EG - F^2}}
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

où les nominateurs de la partie droite désignent les déterminants vectoriels.

Soit (S') une seconde surface analytique, définie par les équations paramétriques

$$\xi = \xi\,(\alpha, \beta) \qquad \eta = \eta\,(\alpha, \beta) \qquad z = z\,(\alpha, \beta), \tag{13}$$

que nous mettons encore sous la forme vectorielle par

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\,(\alpha, \beta)\,, \tag{14}$$

où α et β sont les coordonnées curvilignes.

Pour (14) les formes quadratiques fondamentales sont respectivement

$$ds^2 = d\mathfrak{M}^2 = e d\alpha^2 + 2\, f d\alpha\, d\beta + g\, d\beta^2 \tag{15}$$

$$d^2\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{N} = e' d\alpha^2 + 2\, f' d\alpha\, d\beta + g'\, d\beta^2 \tag{16}$$

où par $\mathfrak{N}$ on désigne la normale en un point $\mathfrak{M}$ de (S'), analogique à (8).

Chaque transformation ponctuelle

$$\alpha = \alpha\,(u, v) \qquad \beta = \beta\,(u, v) \tag{17}$$

où

$$\frac{D\,(\alpha, \beta)}{D\,(u, v)} \neq 0 \tag{18}$$

établit une correspondance entre les points des deux surfaces (S) et (S'). Pour qu'elle soit une représentation conforme, il suffit d'avoir entre (6) et (15) une relation de la forme

$$ds^2 = \mu^2\,(u, v)\, d\sigma^2 \tag{19}$$

Dans ce cas la transformation (17) conserve les angles. Quand μ prend la valeur particulière

$$\mu^2\,(u, v) = \left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2 = 1\,, \tag{20}$$

la transformation (17) est isométrique, qui conserve à la fois les angles et les longueurs.

Remplaçons (17) dans (13), respectivement dans (14). On trouve

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\,[\alpha\,(u, v);\ \beta\,(u, v)]\,, \tag{21}$$

d'où

$$d\mathfrak{M} = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial u}\,du + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial v}\,dv \tag{22}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial u} = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \alpha}\,\frac{\partial \alpha}{\partial u} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \beta}\,\frac{\partial \beta}{\partial u} \tag{23}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial v} = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \alpha}\,\frac{\partial \alpha}{\partial v} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \beta}\,\frac{\partial \beta}{\partial v} \tag{24}$$

et par suite

$$ds^2 = d\mathfrak{M}^2 = e_1\,du^2 + 2\,f_1\,du\,dv + g_1\,dv^2 \tag{25}$$

avec

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial u}\right)^2 = e\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)^2 + 2\,f\,\frac{\partial \alpha}{\partial u}\,\frac{\partial \beta}{\partial u} + g\left(\frac{\partial \beta}{\partial u}\right)^2 \\ f_1 &= \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial v} = e\,\frac{\partial \alpha}{\partial u}\,\frac{\partial \beta}{\partial v} + f\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\,\frac{\partial \beta}{\partial v} + \frac{\partial \alpha}{\partial v}\,\frac{\partial \beta}{\partial u}\right) + g\,\frac{\partial \alpha}{\partial v}\,\frac{\partial \beta}{\partial u} \\ g_1 &= \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial v}\right)^2 = e\left(\frac{\partial \alpha}{\partial v}\right)^2 + 2\,f\,\frac{\partial \alpha}{\partial v}\,\frac{\partial \beta}{\partial v} + g\left(\frac{\partial \beta}{\partial v}\right)^2 \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Suivant (3) et (22) pour (S) et (S') on peut écrire

$$\frac{dM}{d\sigma} = \frac{\partial M}{\partial u}\,\frac{du}{d\sigma} + \frac{\partial M}{\partial v}\,\frac{dv}{d\sigma} \qquad \frac{d\mathfrak{M}}{ds} = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial u}\,\frac{du}{ds} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial v}\,\frac{dv}{ds} \tag{27}$$

ou bien

$$\frac{1}{\mu}\,\frac{dM}{d\sigma} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial u}}{\sqrt{E}}\,\frac{\sqrt{E}}{\mu}\,\frac{du}{d\sigma} + \frac{\dfrac{\partial M}{\partial v}}{\sqrt{G}}\,\frac{\sqrt{G}}{\mu}\,\frac{dv}{d\sigma} \qquad \frac{d\mathfrak{M}}{ds} = \frac{\dfrac{\partial \mathfrak{M}}{\partial u}}{\sqrt{e_1}}\,\frac{\sqrt{e_1}}{\mu}\,\frac{du}{d\sigma} + \frac{\dfrac{\partial \mathfrak{M}}{\partial v}}{\sqrt{g_1}}\,\frac{\sqrt{g_1}}{\mu}\,\frac{dv}{d\sigma}\,. \tag{28}$$

Il est à remarquer que les vecteurs

$$\left.\begin{array}{ccc} \dfrac{dM}{d\sigma} & \dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial u}}{\sqrt{E}} & \dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial v}}{\sqrt{G}} \\ \\ \dfrac{d\mathfrak{M}}{ds} & \dfrac{\dfrac{\partial \mathfrak{M}}{\partial u}}{\sqrt{e_1}} & \dfrac{\dfrac{\partial \mathfrak{M}}{\partial v}}{\sqrt{g_1}} \end{array}\right\} \tag{29}$$

sont des vecteurs unitaires.

