

RÉALITÉS ET SYMBOLISMES EN MATHÉMATIQUES

Autor(en): **Lurent, Henri**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1942-1950)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.03.2021**

Persistenter Link: <http://doi.org/10.5169/seals-515805>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

où le vecteur \mathbf{c}' est coplanaire avec les vecteurs \mathbf{a} , \mathbf{b} et n est un nombre réel. D'après ce que nous venons d'établir, on a :

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c}' = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}') \mathbf{b} - (\mathbf{b} \times \mathbf{c}') \mathbf{a} , \quad (3)$$

et puisque

$$\mathbf{c}' = \mathbf{c} - n\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} ,$$

on conclut :

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c}' &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} , \\ \mathbf{a} \times \mathbf{c}' &= \mathbf{a} \times \mathbf{c} , \quad \mathbf{b} \times \mathbf{c}' = \mathbf{b} \times \mathbf{c} , \end{aligned}$$

et la relation (3) devient alors identique à la formule (1), qui se trouve donc établie dans toute sa généralité.

RÉALITÉS ET SYMBOLISMES EN MATHÉMATIQUES

PAR

Henri LORENT (Bruxelles).

Sciences essentiellement abstraites, les mathématiques ont leurs racines dans les réalités sensibles; par leurs applications, elles préparent des actions sur d'autres réalités sensibles.

Quelle est la liaison entre les origines sensibles et les divers niveaux d'abstraction entre lesquels s'étagent les branches et les méthodes des mathématiques ?

Nous essayons ici de répondre à cette question, en supposant la mémoire des lecteurs en possession de quelque résidu de leurs études mathématiques élémentaires.

Dans notre langage figurera le mot *ensemble* pris au sens qu'il a en mathématiques depuis un gros demi-siècle. Ce mot désignera des suites d'êtres mathématiques se succédant indé-

finiment suivant une loi déterminée plus ou moins explicite, semblable suite étant un *ensemble transfini*. Nous aurons à en considérer de deux espèces :

Il y a des ensembles *dénombrables* de nombres, dont le type est la suite indéfinie des nombres entiers naturels :

$$1, 2, 3, 4, \dots$$

et dont les autres sont tels qu'on peut les faire correspondre, terme pour terme, à la suite des nombres entiers, par exemple la suite des nombres fractionnaires :

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

ou la suite des racines carrées des nombres entiers :

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots$$

D'un ensemble dénombrable, on peut extraire un *sous-ensemble* également dénombrable ; par exemple : de l'ensemble des nombres entiers, celui des nombres pairs :

$$2, 4, 6, 8, \dots$$

chacun étant le double d'un des entiers naturels ; plus généralement, la suite :

$$n, 2n, 3n, 4n, \dots$$

des multiples d'un entier n quelconque.

D'autres ensembles sont dits avoir la *puissance du continu*, tel l'ensemble des points d'une droite : on ne peut passer de l'un à l'autre en suivant la droite, sans passer par tous les intermédiaires. On ne peut, sur une droite, concevoir un *point suivant* d'un autre (alors que dans un ensemble dénombrable chaque terme a un suivant) ; car tout point d'un segment de droite, si petit que soit ce segment, est un terme d'un ensemble de même puissance qu'une demi-droite ; comme on le constate, AB étant un segment de droite et O un point extérieur, en projetant de O les points de AB sur une droite d parallèle à AO : à chaque point de AB correspond un point de la droite d , y compris le point à l'infini de d qui (en géométrie euclidienne) correspond au point A.

Sur une droite, à partir d'une origine O , il existe un point dont la distance au point O est un nombre donné, le mot nombre étant pris au sens général qui résultera des paragraphes suivants. Tout ensemble dénombrable est un sous-ensemble d'un ensemble ayant la puissance du continu...

I

Le concret en mathématiques est constitué par deux formes de l'activité mentale et musculaire humaine: le comptage des objets et le mesurage des grandeurs.

Le comptage des objets distincts d'un groupe d'objets, semblables à un titre déterminé, assure la formation des nombres entiers. Les noix contenues dans un sac constituent les unités d'un comptage; non pas qu'elles soient des objets identiques, substituables l'une à l'autre sans qu'aucun caractère de l'une et de l'autre (par exemple la différence de rugosité ou la différence de poids) dénonce la substitution. Le comptage suppose déjà une abstraction, la considération des objets sous un caractère commun, abstraction faite d'autres caractères considérés comme des particularités sans intérêt au point de vue du caractère commun: par exemple dans le cas des noix achetées à la douzaine, leur valeur commune en tant qu'aliments.

