Zeitschrift: Jahrbuch der Sekundarlehrerkonferenz des Kantons Zürich

Herausgeber: Sekundarlehrerkonferenz des Kantons Zürich

Band: - (1929)

Artikel: 3 Kapitel Algebra : 66 Aufgaben für die III. Sekundarschule samt Lösungen

Autor: Weiss, R.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-819525

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

3 Kapitel Algebra

66 Aufgaben für die III. Sekundarklasse

samt Lösungen

Von

RUD. WEISS

Sekundarlehrer, Zürich 1

1929

Verlag der Sekundarlehrerkonferenz des Kantons Zürich

BENÜTZTE LITERATUR.

Maurer, Geometrische Aufgaben in bildlicher Darstellung.
Speidel & Wurzel, Zürich.

Könnemann, Rationale Lösungen.
Winckelmann & Söhne, Berlin, 1915.

Vorwort.

Die vorliegende kleine Sammlung von größtenteils angewandten Aufgaben ist aus dem Bedürfnis heraus entstanden, die wichtigsten algebraischen Formeln, deren sichere Kenntnis wir von einem Schüler der III. Sekundarklasse fordern müssen, an wertvollen und interessanten Beispielen anwenden zu können. Es handelt sich in den 3 Kapiteln um die nachstehenden drei Formeln:

1. $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$
2. $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$
3. $(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2$

Dabei ist Anwendung streng zu scheiden von Übung. Wir glauben oft, anzuwenden, wo wir bloß üben, und wir glauben oft, Algebra zu treiben, wo wir höchstens algebraische Ausdrücke nach vorgeschriebenem Gesetz aneinander reihen. Das ist aber eine Übung, die an mathematischem Bildungswert demjenigen einer mechanischen Multiplikation vergleichbar ist. Anwendung bedeutet mehr, viel mehr. Das Lösen von angewandten Aufgaben fördert in hohem Maße die mathematische Schulung, stellt aber Anforderungen an die Denkfähigkeit und ist darum bedeutend schwerer als das mechanische Üben. Sollen wir deshalb darauf verzichten? Sollen wir nur üben, d. h. uns damit begnügen, mit den Buchstaben des Alphabetes sozusagen ein „gedankenloses“ Zusammensetzspiel zu treiben? Was könnte es mehr sein?! Wir dürfen und können doch vom Schüler nicht erwarten, daß er sich unter den Buchstaben, mit denen er operieren soll, etwas Vernünftiges vorstelle, wenn wir ihm nicht zeigen, was der einzelne Buchstabe im praktischen Beispiel bedeuten kann. Erst wenn er durch Anwendungsaufgaben erfährt, daß a bald die Maßzahl der Seite eines Quadrates, bald Kathetenmaßzahl in einem rechtwinkligen Dreieck oder ein drittes Mal eine „reine“ Zahl sein kann, kommt ihm zum Bewußtsein, daß das a ein Zeichen für eine allgemeine Zahl ist. Wenn wir aber von Anfang an und bewußt oder unbewußt darauf verzichten, das Zeichen a mit einem Inhalt zu füllen, dann wird es für den Schüler nur das sein, was es für ihn von jeher gewesen ist, ein toter Buchstabe.

Anwendung und Übung gehören also zusammen, sie sollen auch nicht nacheinander, sondern müssen miteinander betrieben werden.

Die vorliegenden Aufgaben sind nicht etwa als Einführung in einen ersten Algebraunterricht gedacht. Es werden eine Reihe von Voraussetzungen gemacht, welche hier kurz zusammengestellt sein mögen. Dem Schüler müssen die nachstehenden „Sätze" bekannt sein:

1. $3a \cdot 5b = 15ab$	4. $a(b+c) = ab+ac$
2. $(2a)^2 = 4a^2$	5. $(a+b)+(a-b) = 2a$
3. $\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{c^2}{4}$	6. $(a+b)-(a-b) = 2b$

Bei einer Aufgabe [III/Nr. 121] ist Kenntnis des Flächengesetzes ähnlicher Figuren notwendig.

Daß die überwiegende Anzahl von Aufgaben dem Lehrstoff der Geometrie, insbesondere dem Kapitel: Rechtwinkliges Dreieck entnommen ist, liegt in der Natur der Formeln begründet, deren Anwendungen hier vorliegen. Die Auffrischung geometrischer Kenntnisse, die dabei nebenher läuft, ist wohl ein willkommener Vorteil. Die wiederholte Repetition der Flächensätze des rechtwinkligen Dreiecks durch algebraische Beweise, die dem Schüler neu sind, bürgt dafür, daß die sichere Kenntnis dieser wichtigen Beziehungen auch in der III. Klasse erhalten bleibt.