Supposons

$$\frac{1}{\mu}\frac{du}{d\sigma} = \frac{x'}{\sqrt{E}} \qquad \frac{1}{\mu}\frac{dv}{d\sigma} = \frac{y'}{\sqrt{G}} \tag{30}$$

qu'on remplace dans (28). On en tire

$$\frac{1}{\mu}\frac{dM}{d\sigma} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial u}}{\sqrt{E}}x' + \frac{\dfrac{\partial M}{\partial v}}{\sqrt{G}}y' \qquad \frac{d\mathfrak{M}}{ds} = \frac{\dfrac{\partial \mathfrak{M}}{\partial v}}{\sqrt{e_1}}\sqrt{\frac{e'}{E}}\,x' + \frac{\dfrac{\partial \mathfrak{M}}{\partial v}}{\sqrt{g_1}}\sqrt{\frac{g'}{G}}\,y' \tag{31}$$

et par des multiplications scalaires on trouve les équations

$$1 = \mu^2\left(x'^2 + \frac{2\,F}{\sqrt{EG}}x'y' + y'^2\right) \quad 1 = \frac{e_1}{E}x'^2 + \frac{2\,f_1}{\sqrt{EG}}x'\,y' + \frac{g_1}{\sqrt{G}}y'^2 \tag{32}$$

des indicatrices (cercle et ellipse) de Tissaut.

Mais la transformation (17), respectivement (21), doit être une représentation conforme de (S) sur (S') qui conserve les angles. Dans ce cas l'angle d'intersection de deux courbes quelconques de (S) est égal à l'angle d'intersection des deux courbes correspondantes de (S').

Pour qu'il soit ainsi on doit avoir les deux indicatrices – deux cercles au rayons égaux, ou bien le système des équations

$$\frac{e_1}{E} = \frac{f_1}{F} = \frac{g_1}{G} = \mu^2 \tag{33}$$

équivalent à (19).

En définitive on a au moins deux équations pour déterminer les deux inconnues (17). Le problème aura en général une solution.

2. *Méthode du facteur intégrant*

Au lieu de (S') on considère un plan (π), et au lieu (13) et (15) on écrit

$$\xi = \alpha = X \qquad \eta = \beta = Y \qquad \zeta = 0 \tag{34}$$

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 \tag{35}$$

où

$$e = \left(\frac{d\mathfrak{M}}{dX}\right)^2 = 1 \qquad f = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial X} \cdot \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial Y} = 0 \qquad g = \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial Y}\right)^2 = 1\,. \tag{36}$$

L'élément linéaire (6) peut être représenté sous la forme d'un produit de deux facteurs

$$d\sigma^2 = \left[\sqrt{E}\,du + \frac{F + i\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}}dv\right]\left[\sqrt{E}\,du + \frac{F - i\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}}dv\right] \tag{37}$$

Chacune des expressions

$$\sqrt{E}\,du + \frac{F + i\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}}dv \qquad \sqrt{E}\,du + \frac{F - i\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}}dv \tag{38}$$

admet un nombre illimité de facteurs intégrants, qui sont aussi des fonctions analytiques.

Soit μ_1 et μ_2 deux facteurs. Posons

$$U_1 = X + iY \qquad U_2 = X - iY\,. \tag{39}$$

Suivant (19), (33), (35), (38) on peut écrire les identités

$$dU_1 = dX + i\,dY = \mu_1\left[\sqrt{E}\,du + \frac{F + i\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}}dv\right] \tag{40}$$

$$dU_2 = dX - i\,dY = \mu_2\left[\sqrt{E}\,du + \frac{F - i\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}}dv\right] \tag{41}$$

avec

$$\mu_1\,\mu_2 = \mu^2\,. \tag{42}$$

Or, les membres gauches (40), (41) sont évidemment des différentielles exactes; il en est de même pour les droits, d'où les deux conditions

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial v}\left[\mu_1\sqrt{E}\right] &= \frac{\partial}{\partial u}\left[\mu_1\frac{F+i\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{E}}\right]\\ \frac{\partial}{\partial v}\left[\mu_2\sqrt{E}\right] &= \frac{\partial}{\partial u}\left[\mu_2\frac{F-i\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{E}}\right]\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

d'intégrabilité des équations (40) et (41).

Supposons que μ_1, U_1 et μ_2, U_2 sont connues. On peut obtenir tous les autres facteurs intégrants par relations de la forme,

$$\mu_\kappa' = \mu_\kappa \Phi(U_\kappa)\,, \tag{44}$$

où $\Phi(U_\kappa)$ est une fonction arbitraire de U_κ, respectivement de U_1 et U_2.

3. Surface développable et plan

La forme générale de l'équation d'une surface réglée, rapportée à ses coordonnées curvilignes α et β, est donnée

$$P(\alpha, \beta) = a(\beta) + \alpha b(\beta) \tag{45}$$

avec

$$\left.\begin{matrix} a_1(\beta) & b_1(\beta)\\ a_2(\beta) & b_2(\beta)\\ a_3(\beta) & b_3(\beta)\end{matrix}\right\} \tag{46}$$

composantes de vecteurs $a(\beta)$, $b(\beta)$, fonctions de la seule variable β.

Par rapport à un système de coordonnées rectangulaires $\xi\eta\zeta$ les équations paramétriques de (45) sont

$$\xi = a_1(\beta) + \alpha b_1(\beta) \qquad \eta = a_2(\beta) + \alpha b_2(\beta) \qquad \zeta = a_3(\beta) + \alpha b_3(\beta), \tag{47}$$

et au lieu de (7) et (12) on écrit respectivement

$$\left.\begin{aligned} e &= \left(\frac{\partial P}{\partial \alpha}\right)^2 &&= b^2\\ f &= \frac{\partial P}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial P}{\partial \beta} &&= b\cdot\frac{da}{d\beta} + \alpha\, b\cdot\frac{db}{d\beta}\\ g &= \left(\frac{\partial P}{\partial \beta}\right)^2 &&= \left(\frac{da}{d\beta} + \alpha\frac{db}{d\beta}\right)^2\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