De même, le comptage des volumes d'une bibliothèque se fait sans distinguer leurs formats, leurs contenus, leurs prix, etc.

N'oublions pas que ces comptages ne se font pas sans des déplacements d'objets: soit séparation des noix déjà comptées de celles qui restent à compter, soit déplacement de l'amateur de livres devant les rayons de sa bibliothèque.

Le mesurage de grandeurs comporte aussi un déplacement d'objets ou de personnes, mais cette fois, en présence d'une grandeur continue ou traitée comme telle.

Grandeur continue, telle la longueur d'un chemin à parcourir, la masse d'un volume de liquide, etc. Grandeur traitée comme continue, telle le poids d'une masse de grains de café, la charge d'un bateau de blé, le cubage d'un tas de pavés, etc...

Parmi les objets déplacés lors du mesurage figurent les unités de ce mesurage: mètre rigide ou chaîne d'arpenteur, poids

d'un kilo ou d'un quintal, capacités d'un litre ou d'un décalitre, etc...

L'agent du mesurage se déplacera le long du chemin à mesurer ou déplacera les grandeurs à mesurer sur un plateau d'une balance et les unités métriques sur l'autre plateau, etc...

Cette activité motrice mise en jeu par le comptage ou le mesurage doit être pratiquée par l'enfant qui débute dans l'étude du calcul arithmétique et va apprendre à en symboliser les résultats.

II

Le symbolisme fondamental de l'arithmétique est l'ensemble dénombrable des nombres entiers. Comment sort-il de l'intuition sensible ? Une expression verbale ou chiffrée (*douze* ou 12, par exemple) exprime le résultat d'un comptage d'objets ou d'un mesurage de grandeur. Dans notre pratique du système métrique décimal des poids et mesures, *c'est toujours un nombre entier* : c'est évident pour un comptage, c'est vrai par une opération auxiliaire s'il s'agit de la longueur d'une table, 2,25 m, par exemple, car ce dernier nombre est identique à 225 cm et n'est écrit autrement que pour une raison imposée par la technique des opérations de l'arithmétique des entiers, si l'on veut exprimer cette technique à partir d'une unité fondamentale ayant avec les unités auxiliaires des rapports déterminés.

Les autres nombres non entiers de l'arithmétique sont amenés par les opérations de l'arithmétique, comme nous aurons à le montrer plus loin.

Une expérience encore sommaire du comptage d'objets ou de mesurage de grandeurs comporte cette constatation fondamentale : un nombre entier étant donné, on peut toujours l'augmenter d'une unité, en ajoutant aux objets comptés un objet nouveau ; à ce qui est mesuré, une unité de plus. Cette opération réussit chaque fois que d'évidentes conditions matérielles accidentelles (dimensions de la table à dessiner, par exemple) ne s'y opposent pas, elle est précocement conçue comme *indéfiniment* renouvelable (abstraction faite de la fatigue musculaire qu'impose la répétition des déplacements à réaliser).

En langage mathématique, on dira que les nombres entiers forment un *ensemble dénombrable*, tel qu'il a été défini à la première page de la présente note.

III

La première opération mathématique partant sur des nombres entiers est l'addition. En présence de deux ensembles finis (dont l'importance est exprimable par un nombre) d'objets ou d'unités comptés ou mesurés, l'addition dispense d'un comptage ou mesurage à nouveau, lorsque ces deux ensembles sont réunis en un seul. L'objet de l'addition est donc une économie d'action, et même une prévision d'action: car l'addition de deux entiers fait connaître d'avance, fait prévoir le résultat du comptage ou mesurage de l'ensemble qui serait constitué par la réunion de deux collections d'objets comptés ou des deux grandeurs continues mesurées.

L'objet de la soustraction, opération inverse de l'addition, est une autre économie d'action, point n'est besoin d'y insister.

Mais alors que l'opération: additionner deux nombres est toujours possible, quels que soient ces entiers, l'opération: soustraire un nombre entier d'un autre est parfois impossible.