Die Ergebnisse sind absichtlich etwas ausführlicher gehalten, als es sonst Brauch ist. Es sind nicht nur die Schlußergebnisse, sondern auch Zwischenresultate und in vielen Fällen sogar die ganze Lösung angegeben. Das wird für die Durchsicht der schriftlichen Arbeiten seine Annehmlichkeit haben. Ich hoffe, damit besonders denjenigen Kollegen einen Dienst zu erweisen, denen es wegen Mangel an Zeit nicht möglich ist, sich selber ein ausführliches Ergebnisheft anzulegen. Mögen die Aufgaben fleißig verwendet werden!

Rud. Weiß.

1. Vom Quadrat über der Summe zweier Strecken.

$$(x + y)^2 = ?$$

1. Die Seiten eines Spielplatzes von quadratischer Form sollten eine Länge von 38,5 m erhalten. Die Nachprüfung ergab aber eine Länge von nur 38,3 m. Um wie viele m^2 war demzufolge die Spielfläche zu klein? Berechne den Fehlbetrag auf zwei Arten!

---

2. Ueberlege Dir an Hand von Skizze 1, um welchen Betrag die Fläche eines Quadrates von 4 cm Seitenlänge zunimmt, wenn die Seiten um 0,2 bzw. 0,4, 0,6 und 0,8 cm usw. wachsen!

   Stelle diese Flächenzuwüchse in einer Tabelle zusammen, und versuche einen angenäherten Wert für denjenigen Seitenzuwachs anzugeben, der einem Flächenzuwachs von der Größe des ursprünglichen Quadrates (= 16 cm^2) entspricht.

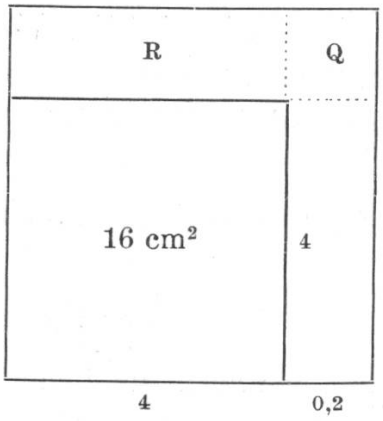


Fig. 1.

Tabelle.

Seitenzuwachs	2 R	Q	Flächenzuwachs
0,2	1,6	0,04	1,64
0,4	3,2	0,16	3,36
0,6	4,8	0,36	5,16
	usw.		

---

3. Wenn man die Seite x eines Quadrates um die Strecke y verlängert, welches ist dann der Flächenzuwachs und welches der neue Flächeninhalt?

---

4. Gib ebenso die Flächenzuwüchse für die Quadrate mit den Seiten a, 2 m und 3 u an und zwar je für die nachfolgenden Seitenzuwüchse: b, n, 4.

Alte Seite	Neue Seite	Flächenzuwachs
a	$a + b$	$2ab + b^2$
a	$a + n$	?
$3u$	$3u + 4$	?

5. Auf welche zwei Arten kannst Du nunmehr den Flächeninhalt eines Quadrates mit der Seite $(x + y)$ angeben?

Drücke das durch eine Gleichung aus! Gib in entsprechender Weise die Flächengleichung für die Quadrate mit den folgenden Seiten:

Seite	Fläche
$(m + n)$	?
$a + x$	?
$r + q$	?
$a + 2$	?
$b + 5$	?

6. Durch die Gleichungen in Aufg. 5 wird folgendes ausgedrückt:

Das Quadrat über der Summe zweier Strecken a und b läßt sich immer zerlegen in vier rechtwinklige Vierecke, nämlich die beiden Quadrate über den einzelnen Strecken a und b und zwei kongruente Rechtecke mit den Seiten a und b.

Dieselben Gleichungen lassen sich aber auch noch anders deuten. Betrachtet man in der Gleichung

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \quad | \qquad S^2\text{-Formel}^1$$

das x und das y nicht als Strecken, sondern als beliebige Zahlen, dann läßt sich der Inhalt der Gleichung auch so ausdrücken:

Man findet das Quadrat der Summe zweier Zahlen x und y, indem man jeden Summanden quadriert und zur Summe dieser Quadrate das doppelte Produkt der beiden Summanden addiert.

Die Bedeutung dieser zweiten Auslegung wird am besten an einem Zahlenbeispiel klar.

Wir wollen 107^2 berechnen. Um sicher zu sein, daß wir das richtige Ergebnis finden, berechnen wir es auf zwei

[1] S^2-Formel ist die Gleichung, die zeigt, wie eine Summe in die 2. Potenz gesetzt wird.

grundverschiedene Arten: 1. durch gewöhnliche Multiplikation, 2. mit Hilfe der eben hergeleiteten S^2-Formel.