et

$$\left.\begin{aligned}
e' &= \frac{\left(b\,,\ \dfrac{da}{d\beta} + \alpha\,\dfrac{db}{d\beta}\,,\ 0\right)}{\sqrt{b^2\left(\dfrac{da}{d\beta} + \alpha\,\dfrac{db}{d\beta}\right)^2 - \left(b\cdot\dfrac{da}{d\beta} + \alpha\, b\cdot\dfrac{db}{d\beta}\right)^2}} \\[2ex]
f' &= \frac{\left(b\,,\ \dfrac{da}{d\beta} + \alpha\,\dfrac{db}{d\beta}\,,\ \dfrac{db}{d\beta}\right)}{\sqrt{b^2\left(\dfrac{da}{d\beta} + \alpha\,\dfrac{db}{d\beta}\right)^2 - \left(b\cdot\dfrac{da}{d\beta} + \alpha\, b\cdot\dfrac{db}{d\beta}\right)^2}} \\[2ex]
g' &= \frac{\left(b\,,\ \dfrac{da}{d\beta} + \alpha\,\dfrac{db}{d\beta}\,,\ \dfrac{d^2a}{d\beta^2} + \alpha\,\dfrac{d^2b}{d\beta^2}\right)}{\sqrt{b^2\left(\dfrac{da}{d\beta} + \alpha\,\dfrac{db}{d\beta}\right)^2 - \left(b\cdot\dfrac{da}{d\beta} + \alpha\, b\cdot\dfrac{db}{d\beta}\right)^2}}
\end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Il est évident que e' est égal à zéro.

On démontre que la surface (45) est développable si la condition

$$e'g' - f' = 0 \tag{50}$$

est identiquement vérifiée par (49). Or e' est nulle, cette condition devient

$$f' = \frac{\left(b\,,\ \dfrac{da}{d\beta} + \alpha\,\dfrac{db}{d\beta}\,,\ \dfrac{db}{d\beta}\right)}{\sqrt{b^2\left(\dfrac{da}{d\beta} + \alpha\,\dfrac{db}{d\beta}\right)^2 - \left(b\cdot\dfrac{da}{\beta} + \alpha\, b\cdot\dfrac{db}{d\beta}\right)^2}} = 0 \tag{51}$$

ou bien, suivant (46)

$$\left(b\,,\ \frac{da}{d\beta}\,,\ \frac{db}{d\beta}\right) = \begin{vmatrix} b_1 & \dfrac{da_1}{d\beta} & \dfrac{db_1}{d\beta} \\[2ex] b_2 & \dfrac{da_2}{d\beta} & \dfrac{db_2}{d\beta} \\[2ex] b_3 & \dfrac{da_3}{d\beta} & \dfrac{db_3}{d\beta} \end{vmatrix} = 0\,. \tag{52}$$

Désignons par α_1, α_2, α_3 trois scalaires, qui ne sont pas tous nuls et qui sont des fonctions de β; au lieu de (52) on aura la relation

$$\alpha_1\,\frac{da}{d\beta} + \alpha_2\,\frac{db}{d\beta} + \alpha_3\, b = 0 \tag{53}$$

qui montre que les vecteurs $\dfrac{da}{d\beta}$, b, $\dfrac{db}{d\beta}$ sont coplanaires.

Si $a(\beta)$ est constant ($da = 0$), la surface $P(\alpha, \beta)$ est un cône ou bien, en cas particulier, un plan.

Pour $\alpha_1 = 0$ (53) devient

$$\alpha_2 \frac{db}{d\beta} + \alpha_3 b = 0 \tag{54}$$

et les vecteurs b et $\frac{db}{d\beta}$ sont colinéaires.

Quand b est unitaire, il est orthogonal

$$b \cdot \frac{db}{d\beta} = 0 \tag{55}$$

à sa dérivée $\frac{db}{d\beta}$. Dans ce cas de (54) on tire

$$\frac{db}{d\beta} = 0\,. \tag{56}$$

Le vecteur b est alors invariable et la surface développable $P(\alpha, \beta)$ est un cylindre.

Pour $\alpha_1 \neq 0$ et $\alpha_3 = 0$ (53) donne la condition

$$\frac{da}{d\beta} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{db}{d\beta} = \kappa \frac{db}{d\beta} \tag{57}$$

de la colinéairité des vecteurs $\frac{da}{d\beta}$ et $\frac{db}{d\beta}$.

De (56) et de l'égalité scalaire

$$\frac{b \cdot \frac{da}{d\beta}}{\sqrt{b^2\left(\frac{da}{d\beta}\right)^2}} = \frac{\pm\, b \cdot \frac{db}{d\beta}}{\sqrt{b^2\left(\frac{db}{d\beta}\right)^2}} \tag{58}$$

on peut conclure que les lignes $\alpha = \text{const.}$ sont parallèles à la ligne

$$P(0\,, \beta) = a(\beta) \tag{59}$$

Mettons (57) dans (48) on trouve

$$\left.\begin{aligned} e &= \left(\frac{\partial P}{d\alpha}\right)^2 &&= b^2 \\ f &= \frac{\partial P}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial P}{\partial\beta} &&= (\kappa+\alpha)\left(b\cdot\frac{db}{d\beta}\right) \\ g &= \left(\frac{\partial P}{\partial\beta}\right)^2 &&= (\kappa+\alpha)^2\left(\frac{db}{d\beta}\right)^2 \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

et les expressions (15), (40), (41) sont remplacées par

$$ds^2 = b^2 d\alpha^2 + 2\left(b\cdot\frac{db}{d\beta}\right)(\kappa+\alpha)\,d\alpha\,d\beta + (\kappa+\alpha)^2\left(\frac{db}{d\beta}\right)^2 d\beta^2 \tag{61}$$