D'un sac contenant douze noix, il est impossible d'en extraire vingt; l'opération douze noix moins vingt noix est dépourvue de sens.

C'est pour lever en mathématiques, pareille impossibilité que l'algèbre construit les nombres négatifs. Le résultat est le suivant: l'ensemble des nombres entiers positifs se prolonge à gauche par celui des négatifs dans l'ordre inverse, de manière à présenter la suite doublement indéfinie.

$$\dots - 4, - 3, - 2, - 1, 1, 2, 3, 4 \dots$$

La loi de formation des termes de cette suite est la suivante: chaque terme surpasse le précédent d'une unité.

Elle laisse un vide entre $+ 1$ et $- 1$, où il y a place pour un symbole correspondant à une collection d'unités épuisée, c'est-à-dire au néant, dans l'ordre d'abstraction où figurent les

nombres entiers, positifs et négatifs. Ce symbole, le zéro, peut-il être considéré comme un nombre ?

La symbolique arithmétique permet de traiter zéro comme un nombre dans l'addition et la soustraction; ce qu'exprime:

$$N \pm (a - b) = N \quad \text{si} \quad b = a ;$$

car la double opération laisse N inchangé, lui impose un changement qui est le néant. Le symbole 0 jouant alors le rôle généralisé d'un nombre, on l'exprime en disant que 0 est un nombre.

Mais dans la multiplication et la division, le rôle du zéro n'est pas toujours le même que celui d'un entier abstrait d'une collection d'unités ou d'une suite d'actions, d'opérations. Partons de la définition de la multiplication réalisable par déplacements d'objets ou de l'opérateur; multiplier un nombre entier (multiplicande) par un autre (multiplicateur), c'est réaliser la somme d'autant de collections symbolisées par le premier nombre qu'il y a d'unités dans le second. Zéro ne peut donc être multiplicateur, mais on peut lui faire jouer celui de multiplicande, car il est un nombre dans l'addition: on aura $0 \times a = 0$, quel que soit l'entier a . Convenons — par un acte de notre volonté dirigée vers l'élimination des exceptions aux règles de calcul — d'appliquer au produit $0 \times a$ le théorème: l'interversion des facteurs d'un produit conserve le produit; il en résultera que $a \times 0 = 0$, parce que, nous le répétons, nous l'avons voulu ainsi ¹.

Reste la division; quel est le rôle d'un diviseur zéro ? Remarquons que chaque terme de la suite des entiers:

$$\dots - 4, - 3, - 2, - 1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

possède un inverse fractionnaire, *sauf* 0. L'ensemble dénombrable

$$\dots - 1/4, - 1/3, - 1/2, - 1, 1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots$$

¹ Notre volonté est orientée par une condition d'ordre pratique: que les conséquences du théorème invoqué soient telles que les relations algébriques soient pratiquement valables lorsque, obtenues par des raisonnements partant sur des multiplicateurs entiers non nuls, on y annule tel facteur, des situations particulières excluant ce facteur. La même condition d'ordre pratique, dans le calcul des quaternions où figurent deux symboles mathématiques: i et j , exige la relation $ji = -ij$, qui nie la conservation d'un produit par inversion des facteurs.

présente donc une lacune. L'objet du symbolisme infinitésimal que nous aurons à considérer plus loin, est de combler cette lacune.

IV

Une seconde extension de la notion de nombre s'introduit par la division des entiers, opération inverse de la multiplication. Sous sa forme intuitive, manuellement réalisable, la division d'un groupe d'objets en sous-groupes partiels égaux n'est pas toujours possible; l'opération reste inachevée en présence d'un sous-groupe plus petit que les autres, le *reste* de la division. Il est nécessaire, au point de vue pratique comme pour la généralité des théories, de dissiper cette irrégularité. On y est parvenu en construisant la notion de *fraction*. Est-elle toujours introduite de manière à en faire comprendre le mécanisme et à en faire entrevoir la richesse ?

