

Ein Beitrag zur Ausgleichung

Autor(en): **Säuberli, R.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Zeitschrift des Vereins Schweizerischer Konkordatsgeometer [ev.
= Journal de la Société suisse des géomètres concordataires]**

Band (Jahr): **2 (1904)**

Heft 4

PDF erstellt am: **23.03.2021**

Persistenter Link: <http://doi.org/10.5169/seals-177845>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Zeitschrift

des

Vereins Schweiz. Konkordatsgeometer

Organ zur Hebung und Förderung des Vermessungs- und Katasterwesens

Jährlich 12 Nummern. Jahres-Abonnement Fr. 4.-

Unentgeltlich für die Mitglieder

Redaktion: F. Brönnimann, Bern

Expedition: H. Keller in Luzern

Ein Beitrag zur Ausgleichung.

14. Von Rud. Säuberli, Konkordatsgeometer, in Seengen.

Es ist leider eine bekannte Tatsache, daß die Ausgleichungsmethode der kleinsten Quadrate noch vielerorts sehr in Mißkredit steht. Es wird dies seinen Grund darin haben, weil diese Methode der Ausgleichung viele umständliche Rechnereien mit sich bringt; vielleicht hat auch nicht jedermann Gelegenheit gehabt, mit der Sache näher bekannt zu werden. Auf jeden Fall aber muß dieser Art der Ausgleichung ein größerer Wert beigemessen werden, als man sich hin und wieder kann erzählen lassen; haben wir doch in unserer aargauischen Gesetzessammlung einen wohlangebrachten Artikel, wonach ausdrücklich verlangt wird, daß für Punkte, bestimmt durch Vor- und hauptsächlich durch Rückwärtseinschneiden, die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate durchzuführen sei.

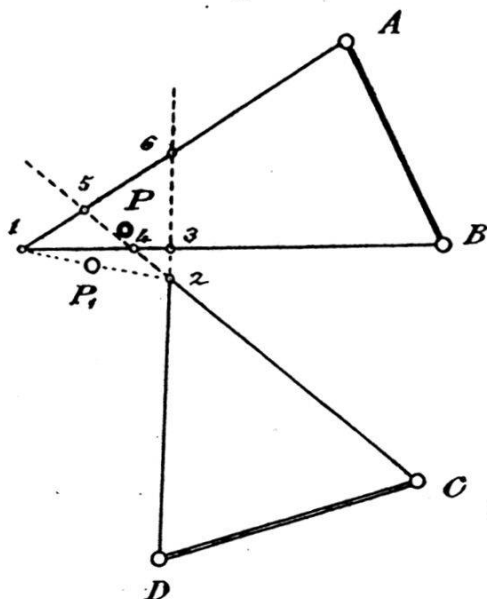
Es wird wohl überall vorkommen, daß bei der Berechnung von Triangulationen an sogenannten schwachen Stellen Differenzen zu Tage treten, welche, obwohl immer noch in den Grenzen des Erlaubten sich bewegend, ein enges Gewissen doch nicht mehr befriedigen können. Es ist daher von Wichtigkeit, bei der Festsetzung der letzten Resultate neu bestimmter Punkte alle mögliche Sorgfalt walten zu lassen.

In der folgenden kurzen Abhandlung soll nun der Versuch gemacht werden, zu zeigen, wie man die etwas komplizierten

Rechnungen, welche die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate verlangt, vermeiden und doch bei wenig Zeitaufwand und Mühe zu den sozusagen gleichen Ergebnissen gelangen kann.