$$dU_1 = dX + i\,dY = \mu_1'\left\{\sqrt{b^2}\,d\alpha + \left[\left(b\cdot\frac{db}{d\beta}\right) + i\sqrt{b^2\left(\frac{db}{d\beta}\right)^2 - \left(b\cdot\frac{db}{d\beta}\right)^2}\,\right]\frac{\kappa+\alpha}{\sqrt{b^2}}\,d\beta\right\} \tag{62}$$

$$dU_2 = dX - i\,dY = \mu_2'\left\{\sqrt{b^2}\,d\alpha + \left[\left(b\cdot\frac{db}{d\beta}\right) - i\sqrt{b^2\left(\frac{db}{d\beta}\right)^2 - \left(b\cdot\frac{db}{d\beta}\right)^2}\,\right]\frac{\kappa+\alpha}{\sqrt{b^2}}\,d\beta\right\} \tag{63}$$

avec

$$\mu_1'\cdot\mu_2' = \mu'^2 = 1\,. \tag{64}$$

Les équations différentielles (62) et (63) admettent les facteurs intégrants

$$\mu_1 = e^{i\theta} \qquad \mu_2 = e^{-i\theta} \tag{65}$$

avec

$$\theta = \int\sqrt{b^2\left(\frac{db}{d\beta}\right)^2 - \left(b\cdot\frac{db}{d\beta}\right)^2}\;\frac{d\beta}{b^2} \tag{66}$$

et

$$\frac{\partial U_1}{\partial\alpha} = \sqrt{b^2}\,e^{i\theta} \quad \frac{\partial U_1}{\partial\beta} = \left[\left(b\cdot\frac{db}{d\beta}\right) + i\sqrt{b^2\left(\frac{db}{d\beta}\right)^2 - \left(b\cdot\frac{db}{d\beta}\right)^2}\,\right]\frac{\kappa+\alpha}{\sqrt{b^2}}\,e^{i\theta}, \tag{67}$$

d'où

$$U_1 = \int\sqrt{b^2}\,e^{i\theta}\,d\alpha \qquad + \gamma(\beta) = \sqrt{b^2}\,e^{i\theta}\alpha \qquad + \gamma(\beta)\,. \tag{68}$$

De l'équation (68) et de la seconde égalité (67) on déduit

$$\frac{d\gamma}{d\beta} = \left[\left(b \cdot \frac{db}{d\beta}\right) + i \sqrt{b^2 \left(\frac{db}{d\beta}\right)^2 - \left(b \cdot \frac{db}{d\beta}\right)^2}\right] \frac{\kappa}{\sqrt{b^2}} e^{i\theta} \tag{69}$$

et puis l'intégrale

$$U_1 = \sqrt{b^2}\, e^{i\theta} \alpha + \int \kappa \left[\left(b \cdot \frac{db}{d\beta}\right) + i \sqrt{b^2 \left(\frac{db}{d\beta}\right)^2 - \left(b \cdot \frac{db}{d\beta}\right)^2}\right] \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{b^2}}\, d\beta \tag{70}$$

de l'équation (62).

Donc la transformation isométrique d'une surface développable (P) sur un plan (π) est déterminée par

$$X = \sqrt{b^2}\, \alpha \cos\theta + \int \kappa \left[\left(b \cdot \frac{db}{d\beta}\right) \cos\theta - \sqrt{b^2 \left(\frac{db}{d\beta}\right)^2 - \left(b \cdot \frac{db}{d\beta}\right)^2} \sin\theta\right] d\beta \tag{71}$$

$$Y = \sqrt{b^2}\, \alpha \sin\theta + \int \kappa \left[\left(b \cdot \frac{db}{d\beta}\right) \sin\theta - \sqrt{b^2 \left(\frac{db}{d\beta}\right)^2 - \left(b \cdot \frac{db}{d\beta}\right)^2} \cos\theta\right] d\beta \tag{72}$$

On voit bien que ces équations sont linéaires en α. Les lignes $\beta = \text{const.}$ sont des droites, géodésiques du plan (π). De même ces lignes sont des images de droites génératrices, c'est-à-dire des lignes géodésiques de la surface développable (P).

Les lignes $\alpha = \text{const.}$ sont parallèles entre elles, sans être orthogonales à la ligne $\beta = \text{const.}$

La condition de l'orthogonalité (50), respectivement (51), s'écrit

$$f = \frac{\partial P}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial P}{\partial \beta} = (\kappa + \alpha)\left(b \cdot \frac{db}{d\beta}\right) = 0 \tag{73}$$

et elle reste équivalente à (55). Dans ce cas au lieu de (66), (71) on met

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \int \sqrt{\left(\frac{db}{d\beta}\right)^2}\, d\beta \\ X &= \alpha \cos\theta - \int \kappa \sin\theta \sqrt{\left(\frac{db}{d\beta}\right)^2}\, d\beta \\ Y &= \alpha \sin\theta + \int \kappa \cos\theta \sqrt{\left(\frac{db}{d\beta}\right)^2}\, d\beta \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

avec

$$b^2 = 1\,. \tag{75}$$

De la représentation conforme de la surface analytique (S) sur un plan (π) et de la représentation conforme de la surface analytique (P) sur un plan (π) on passe à la représentation conforme de (S) sur (P). En égalant (40) avec (62) et (41) avec (63), on trouve les équations différentielles

$$\mu_1 \left\{ \sqrt{E}\, du + \frac{F + i\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}}\, dv \right\}$$

$$= \mu_1' \left\{ \sqrt{b^2}\, d\alpha + \left[\left(b \cdot \frac{db}{d\beta} \right) + i \sqrt{b^2 \left(\frac{db}{d\beta} \right)^2 - \left(b \cdot \frac{db}{d\beta} \right)^2} \right] \frac{\kappa + \alpha}{\sqrt{b^2}}\, d\beta \right\} \tag{76}$$