Une maîtresse de maison fait acheter une tarte chez le pâtissier, pour la réception d'amis. L'unité d'*achat* est la tarte entière. Si la tarte est partagée en six morceaux à peu près égaux, en vue de sa consommation par les amis, l'unité de *consommation* est le sixième de tarte; si les consommateurs sont au nombre de quatre, il reste sur le plat *deux sixièmes* de la tarte: le premier mot, *deux*, énonce le nombre des unités de consommation restantes (à remarquer que l'idée de reste n'est pas la même que dans l'expression de reste d'une division); c'est le *numérateur* de la fraction; le second mot, *sixièmes* (de la tarte), rappelle et l'unité d'achat, et le nombre des parties en lesquelles cette unité a été partagée pour constituer l'unité de consommation; c'est le *dénominateur* de la fraction. Les deux termes de la fraction ont donc des fonctions nettement différentes; ils seront traités différemment dans les calculs.

Ceci compris, l'addition et la soustraction des fractions ne présenteront pas d'obstacles durables, moyennant peut-être un nouveau changement d'unité, une réduction à un dénominateur commun.

Aussi n'est-ce pas dans ces opérations que trébuche l'enfant venu de l'école primaire à la théorie et la pratique du calcul des fractions.

Mais la multiplication par un multiplicateur fractionnaire présente une difficulté à mettre clairement en lumière. Dans le passé de cet enfant, multiplier un nombre par 12, par exemple, c'est faire (par une technique abrégée) la somme de douze nombres égaux au multiplicande (entier ou fractionnaire). Mais, qu'est-ce que multiplier un nombre par une fraction, opération à laquelle ne s'applique pas la définition qui vient d'être rappelée?

Considérons deux problèmes concrets analogues.

Voici le premier: j'ai acheté 3 m de ruban à 7 fr. 50 le mètre; quelle somme ai-je payée? La somme demandée est le produit de 7 fr. 50 multipliée par 3.

Changeons l'une des données du problème, en achetant une fraction de mètre de ruban, soit $\frac{3}{5}$ m. Nous résoudrons le problème en passant par une unité auxiliaire, le cinquième de mètre; nous raisonnons ainsi:

1 m de ruban coûte 7,50 fr.
 $\frac{1}{5}$ m de ruban coûte 7,50 fr. : 5 (ou le cinquième de 7,5)
 $\frac{3}{5}$ m de ruban coûtent $\frac{7,50}{5}$ fr. \times 3 (ou les trois cinquièmes de 7,50 fr.).

Nous voyons qu'après un transfert au multiplicande du dénominateur du multiplicateur, nous sommes en état d'énoncer et d'appliquer la règle, qui est celle d'une multiplication, addition abrégée conformément à la définition rappelée.

Pourquoi cette double opération — dont les deux parties peuvent être interverties — s'appelle-t-elle, du nom de l'une des parties, une multiplication? Parce que la partie finale est une multiplication, au sens de la première définition de cette opération. Le même mot *multiplier* appliqué à un nombre peut déterminer un nombre plus grand, en accord avec le sens vulgaire du mot multiplier, ou un nombre plus petit. Cette bivalence du mot n'est-elle pas assimilée sans trouble par une intelligence enfantine; elle nous paraît être la cause de l'insécurité du calcul par fractions chez le jeune enfant. Pareille bivalence n'est pas en cause à propos de l'addition ou de la soustraction des fractions, généralement pratiquée sans autre hésitation une fois les fractions réduites au même dénominateur.

Dès que le sens de l'opération: multiplication par une fraction, est bien compris, il n'y a aucune difficulté à y appliquer la

règle des signes d'un produit de facteurs monômes. Puis le rôle le plus général de la division, opération inverse de la multiplication, peut être abordé en évitant les hésitations encore fréquentes chez des enfants de quatorze ans.

L'imparfaite assimilation de la multiplication par une fraction a sa répercussion sur celle de la division par une fraction. Exécuter une division par une multiplication reste rebutant pour un enfant dont le langage est encore celui de la conversation courante et pour qui la notion de nombres inverses n'est pas encore familière. Pourquoi ne pas enseigner que pour diviser une fraction par une fraction, on les réduit au même dénominateur (opération habituelle dans l'addition et la soustraction), puis l'on divise le numérateur du dividende par celui du diviseur ? il n'est pas difficile à l'enfant de comprendre que $\frac{13}{16}$ est contenu dans $\frac{29}{16}$ autant de fois que 13 m dans 29 m. Perte de temps, dira-t-on, puisque l'on complique des nombres que l'on aura à simplifier ensuite ! Oui, mais compensée par une sécurité d'action qui évite les erreurs et par conséquent, donne confiance au jeune calculateur ; bref, gain de temps au total.