1. Ausgleichung beim Vorwärtseinschneiden.

Fig. 1

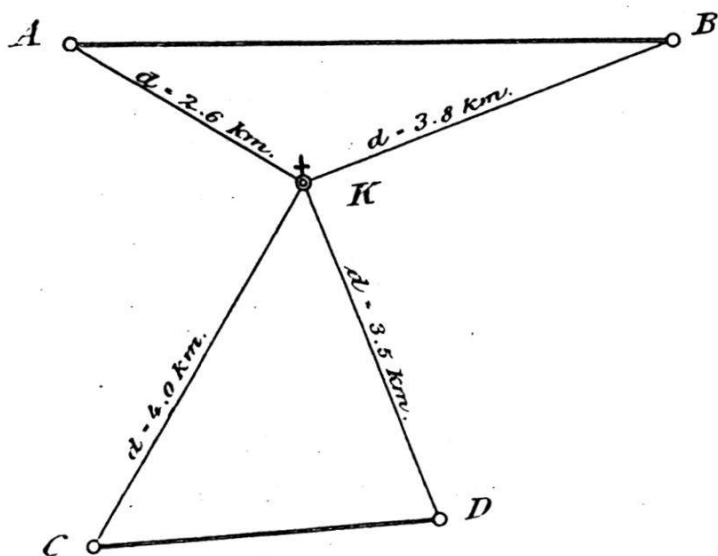


Angenommen, der Punkt P sei aus den beiden Seiten AB und CD doppelt bestimmt worden. Nimmt man aus den beiden Bestimmungen das arithmetische Mittel, so fällt der definitive Punkt nach P_1 .

Ohne daß man an den bestimmenden Elementen etwas ändert, wird man bei allgemeiner Betrachtung einsehen, daß der wahre Punkt bei P liegt, wenn man alle Visuren mit einander zum Schnitte bringt. Hatte man anfänglich für

den Punkt P doppelte Bestimmung, so sind es nun in Wirklichkeit 6 Schnitte, und das arithmetische Mittel aus diesen 6 Schnittpunkten liefert jedenfalls ein weit schärferes Resultat.

Fig. 2

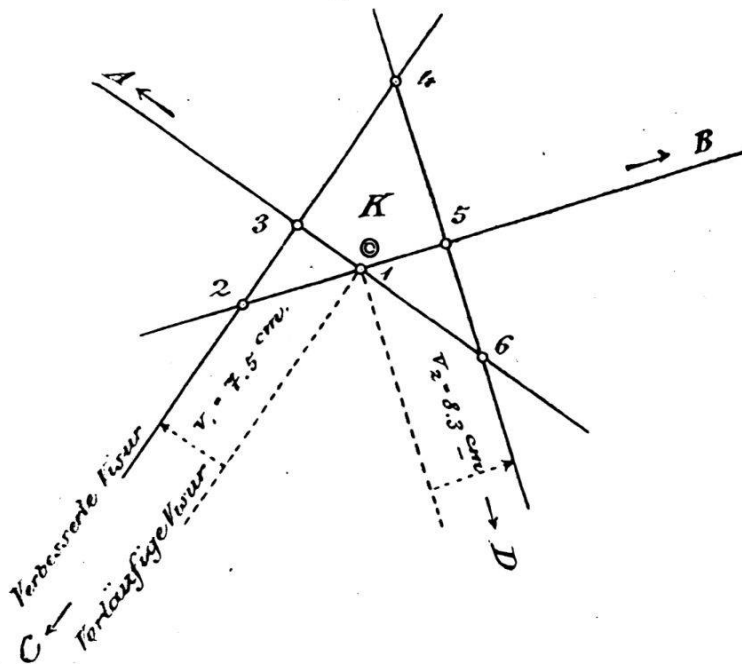


Es sei wiederum der Punkt K nach Fig. 2 von den Punkten AB und CD aus ange schnitten worden.

Gesucht sind die Coordinaten von K.

Zur Lösung der Aufgabe kann nun analog vorgegangen werden, wie bei der Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Fig. 3



Man berechnet den zu bestimmenden Punkt z. B. aus der Seite AB und erhält dadurch provisorische Koordinaten von K.

Auf Grund dieser Koordinaten werden nun die Azimuthe u. Distanzen von K nach sämtlichen umliegenden Punkten berechnet.

Diese Azimuthe werden nun mit denjenigen verglichen, welche man aus den gemachten Messungen ableiten kann, und die Resultate in einer Detailzeichnung für den Punkt K mit derselben Orientierung wie Fig. 2 graphisch dargestellt.

Es sei nun:

1. Das gemessene Azimuth CK um 12" kleiner als das vorläufig berechnete
2. " " " DK " 15" größer " " " "

Der Schnitt Nr. 1 Fig. 3 sei der Punkt, der aus dem Dreieck ABK erhalten wird.