$$\mu_2 \left\{ \sqrt{E}\, du + \frac{F - i\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}}\, dv \right\}$$

$$= \mu_2' \left\{ \sqrt{b^2}\, d\alpha + \left[\left(b \cdot \frac{db}{d\beta} \right) - i \sqrt{b^2 \left(\frac{db}{d\beta} \right)^2 - \left(b \cdot \frac{db}{dP} \right)^2} \right] \frac{\kappa + \alpha}{\sqrt{b^2}}\, d\beta \right. \tag{77}$$

où

$$\frac{\mu_1 \cdot \mu_2}{\mu_1' \cdot \mu_2'} = \mu^2 \tag{78}$$

Les intégrales de ces équations donnent les transformations conformes

$$\alpha = \alpha\,(u, v) \qquad \beta = \beta\,(u, v) \tag{79}$$

de la surface originale (S) sur la surface-image (développable) (P).

4. *Surface de révolution et plan*

Supposons que (S) est une surface de révolution, dont l'axe de symétrie coïncide avec l'axe $0z$. Au lieu de (2) et (1) on écrit

$$M = M\,(u, v) \tag{80}$$

$$x = \varrho\,(u) \cdot \cos v \qquad y = \varrho\,(u) \cdot \sin v \qquad z = u \tag{81}$$

Les composantes des vecteurs $\dfrac{\partial M}{\partial u}$, $\dfrac{\partial M}{\partial v}$, $\dfrac{\partial^2 M}{\partial u^2}$, $\dfrac{\partial^2 M}{\partial u\, \partial v}$ et $\dfrac{\partial^2 M}{\partial v^2}$

sont données respectivement par

$$\frac{d\varrho}{du} \cos v \qquad \frac{d\varrho}{du} \sin v \qquad 1 \tag{82}$$

$$-\,\varrho \sin v \qquad \varrho \cos v \qquad 0 \tag{83}$$

$$\frac{d^2\varrho}{du^2}\cos v \qquad \frac{d^2\varrho}{du^2}\sin v \qquad 0 \tag{84}$$

$$-\frac{d\varrho}{du}\sin v \qquad \frac{d\varrho}{du}\cos v \qquad 0 \tag{85}$$

$$-\varrho\cos v \qquad -\varrho\sin v \qquad 0 \tag{86}$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial M}{\partial u}\right)^2 = 1 + \left(\frac{d\varrho}{du}\right)^2 \\ F &= \frac{\partial M}{\partial u}\cdot\frac{\partial M}{\partial v} = 0 \\ G &= \left(\frac{\partial M}{\partial v}\right)^2 = \varrho^2 \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

et

$$\left.\begin{aligned} E' &= \frac{-\varrho\dfrac{d^2\varrho}{du^2}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{d\varrho}{du}\right)^2}} \\ F' &= 0 \\ G' &= \frac{\varrho}{\sqrt{1+\left(\dfrac{d\varrho}{du}\right)^2}} \end{aligned}\right\} \tag{88}$$

Suivant (87) on peut écrire au lieu de (40), (41)

$$\left.\begin{aligned} dU_1 &= dX + i\,dY = \mu_1\left[\sqrt{1+\left(\frac{d\varrho}{du}\right)^2}du + i\varrho\,dv\right] \\ dU_2 &= dX - i\,dY = \mu_2\left[\sqrt{1+\left(\frac{d\varrho}{du}\right)^2}du - i\varrho\,dv\right] \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

qui admettent le même facteur intégrant

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu = \frac{1}{\varrho(u)} \tag{90}$$

et dont les intégrales sont

$$
\left.\begin{aligned}
X &= \int \sqrt{1 + \left(\frac{d\varrho}{du}\right)^2}\, \frac{dU}{\varrho} + \text{const.} \\
Y &= \qquad\qquad v \qquad\qquad + \text{const.}
\end{aligned}\right. \tag{91}
$$

Elles établissent une transformation ponctuelle et une représentation conforme de la surface (S) sur plan (π).

5. Ellipsoïde terrestre et plan

Comme la surface de révolution ellipsoïde terrestre est connue par l'équation cartésienne

$$
\frac{x^2 + y^2}{a_0^2} + \frac{z^2}{b_0^2} = 1 \tag{92}
$$

où a_0 et b_0 sont ses demis-axes principaux.

Si on pose

$$
u = z \qquad v = \lambda \qquad \varrho = a_0 \sqrt{1 - \frac{z^2}{b_0^2}} \tag{93}
$$

au lieu de (81) et (87) on a successivement

$$
x = a_0 \sqrt{1 - \frac{z^2}{b_0^2}} \cos\lambda \qquad y = a_0 \sqrt{1 - \frac{z^2}{b_0^2}} \sin\lambda \qquad z = z \tag{94}
$$

et

$$
\left.\begin{aligned}
E &= \frac{1 + \dfrac{a_0^2 - b_0^2}{b_0^2} \dfrac{z_0^2}{b_0^2}}{1 - \dfrac{z_0^2}{b_0^2}} \\
F &= \qquad 0 \\
G &= a_0^2 \left(1 - \frac{z^2}{b_0^2}\right)
\end{aligned}\right\} . \tag{95}
$$

Au lieu de (91) les intégrales deviennent

$$
\left.\begin{aligned}
X &= \sqrt{1 - \frac{a_0^2 - b_0^2}{a_0^2}} \int \frac{\sqrt{1 + \dfrac{a_0^2 - b_0^2}{b_0^2} \dfrac{z_2}{b_0^2}}}{1 - \dfrac{z^2}{b_0^2}} \frac{dz}{b_0} + \text{const.} \\
Y &= \qquad\qquad \lambda \qquad\qquad + \text{const.}
\end{aligned}\right\} \tag{96}
$$