V

Outre ses quatre opérations fondamentales, l'arithmétique en étudie deux autres, inverses l'une de l'autre : l'élévation aux puissances et l'extraction des racines.

La première, formation du produit de facteurs égaux, positifs ou négatifs, entiers ou fractionnaires, est toujours réalisable, mais la seconde présente deux cas d'impossibilité, pour lesquels deux symboles nouveaux ont été créés.

1. Le nombre donné est tel qu'il n'y a ni nombre entier ni nombre fractionnaire qui en soit la racine cherchée. Par exemple, 2 n'est carré ni d'un entier ni d'une fraction ; 2 n'a pas de racine carrée parmi les nombres envisagés jusqu'ici. Mais on a observé qu'il est possible de construire une suite croissante de nombres (1 ; 1,4 ; 1,41 ; 1,414 ...) dont les carrés, également croissants, sont moindres que 2, et une suite décroissante de nombres (2 ; 1,5 ; 1,42 ; 1,415...)

dont les carrés, également décroissants, sont supérieurs à 2; cependant aucun terme de la première suite n'a un carré surpassant celui d'un terme quelconque de la seconde; par contre, aucun terme de la seconde n'a un carré inférieur à celui d'un quelconque de la première; et l'on peut aller assez loin dans chacune des deux pour y trouver deux termes de même rang dont la différence soit aussi petite que l'on veut, par exemple moindre qu'une unité décimale du millionième ordre. On exprime l'ensemble de ces faits en disant que les deux suites dénombrables en question ont une limite commune, qu'on nomme la racine carrée de 2 et qu'on écrit $\sqrt{2}$. Ce symbole est donc défini par la relation $(\sqrt{2})^2 = 2$; on le nomme un nombre *irrationnel* (les entiers et les fractions étant *rationnels*)

2. Dans d'autres cas, le nombre donné est tel que la construction, à partir de lui, d'un nombre irrationnel soit impossible. Le plus simple de ces cas est celui où se pose le problème: quelle est la racine carrée de -1 ? Elle n'existe pas, même comme symbole irrationnel, puisqu'on ne peut reproduire le processus précédent, le carré d'un nombre positif ou négatif étant positif.

C'est pour ces cas que l'on a créé le symbole $i = \sqrt{-1}$, auquel on a imposé les règles de calcul exprimées par:

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = +i, \text{ etc.}$$

Les symboles composés au moyen de i obéissent moyennant cette convention, aux règles de calcul des symboles antérieurs. On les nomme des nombres *imaginaires*, par opposition à l'ensemble des nombres rationnels et irrationnels, qui est celui des nombres *réels*. Un symbole tel que $a + bi$, dont le premier terme est réel et le second imaginaire, est souvent dénommé nombre *complexe*.

VI

Nous n'avons pas encore résolu le problème réservé à la fin de l'alinéa III: intégrer aux mathématiques le fait exception-

nel que le nombre 0 n'a pas d'inverse, donc, que les nombres fractionnaires de la forme :

$$\frac{a}{b - c}$$

cessent d'exister si $c = b$ avec $a \geq 0$.

Reprenons l'intervalle de -1 à $+1$ dans l'ensemble dénombrable des entiers. Dans cet intervalle prennent place les inverses de tous les nombres entiers, tant négatifs que positifs. Rangés par ordre de grandeur croissante (au sens algébrique de ce qualificatif), ils se présentent ainsi :

$$-1, -1/2, -1/3, -1/4, \dots 1/4, 1/3, 1/2, 1.$$

Cet ensemble transfini dénombrable des inverses des entiers est un sous-ensemble du continu; en effet, soit par exemple une droite infinie graduée dans les deux sens à partir de 0; l'ensemble de ses points a la puissance du continu; à chaque terme de l'ensemble des inverses des entiers correspond un point, et un seul de la droite, celui qui a ce terme pour abscisse.

Mais d'un ensemble ayant la puissance du continu, on peut extraire un ensemble transfini dénombrable de sous-ensembles dont chacun est dénombrable; en voici un second exemple :

$$-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \dots \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1$$

et le lecteur multipliera aisément les exemples, à volonté.