Wie nun die Rechnung zeigt, geht die definitive Visur CK links beim Punkte K vorbei, da das Azimuth CK verkleinert werden soll, und zwar beträgt die seitliche Abweichung beim Punkte K

$$v_1 = \frac{\text{Winkeldifferenz} \times \text{Distanz}}{\rho} = \frac{12'' \times 400\,000 \text{ cm}}{637\,000''} = 7,5 \text{ c/m}$$

Man trägt also diese 7,5 c/m im Maßstab 1 : 10 von der Geraden CK aus nach links ab und erhält in der Parallelen zu CK die definitive Visur. Ganz gleich wird vorgegangen bei der Ziellinie DK. Das Azimuth DK soll um 15" größer sein, die seitliche Verschiebung beträgt demnach beim Punkte K

$$v_2 = \frac{15 \times 350\,000}{637\,000} = 8,3 \text{ c/m nach rechts.}$$

Aus den erhaltenen 4 gleichwertigen Visuren Fig. 3 ergeben sich nun 6 Schnittpunkte. Man kann nun die Koordinaten dieser 6 Schnitte abgreifen und das arithmetische Mittel daraus als

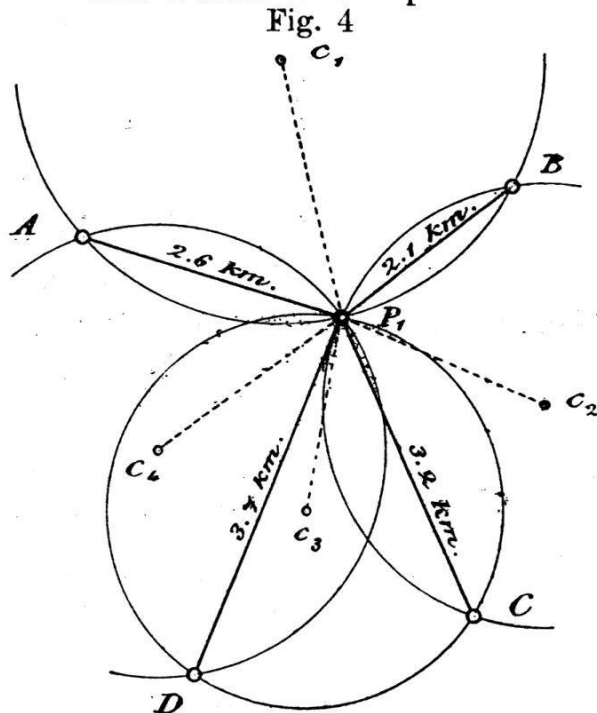
definitiven Wert festsetzen. Der ausgeglichene Punkt liegt offenbar im Schwerpunkt des Schnittsystems.

2. Ausgleichung beim Rückwärtseinschneiden.

Es seien auf der Station P folgende Winkel gemessen:

- 1) A-B = $139^{\circ} 00' 00''$
- 2) B-C = $115^{\circ} 00' 00''$
- 3) C-D = $51^{\circ} 00' 00''$
- 4) D-A = $95^{\circ} 00' 00''$

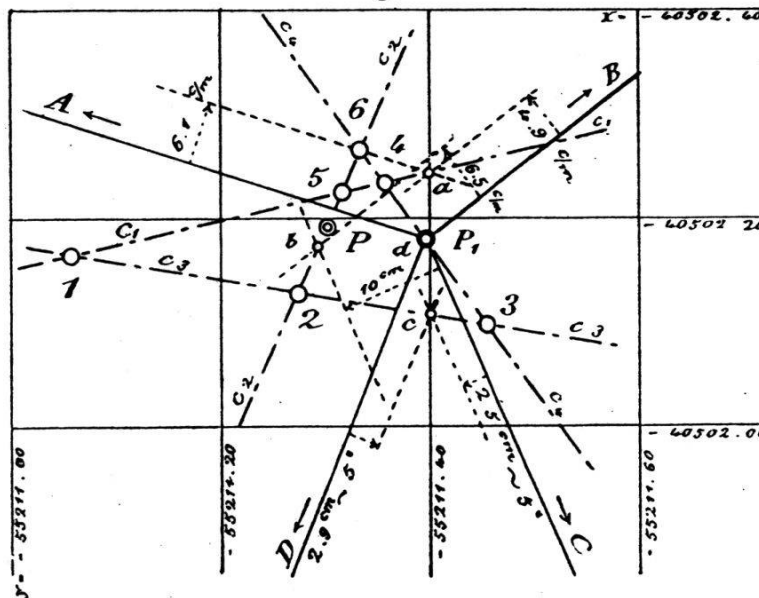
Der Punkt P soll pothenotisch bestimmt werden.