Si l'on remplace

$$z = \left(1 - \frac{a_0^2 - b_0^2}{a_0^2}\right) N \sin\varphi \qquad z = a_0 \sin\psi \tag{97}$$

où φ est la latitude géographique, ψ la latitude réduite et

$$N = \frac{a_0}{\sqrt{1 - \frac{a_0^2 - b_0^2}{a_0^2} \sin^2\varphi}}, \tag{98}$$

(94) et (95) changent respectivement

$$\left.\begin{aligned} x &= N \cos\varphi \cos\lambda & x &= a_0 \cos\psi \cos\lambda \\ y &= N \cos\varphi \sin\lambda & y &= a_0 \cos\psi \sin\lambda \\ z &= \left(1 - \frac{a_0^2 - b_0^2}{a_0^2}\right) N \sin\varphi & z &= b_0 \sin\psi \end{aligned}\right\} \tag{99}$$

$$\left.\begin{aligned} E &= \left(1 - \frac{a_0^2 - b_0^2}{a_0^2}\right)^2 \frac{N^6}{a_0^4} & E &= a_0^2\left(1 - \frac{a_0^2 - b_0^2}{a_0^2} \cos^2\psi\right) \\ F &= 0 & F &= 0 \\ G &= N^2 \cos^2\varphi & G &= a_0^2 \cos^2\psi \end{aligned}\right\} \tag{100}$$

d'où les équations différentielles (89) sous les formes

$$\left.\begin{aligned} dU_1 &= dX + i dY = \mu_1 \left[\frac{N^3}{a_0^2}\left(1 - \frac{a_0^2 - b_0^2}{a_0^2}\right) d\varphi + i N \cos\varphi \, d\lambda\right] \\ dU_2 &= dX - i dY = \mu_2 \left[\frac{N^3}{a_0^2}\left(1 - \frac{a_0^2 - b_0^2}{a_0^2}\right) d\varphi - i N \cos\varphi \, d\lambda\right] \end{aligned}\right\} \tag{101}$$

avec

$$\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{N \cos\varphi} \tag{102}$$

et

$$\begin{aligned} dU_1 &= dX + i dY = \mu_1 \left[a_0 \sqrt{1 - \frac{a_0^2 - b_0^2}{a_0^2} \cos^2\psi} \, d\psi + i \, a_0 \cos\psi \, d\lambda\right] \\ dU_2 &= dX - i dY = \mu_2 \left[a_0 \sqrt{1 - \frac{a_0^2 - b_0^2}{a_0^2} \cos^2\psi} \, d\psi - i \, a_0 \cos\psi \, d\lambda\right] \end{aligned} \tag{103}$$

avec

$$\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{a_0 \cos\psi} \tag{104}$$

Les intégrales générales de ces équations sont

$$\left.\begin{aligned} X &= \int\limits_0^{\varphi} \frac{1 - \dfrac{a_0^2 - b_0^2}{a_0^2}}{\left(1 - \dfrac{a_0^2 - b_0^2}{a_0^2}\sin^2\varphi\right)\cos\varphi}\, d\varphi + \text{const.} \quad & X &= \int\limits_0^{\psi} \frac{\sqrt{1 - \dfrac{a_0^2 - b_0^2}{a_0^2}\cos^2\psi}}{\cos\psi}\, d\psi + \text{const.} \\ Y &= \lambda + \text{const.} & Y &= \lambda + \text{const.} \end{aligned}\right\} \tag{105}$$

La quantité

$$q = \int\limits_0^{\varphi} \frac{1 - \dfrac{a_0^2 - b_0^2}{a_0^2}}{\left(1 - \dfrac{a_0^2 - b_0^2}{a_0^2}\sin^2\varphi\right)\cos\varphi}\, d\varphi \tag{106}$$

est connue comme latitude croissante ou variable de Mercator.

6. Projection cylindrique

Le cylindre c'est une surface développable. Il est défini par (45), avec composantes de vecteurs

$$a \left\{ \begin{aligned} a_1 &= R_0 \cos\beta \\ a_2 &= R_0 \sin\beta \\ a_3 &= 0 \end{aligned} \right. \qquad b \left\{ \begin{aligned} b_1 &= 0 \\ b_2 &= 0 \\ b_3 &= 1\,. \end{aligned} \right. \tag{107}$$

La première forme quadratique de cette surface est

$$ds^2 = dP^2 = d\alpha^2 + \left(\frac{da}{d\beta}\right)^2 d\beta^2 \tag{108}$$

qui nous permet d'écrire au lieu de (76)

$$\mu_1 \left\{ \left(1 - \frac{a_0^2 - b_0^2}{a_0^2}\right) \frac{N^3}{a_0^2}\, d\varphi + i\, N \cos\varphi\, d\lambda \right\} = \mu_1' \left\{ d\alpha + i \sqrt{\left(\frac{da}{d\beta}\right)^2}\, d\beta \right\} \tag{109}$$

avec

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{N\cos\varphi} \\ \mu_1' &= \frac{1}{R_0} \end{aligned}\right\} \tag{110}$$

et

$$\sqrt{\left(\frac{da}{d\beta}\right)^2} = R_0 \, . \tag{111}$$

L'intégrale générale est

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= R_0 \int_0^{\varphi} \frac{1 - \dfrac{a_0^2 - b_0^2}{a_0^2}}{\left(1 - \dfrac{a_0^2 - b_0^2}{a_0^2}\sin^2\varphi\right)\cos\varphi}\, d\varphi = R_0\, q \\ \beta &= \lambda = \lambda \end{aligned}\right\} \tag{112}$$

En posant

$$\begin{aligned} X &= \alpha = R_0\, q \\ Y &= R_0\, \beta = R_0\, \lambda \end{aligned} \tag{113}$$

on retrouve les équations définitives de la projection cylindrique de Mercator.