Dans chacun, on peut imaginer un terme positif ou négatif aussi petit que l'on veut, en valeur absolue; la partie négative comme la partie positive de l'intervalle $(-1, +1)$ a pour limite 0.

Si, arrivés là, nous acceptons le *postulat* suivant: *ce qui est vrai de tous les ensembles dénombrables, qui sont des sous-ensembles d'un ensemble E ayant la puissance du continu, reste vrai de cet ensemble E*, nous construirons, par des passages à la limite, le calcul différentiel et le calcul intégral.

VII

Depuis Descartes, l'algèbre sert à étudier des lignes et des surfaces, considérées comme des ensembles transfinis de points,

ayant la puissance du continu; ce qui a été possible, grâce au fait signalé plus haut: il existe une correspondance biunivoque entre les points d'une ligne ou d'une surface et les termes de l'ensemble des nombres réels. L'exploitation de ce fait, par Descartes et ses continuateurs, a valu à la géométrie et à la mécanique, le développement considérable qui les ont enrichies depuis le xvii^e siècle.

C'est le moment pour nous de faire remarquer le caractère abstrait, symbolique si l'on veut, des êtres géométriques par rapport aux êtres réels du monde physique.

Les êtres géométriques, lignes et surfaces, sont abstraits des réalités sensibles; cette abstraction leur donne le caractère d'êtres dont les ensembles sont transfinis; car on peut en concevoir et en définir autant de sous-ensembles que l'on veut, chaque définition d'une ligne ou d'une surface étant celle d'un ensemble transfini, ne fût-ce que parce que cette ligne ou surface peut être imaginée à telle échelle que l'on veut.

Comment se forment les concepts géométriques à partir du concret sensible? Soit le concept *ligne droite*. On le présente aux débutants en géométrie à partir d'un fil tendu entre deux points plus ou moins éloignés: d'abord une ficelle assez épaisse pour être vue de toute la classe, puis de fils plus fins observés par des groupes d'élèves, encore par le rappel de souvenirs, par exemple un fil tendu entre deux nœuds d'une toile d'araignée. La synthèse des observations de pareils objets est formulée soit dans la définition négative d'Euclide («longueur sans largeur également interposée entre ses points» — traduction Peyrard), soit dans celle plus compréhensive d'Archimède («la droite est la plus courte des lignes ayant les mêmes extrémités» — traduction Ver Eecke).

Soit, parmi les surfaces, celles que les manuels, traditionnellement, proposent la première à l'étude: *le plan*.

Quelles opérations permettent de classer parmi les plans la surface d'une table bien dressée ou celle d'un miroir? Un fil fixé à un point du contour, puis tendu peut balayer cette surface sans être déformé par des aspérités ni sans enjamber des creux, c'est-à-dire, en restant en contact par chacun de ses points avec la surface de la table ou du miroir; et ceci pour deux

points d'attache différents au contour (une surface conique réalisant cette condition pour un seul de ses points, le sommet). Reproduite par l'imagination, en faisant abstraction de l'épaisseur du fil et en imaginant la surface prolongée indéfiniment tout en conservant la même propriété, cette expérience a pour conclusion le concept de *plan indéfini*.

Si l'on remarque que, sur la Terre approximativement sphérique, ce travail d'imagination ne peut être effectivement réalisé, on est à l'une des sources possibles de la relativité einsteinienne.

Nous pourrions redire de toute autre ligne ou surface géométrique quelque chose d'analogue, si la nature offrait à notre observation beaucoup d'occasions de faire pareil travail. En fait, la géométrie construit ses surfaces à partir de lignes et ses lignes à partir de points. Le point étant, selon Euclide, ce qui n'a aucune partie, la géométrie est fondée sur ce paradoxe : construire toute étendue à partir de ce qui n'a pas d'étendue. On s'étonne que les sceptiques n'aient pas autrement exploité ce paradoxe !

VIII

Ce n'est pas à un sceptique qu'est dû un autre paradoxe, celui du philosophe anglais Bertrand Russell : « En mathématiques, on ne sait jamais de quoi l'on parle ni si ce qu'on dit est vrai. »

C'est l'algèbre que vise ce paradoxe, et c'est à travers l'algèbre appliquée à la géométrie qu'il atteint cette dernière.