Zu diesem Zwecke habe man bereits provisorische Koordinaten von P auf irgend eine Weise berechnet, die jedoch um ca. 50 cm ungenau sein mögen.

Es werden nun mit Hülfe dieser Koordinaten wieder die Richtungen und Distanzen nach den umliegenden Punkten berechnet und daraus aus der Differenz der bezügl. Azimuthe die Winkel abgeleitet, wie folgt:

Fig. 5



- a) A-B = $138^{\circ} 99' 70''$
- b) B-C = $115^{\circ} 00' 40''$
- c) C-D = $50^{\circ} 99' 90''$
- d) D-A = $95^{\circ} 00' 00''$

Aus der Vergleichung dieser Winkel mit den obigen gemessenen treten nun Differenzen hervor, die um so kleiner sind, je genauer der Punkt P anfänglich bestimmt war. Der Winkel APB z. B. ist nach vor-

läufiger Berechnung. 138° 99' 70"
 und soll sein 139° 00' 00"

ist demnach um 30" zu klein. Im Detailplan Fig. 5 Maßstab $\frac{1}{10}$ sind nun diese Korrekturen der Winkel sehr leicht möglich. Der Winkel APB soll um 30" größer gemacht werden, der Punkt P wird den Punkten A und B etwas näher gerückt, und zwar verteilt man die obige Differenz von 30" am einfachsten zu gleichen Teilen auf beide Schenkel. Für den Schenkel PA ergibt die halbe Differenz von 15" eine seitliche Abweichung von

$$\text{Korrektion PA} = \frac{15 \times 260\,000}{637\,000} = 6,1 \text{ } \text{‰}_m, \text{ nach innen;}$$

In gleicher Weise ist für den Schenkel PB

$$\text{Korrektion PB} = \frac{15 \times 210\,000}{637\,000} = 4,9 \text{ } \text{‰}_m \text{ nach innen aufzutragen.}$$

Der Schnittpunkt dieser verschobenen Schenkel PA und PB des Punktes a hat nun die Eigenschaft, daß darauf die Seite AB unter dem Winkel $1) = 139^\circ 00' 00''$, das heißt unter dem richtigen Winkel gesehen wird. Der Kreis, welcher durch die Punkte A und B und den soeben erhaltenen Punkt geht, kann nun hier in Anbetracht des großen Maßstabes $\frac{1}{10}$ als gerade Linie $C_1 C_1$ senkrecht zum Radius C, P Fig. 4 gezogen werden.

Der Fehler, der daraus entsteht, wird jedenfalls den Betrag von $\frac{50^2}{2 \times 40000} = 0,03 \text{ } \text{‰}_m$ nicht übersteigen, vorausgesetzt, daß der provisorische Punkt P_1 nicht mehr als 50 ‰_m unsicher sei, und daß der Radius C, P des betreffenden Kreises 400m nicht unterschreitet.

Die so konstruierte Gerade $c_1 - c_1$, soweit deren Ausdehnung hier in Betracht kommt, ist also der geometrische Ort aller Punkte, von denen aus die Seite AB unter dem Winkel $1) = 139^\circ 00' 00''$ erscheint.

Auf gleiche Weise kommt man zu den entsprechenden Geraden, die zu den andern Winkeln gehören. Müssen die Winkel verkleinert werden, so schneidet die Gerade die Schenkel erst in der Verlängerung und umgekehrt. Man erhält so für jeden Winkel eine Linie des geometrischen Orts, im vorliegenden Falle 4, die sich in 6 Punkten 1, 2, 3 etc. schneiden, und hat somit für den Punkt P sechsfache Bestimmung; es sind dies die Schnitte:

	y	x
1.	— 55211 , 057	— 40502 , 164
2.	275	127
3.	456	096
4.	359	233
5.	316	224
6.	334	266