7. *Projections coniques*

La développable (P) est un cône, qui est tangent à l'ellipsoïde terrestre tout le long du parallèle

$$\varphi = \varphi_0 \tag{114}$$

L'équation vectorielle reste (45) avec composantes des vecteurs

$$a \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = N_0 \dfrac{1 - \dfrac{a_0^2 - b_0^2}{a_0^2}\sin^2\varphi_0}{\sin\varphi_0} \end{cases} \qquad b \begin{cases} b_1 = \sin\varphi_0 \cos\beta \\ b_2 = \sin\varphi_0 \sin\beta \\ b_3 = -\cos\varphi_0 \end{cases} \tag{115}$$

avec $\beta = \lambda$ et pour elles sont valables

$$
\left.\begin{array}{ll}
a \;= \text{const.} & b^2 = 1 \\
\dfrac{da}{d\beta} = 0 & b \cdot \dfrac{db}{d\beta} = 0
\end{array}\right\} \tag{116}
$$

et la première forme quadratique s'écrit

$$
ds^2 = dP^2 = d\alpha^2 + \alpha^2 \left(\frac{db}{d\beta}\right)^2 d\beta^2 \tag{117}
$$

où

$$
\sqrt{\left(\frac{db}{d\beta}\right)^2} = \tau_0 = \sin\varphi_0 \,. \tag{118}
$$

Des positions respectives du cône et de l'ellipsoïde terrestre on peut conclure que φ croît lorsque la variable α décroît et par analogie à (109), respectivement à (76), avec $\kappa = 0$, permet d'écrire

$$
\mu_1 \left\{ \left(1 - \frac{a_0^2 - b_0^2}{a_0^2}\right) \frac{N^3}{a_0^2}\, d\varphi + i\, N \cos\varphi\, d\lambda \right\} = \mu_1' \left\{ -\, d\alpha + i\alpha \sqrt{\left(\frac{db}{d\beta}\right)^2}\, d\beta \right\} \tag{119}
$$

où

$$
\left.\begin{array}{l}
\mu_1 \;= \dfrac{1}{N \cos\varphi} \\[2ex]
\mu_1' = \dfrac{1}{\alpha \sqrt{\left(\dfrac{db}{d\beta}\right)^2}}
\end{array}\right\} \tag{120}
$$

et d'où

$$
\left.\begin{array}{l}
\dfrac{d\alpha}{\alpha} = - \dfrac{\left(1 - \dfrac{a_0^2 - b_0^2}{a_0^2}\right) \tau_0\, d\varphi}{\left(1 - \dfrac{a_0^2 - b_0^2}{a_0^2} \sin^2\varphi\right) \cos\varphi} \\[3ex]
d\beta \;= \qquad d\lambda
\end{array}\right\} . \tag{121}
$$

Alors une intégrale particulière est donnée par

$$
\left.\begin{array}{l}
\alpha = \alpha_0\, e^{-\tau_0 q} \\
\beta = \lambda
\end{array}\right\} \tag{122}
$$

où q est la variable de Mercator (106).

Pour avoir les équations définitives de la projection conique dans le plan (π) on change (62), (63) respectivement avec

$$dU_1 = dX + i dY = \mu_1' \left\{ - d\alpha + i\alpha \sqrt{\left(\frac{db}{d\beta}\right)^2} d\beta \right\} \tag{123}$$

$$dU_2 = dX - i dY = \mu_2' \left\{ - d\alpha - i\alpha \sqrt{\left(\frac{db}{d\beta}\right)^2} d\beta \right\} \tag{124}$$

où

$$\mu_1' = e^{i\theta} \qquad \mu_2' = e^{-i\theta} \tag{125}$$

et

$$\mu_1' \cdot \mu_2' = 1 \tag{126}$$

En tenant compte des conditions d'intégrabilité

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta}\left[- e^{i\theta}\right] &= \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[i\alpha\, e^{i\theta} \sqrt{\left(\frac{db}{d\beta}\right)^2}\right] \\ \frac{\partial}{\partial \beta}\left[\ e^{-i\theta}\right] &= \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[i\alpha\, e^{-i\theta} \sqrt{\left(\frac{db}{d\beta}\right)^2}\right] \end{aligned}\right\} \tag{127}$$

au lieu de (66), (70) de (123) et (124), on tire

$$\theta = - \tau_0 \int d\beta = - \tau_0\, \beta \tag{128}$$

$$U_1 = X + i Y = \alpha\, e^{-i\tau_0 \beta} + \text{const.} \tag{129}$$

d'où les intégrales

$$\left.\begin{aligned} X &= X_0 - \alpha \cos(\tau_0 \beta) \\ Y &= \qquad \alpha \sin(\tau_0 \beta) \end{aligned}\right\} \tag{130}$$

ou bien

$$\left.\begin{aligned} X &= X_0 - \alpha_0\, e^{-\tau_0 q} \cos(\tau_0 \lambda) \\ Y &= \qquad \alpha_0\, e^{-\tau_0 q} \sin(\tau_0 \lambda) \end{aligned}\right\} \tag{131}$$

avec (122).