On ne sait de *quoi* l'on parle en mathématiques, si *quoi* désigne un objet sensible. Une fois mis en équation le problème dont l'énoncé nomme de pareils objets, l'algébriste ne manie plus que des symboles substitués aux objets ; il ne reviendra à ces derniers que pour interpréter en physique, en chimie, en finances, en statistique... le résultat de ses combinaisons de symboles. Et le paradoxe de Russell disparaît alors, parce que les symboles algébriques ont été dotés de propriétés appartenant au moins approximativement à des réalités : celles d'égalité et celles d'addition.

Mais l'égalité et l'addition algébriques sont conçues comme rigoureuses: deux symboles égaux sont substituables l'un à l'autre sans aucune altération dans la relation symbolique où ils figurent. Dans la réalité physique, il n'y a pas d'objets rigoureusement égaux: dans la construction de précision, la tolérance au centième de millimètre implique une inégalité mathématique en même temps qu'une équivalence pratique incontestée; pour qui les compte un à un, il n'y a pas de grains de café égaux, mais qu'importe à leur total ?

L'addition de deux symboles algébriques est la conservation absolue des parties dans le tout. Mais on ne réunira pas dans un même sac le café contenu dans deux plus petits sans que quelque poussière ou quelque grain égaré manque au contenu du grand sac, somme de ceux des plus petits.

Ces écarts entre les réalités et leurs symboles sont inexistants pour l'algébriste; de quelque réalité physique qu'il semble s'occuper, il ne changera rien à ses combinaisons de symboles; au physicien de trier celles qui conviennent à la réalité sous-entendue. L'algèbre pure n'a pas besoin de savoir à quelles réalités on l'appliquera, de savoir de *quoi* elle parle.

Ce qu'elle dit est-il *vrai* ou non ? Il est vrai d'une vérité logique si le calculateur a observé strictement les règles du jeu; et cela peut-être parce que la logique a eu pour premier modèle la géométrie. Mais lorsqu'on cherche par l'algèbre la solution d'un problème physique portant sur des réalités, l'appréciation de vérité est moins simple, moins absolue.

Observons l'ingénieur qui élabore le projet d'un pont. Il introduit dans ses calculs les dimensions du pont (en nombres qui diffèrent de quelques millimètres avec les dimensions réelles), la masse et la vitesse des charges qui se déplaceront sur le pont, les efforts du vent auxquels le pont devra résister, etc... Il combine ces éléments au moyen de formules de résistance des matériaux, formules que l'algébriste a obtenues à partir d'hypothèses sur les actions moléculaires — non sensibles — engendrées par les déformations des pièces du pont; le résultat est exprimé à peu près comme ceci: « pour que le pont en service résiste dans les conditions les plus dures, il faut donner aux pièces telles dimensions et les assembler de telles manières ». Que vaut

pareille conclusion, pareille prédiction, fondée sur le maniement de symboles dont les substituts physiques n'ont pas été retenus dans l'élaboration du projet ? Il s'y attache une large part de confiance, parce que de multiples ponts ayant un passé semblable ont tenu en service; nous savons d'ailleurs que les dimensions des pièces du pont ne seront qu'à *quelques millimètres près* celles que le calcul a indiquées; l'ingénieur les a d'ailleurs multipliées par un coefficient de sécurité peut-être important.

Un *à peu près* apparaît aussi dans la solution mathématique de matières inaccessibles à nos mains. Un problème fondamental de l'astronomie, par exemple, est la détermination *exacte* des positions des astres aux instants d'un avenir plus ou moins étendu. L'histoire de l'astronomie nous apprend que l'idéal d'exactitude a été si peu atteint qu'il est à peine énonçable. Les astronomes ont dû se contenter de positions approximatives qu'ils ont su telles parce qu'il existait un écart appréciable entre les positions prévues pour le calcul pour un instant donné — à venir pour le calculateur — et les positions constatées à l'approximation près des instruments — positions présentes ou passées pour les successeurs du calculateur. Les efforts se sont portés vers une meilleure approximation dans deux domaines distincts: dans le domaine physique, par la construction d'instruments plus puissants; dans le domaine mathématique, par la construction de méthodes capables de conduire à des écarts plus étroitement limités entre les résultats du calcul et ceux des observations.