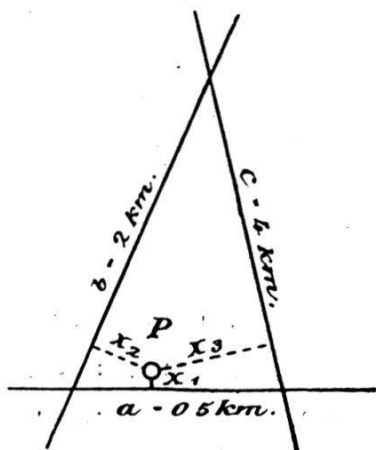
das arithmetische Mittel daraus ergibt

für P die Coordinaten $y = - 55211,30$ $x = - 40502,19$

Dieses Ausgleichungsverfahren hat offenbar das Gute, daß dabei jede Visur mit jeder andern kombiniert werden kann; man erhält die größt mögliche Zahl von Einzelbestimmungen, und es kann der Genauigkeitsgrad des Endresultates aus der Schärfe der Schnitte sofort beurteilt werden.

Das Verfahren ist ohne Zweifel identisch mit der Ausgleichungsmethode der kleinsten Quadrate für den speziellen Fall, wo die Visuren alle gleich lang und die Schnitte regelmäßig wären. Da dies aber nie zutrifft, so werden sich auch hier kleine Abweichungen ergeben. Dort ist es die Quadratsumme der Widersprüche in den Winkeln, die zu einem Minimum gemacht wird, hier sind es die linearen Unterschiede in den Coordinaten. Hatte man vorhin aus den 6 Einzelbestimmungen das arithmetische Mittel gebildet und demnach alle 6 Schnittpunkte als gleichwertig vorausgesetzt, so ist nun leicht zu sehen, daß dies nicht ganz zutreffend war.

Fig. 6



Schneiden sich z. B. die 3 Visuren für denselben Punkt in der Weise wie Fig. 6 andeutet, so gibt die Winkelausgleichung den definitiven Punkt nicht etwa im Schwerpunkt des Fehlerdreiecks an, sondern bei P, das heißt ganz nahe an der kürzesten Visur a. Die Rechnung berücksichtigt weniger die Schnitte, als vielmehr die rechtwinkligen Abstände von den Seiten, und zwar hätte man den Punkt P so zu bestimmen, daß:

$$x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 \text{ zu einem Minimum wird.}$$

Dabei bedeuten p_1 p_2 p_3 die zu den Visuren gehörenden Gewichte und sind als solche umgekehrt proportional den Quadraten

der Distanzen zu nehmen. Der Einfachheit halber kann man die reziproken Quadrate der Zielweiten selber in die Rechnung einführen und hätte dann die Funktion:

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{c}\right)^2 \text{ zu einem Minimum zu machen.}$$

Dieser Betrachtung zufolge kann man bei der graphischen Ausgleichung noch zu präziseren Werten gelangen, wenn man den spitzen Schnittpunkten und solchen, die von langen Visuren gebildet werden, eine etwas kleinere Bedeutung zukommen läßt. Man wird also bei Festsetzung des letzten Mittelwertes die etwas verdächtigen Schnitte wenn nicht ganz außer Acht lassen, so doch dieselben mit einem entsprechend kleinern Gewicht belegen, wie man es in solchen Fällen immer zu tun gewohnt ist.

Wenn auch die angeführte graphische Art der Ausgleichung der Ausgleichungsmethode der kleinsten Quadrate nachstehen mag, so dürfte man doch dadurch ein erwünschtes Mittel haben, die Rechnung der Winkelausgleichung auf einfache Weise kontrollieren zu können, ob die Korrekturen in den Coordinaten in Bezug auf Vorzeichen und GröÙe richtig sind etc., und ich glaube, die Methode kann überall angewendet werden, wo es bei trig. Arbeiten auf eine große Genauigkeit ankommt.

Seengen, im Februar 1904

R. Säuberli, Konkordatsgeometer.

~ Mitteilungen aus dem Entwurf des Schweizerischen Civilgesetzbuches.

↓ Von der Redaktion.

Bekanntlich sind die Bundesbehörden durch Volksbeschluß ermächtigt worden, ein schweizerisches, für alle Kantone maßgebendes Civilgesetzbuch zu verfassen, was als höchst zeitgemäß angesehen werden muß und einen großen Fortschritt zur einheitlichen Regelung aller bürgerlichen Verhältnisse bedeutet. Der Vor-entwurf wurde von Herrn Professor Dr. Huber in Bern in umfassender, tiefgründiger Weise bearbeitet und in den Jahren 1896—1900 von verschiedenen Kommissionen derart redigiert, wie