Avec $u = \varphi$, $v = \lambda$ et $F = 0$ sur (40) et (41) on en tire

$$dU_1 = dX + i dY = \mu_1 \left[\sqrt{E}\, d\varphi + i \sqrt{G}\, d\lambda\right] \tag{132}$$

$$dU_2 = dX - i dY = \mu_2 \left[\sqrt{E}\, d\varphi - i \sqrt{G}\, d\lambda\right], \tag{133}$$

avec

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{E} &= \frac{N^3}{a^2}\left(1 - \frac{a_0^2 - b_0^2}{a_0^2}\right) \\ \sqrt{G} &= N \cos\varphi \end{aligned}\right\} \tag{134}$$

et

$$d\varphi = \sqrt{\frac{G}{E}}\, dq\,. \tag{135}$$

Les conditions d'intégrabilité (43) changent avec

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\mu_1 \sqrt{E}\right] &= i \frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\mu_1 \sqrt{G}\right] \\ \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\mu_2 \sqrt{E}\right] &= -\, i \frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\mu_2 \sqrt{G}\right] \end{aligned}\right\} \tag{136}$$

ou bien, en remplaçant φ avec q,

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\mu_1 \sqrt{G}\right] = i \frac{\partial}{\partial q}\left[\mu_1 \sqrt{G}\right] \tag{137}$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\mu_2 \sqrt{G}\right] = -\, i \frac{\partial}{\partial q}\left[\mu_2 \sqrt{G}\right]. \tag{138}$$

Au lieu de (132), (133) on a

$$dU_1 = dX + i dY = \mu_1 \sqrt{G}\left[dq + i d\lambda\right] \tag{139}$$

$$dU_2 = dX - i dY = \mu_2 \sqrt{G}\left[dq - i d\lambda\right] \tag{140}$$

où les produits $\mu_1 \sqrt{G}$ et $\mu_2 \sqrt{G}$ sont des fonctions analytiques et développables en séries illimitées par rapport à λ

$$\mu_1 \sqrt{G} = \mu_0' + \lambda\mu_1' + \lambda^2\mu_2' + \dots + \lambda^n\mu_n' + \dots \tag{141}$$

$$\mu_2 \sqrt{G} = \mu_0'' + \lambda\mu_1'' + \lambda^2\mu_2'' + \dots + \lambda^n\mu_n'' + \dots \tag{142}$$

où μ_0', μ_1', μ_2', ... et μ_0'', μ_1'', μ_2'', ... ne sont que des fonctions de φ, respectivement de q (106).

On remplace (141) et (142) dans (137) et (138). On trouve

$$\left.\begin{array}{ll}
\mu_1' = \dfrac{i}{1}\dfrac{d\mu_0'}{dq} & \mu_1'' = -\dfrac{i}{1}\dfrac{d\mu_0''}{dq} \\[2ex]
\mu_2' = \dfrac{i}{2}\dfrac{d\mu_1'}{dq} = -\dfrac{1}{2!}\dfrac{d^2\mu_0'}{dq^2} & \mu_2'' = -\dfrac{i}{2}\dfrac{d\mu_1''}{dq} = -\dfrac{1}{2!}\dfrac{d^2\mu_0''}{dq^2} \\[2ex]
\mu_3' = \dfrac{i}{3}\dfrac{d\mu_2'}{dq} = -\dfrac{i}{3!}\dfrac{d^3\mu_0'}{dq^3} & \mu_3'' = -\dfrac{i}{3}\dfrac{d\mu_2''}{dq} = +\dfrac{i}{3!}\dfrac{d^3\mu_0''}{dq^3} \\[2ex]
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}\right\} \tag{143}$$

Par définition la projection de Gauss est conforme, pour laquelle la longueur du méridien central ($\lambda = 0$) reste invariable.

Avec $d\lambda = 0$ et

$$d\sigma = \sqrt{E}\, d\varphi = \sqrt{G}\, dq \tag{144}$$

sur le même méridien et de (139), (140) on a

$$\left.\begin{array}{l}
d\sigma = dX = \mu_1 \sqrt{G}\, dq = \sqrt{G}\, dq \\
d\sigma = dX = \mu_2 \sqrt{G}\, dq = \sqrt{G}\, dq
\end{array}\right\} \tag{145}$$

d'où donc

$$\mu_1 = \mu_2 = 1 \tag{146}$$

et

$$\mu_0' = \mu_0'' = \sqrt{G}\,. \tag{147}$$

Remplaçons (147) dans (143); on en tire

$$\mu_1 \sqrt{G} = \sqrt{G} + \frac{i\lambda}{1!} \frac{d\sqrt{G}}{dq} + \frac{(i\lambda)^2}{2!} \frac{d^2\sqrt{G}}{dq^2} + \frac{(i\lambda)^3}{3!} \frac{d^3\sqrt{G}}{dq^3} + \dots \tag{148}$$

$$\mu_2 \sqrt{G} = \sqrt{G} + \frac{(-i\lambda)}{1!} \frac{d\sqrt{G}}{dq} + \frac{(-i\lambda)^2}{2!} \frac{d^2\sqrt{G}}{dq^2} + \frac{(-i\lambda)^3}{3!} \frac{d^3\sqrt{G}}{dq^3} + \dots \tag{149}$$

et on voit que (148) et (149), respectivement (141) et (142) sont des développements en séries de Taylor dans le voisinage d'un point

$$\varphi = \varphi \qquad\qquad \lambda = 0 \tag{150}$$

du méridien central.

Pour $q = \text{const.}$, $dq = 0$ portons (148), (149) en (139) et (140). Après une intégration élémentaire par rapport à λ, on en tire définitivement la projection classique de Gauss avec l'équation

$$Z = X + iY = B + \frac{i\lambda}{1!} \sqrt{G} - \frac{\lambda^2}{2!} \frac{d\sqrt{G}}{dq} - \frac{i\lambda^3}{3!} \frac{d^2\sqrt{G}}{dq^2} + \dots, \tag{151}$$

où

$$B = \int_0^{\varphi} \sqrt{E}\, d\varphi\,. \tag{152}$$

Littérature

[1] *E. Goursat:* Cours d'analyse mathématique, t. I, II, Paris 1949.

[2] *G. Bouligant:* Précis de mécanique rationnelle, t. I, Paris 1926.