Dans le champ des applications astronomiques, comme dans d'autres champs de la pratique, les mathématiques et la technique des instruments de précision peuvent s'appeler des sciences de l'*à peu près*, sans aucune intention péjorative, en ce sens qu'un de leurs buts constants est l'épuisement graduel de l'*à peu près*, l'obtention d'approximations de plus en plus étroites — sans d'ailleurs qu'on puisse espérer jamais la réduction de l'*à peu près* à zéro.

C'est là, je crois, le sens de la seconde partie du paradoxe de Russell; la vérité *physique* des résultats ne coïncide jamais avec la vérité *logique* des calculs qui ont conduit à les prévoir. Dans le champ des applications, le rôle des mathématiques est celui d'un instrument de prévision de l'avenir d'un objet céleste

ou terrestre; elles sont un outillage de prophète, mais d'un prophète qui ne prétend pas à une coïncidence absolue entre ses prophéties et ses réalisations.

IX

Le paradoxe de Russell n'a pas arrêté les hommes de science dont le travail a pour but l'application des mathématiques pures à l'étude de phénomènes du monde physique ou des sociétés humaines.

Pour rendre les mathématiques plus maniables dans pareille étude, qui reprend quelque élément du concret, ils ont conçu et mis en œuvre d'autres symboles, dont nous signalerons un seul ici. Le lecteur a conservé souvenir des notions de mécanique qui ont formé le premier chapitre de son premier cours de physique. Il y a appris à manier le *vecteur*: segment de droite orientée dans un plan, à partir du point représentant le point d'application d'une force, suivant la droite que la force ferait parcourir à ce point si elle agissait seule et dans le sens où elle entraînerait ce point; la longueur donnée au vecteur étant proportionnelle à l'intensité de la force à symboliser.

On voit apparaître ici la condensation en un symbole unique d'éléments géométriques et d'éléments mécaniques mis simultanément en cause dans l'étude des mouvements. La notion *vecteur* est donc plus concrète ou moins abstraite que chacune des notions *droite* et *mouvement* réunies dans sa définition.

La science moderne de l'électricité a recours à d'autres concepts, unissant des concepts géométriques avec d'autres, tirés de l'analyse des phénomènes électriques. C'est à l'invention et à l'usage de pareils concepts composés, à l'enrichissement du symbolisme physico-mathématique que sont dus les progrès étonnants des conceptions modernes de la mécanique et de la physique.

Ainsi, entre les réalités et les êtres mathématiques abstraits s'est opéré, par l'intermédiaire d'un système de symboles, un échange de services en deux sens: la réalité physique manipulée est à l'origine de tous les développements des mathématiques pures: comptage et mesurage sont les deux mamelles de celles-ci,

pour copier une métaphore d'Olivier de Serres. En revanche, la richesse des résultats abstraits des mathématiques alimente de plus en plus efficacement l'étude des réalités physiques et humaines, dans les domaines les plus variés des sciences vouées à cette étude, et ce, en vue d'orienter l'activité humaine capable s'agir sur ces réalités pour en faire les instruments de buts humains.

LA GÉOMÉTRIE SENSIBLE

(3^{me} article) ¹

PAR

† Johannes HJELMSLEV (Copenhague).

LA GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

I. LES DEUX TABLEAUX.

1. — L'enseignement préliminaire de la géométrie dans l'espace s'effectue au moyen d'exercices pratiques. On emploie deux tableaux, le tableau vertical et le tableau horizontal. Ils se rencontrent le long d'une droite x . Nous nous servons de ces tableaux pour l'orientation dans l'espace (le dièdre normal) qu'ils limitent pour déterminer la position de points, de lignes et de plans dans cet espace, et pour effectuer des constructions. D'autre part on se sert, en plus des instruments habituels pour dessiner, d'une brique normale, d'un triangle rectangle (triangle normal), d'une planchette rectangulaire (planchette normale) sur laquelle on peut dessiner et avec laquelle on peut dresser des plans (et par là des figures planes) dans des positions différentes.

¹ Pour les deux premiers articles, voir *L'Ens. math.*, t. 38, pp. 7-26 et pp. 294-322.