1.
$$\begin{array}{r} 107 \cdot 107 \\ \hline 1070 \\ 749 \\ \hline 11449 \\ \hline \end{array}$$

2.
$$\begin{aligned} 107 &= 100 + 7 \\ & \quad\;\; x \quad\;\; y \\ x + y &= 100 + 7 \\ \hline x^2 &= 10000 \\ y^2 &= 49 \\ 2x \cdot y &= 1400 \\ \hline x^2 + 2xy + y^2 &= 11449 \\ \hline \end{aligned}$$

---

7. Berechne in gleicher Weise auf zwei Arten die zweiten Potenzen von allen ganzen Zahlen zwischen 20 und 50!

---

8. Zeige am Beispiel der Zahl 30, daß die Art der Zerlegung in Summanden eine ganz beliebige sein kann, daß also z. B. die Berechnung von

$$(24 + 6)^2 \qquad (19 + 11)^2 \qquad (17 + 13)^2$$

nach der S^2-Formel zum selben Ergebnis führt!

---

9. Was fällt Dir bei der Berechnung von 25^2, 35^2, 45^2, 55^2, 65^2 usw. auf?

---

10. Wie läßt sich die Berechnung der Quadrate von Zahlen, deren Einer = 5 sind, nach den Erfahrungen von Nr. 9 noch vereinfachen?

Anleitung:

$$65^2 = (60 + 5)^2 = \underbrace{60 \cdot 60 + 10 \cdot 60}_{\text{Statt dessen?}} + 25$$

Berechne nun: 45^2, 55^2, 75^2, 85^2, 95^2, 105^2, 115^2 im Kopf!

---

11. In einem rechtwinkligen Dreieck messen die beiden Katheten zusammen 105 cm und die Hypotenuse mißt 75 cm. Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks?

12. Von einem andern rechtwinkligen Dreieck, bei welchem die Hypotenuse c und die Kathete b zusammen 23,4 mm und die Kathete a 15,6 mm messen, soll neben dem Flächeninhalt auch die Höhe berechnet werden.

Anleitung.

$$b + c = 23{,}4$$
$$a = 15{,}6$$

$$\left.\begin{aligned}(b+c)^2 &= b^2 + c^2 + 2bc &&= 547{,}56\\ a^2 &= a^2 &&= 243{,}36\end{aligned}\right\}\ \text{addieren!}$$

$$\underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_{2c^2} + 2bc = 790{,}92$$
$$2c^2 + 2c \cdot b = 790{,}92$$
$$2c \cdot (c + b) = 790{,}92$$

usw.

23,4	. 23,4
468	
70	2
9	36
547	56

15,6	. 15,6
156	
78	0
9	36
243	36

Probe!

---

13. Der Umfang u eines Rechtecks mit den Seiten x und y mißt 46 cm und die Diagonale d 17 cm. Welches ist sein Flächeninhalt?

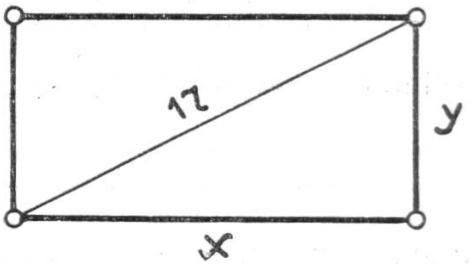


Fig. 2.

Anleitung:

$$2x + 2y = 46$$
$$x + y = 23$$

Jetzt die S^2-Formel verwenden und an den Pythagor. Lehrsatz denken!

Wenn Du den Flächeninhalt gefunden hast, gelingt es Dir vielleicht durch bloßes Probieren auch die Seitenmaßzahlen herauszubringen. (Es sind ganze Zahlen!)

Löse die gleiche Aufgabe mit folgenden Zahlen:

$$\left.\begin{aligned}u &= 204\\ d &= 78\end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned}u &= 124\\ d &= 50\end{aligned}$$

---

14. Einem Rechteck von 190 mm Umfang und 1500 mm^2 Inhalt ist ein Kreis umschrieben. Welches ist sein Radius?

15. Vermehrt man die Summe zweier Zahlen a und b um 9, dann wächst das Quadrat der Summe um 135. Der Unterschied der Zahlen ist 1.

---

16. Legt man die beiden Quadratflächen a^2 und c^2 so aneinander, wie Fig. 3 es zeigt, dann hat das umschriebene Quadrat einen Flächeninhalt von 2704 mm^2. Legt man sie aber so ineinander, wie Fig. 4 angibt, dann enthält der schraffierte Winkelstreifen 1976 mm^2. Wie lang sind die Seiten der Quadrate?

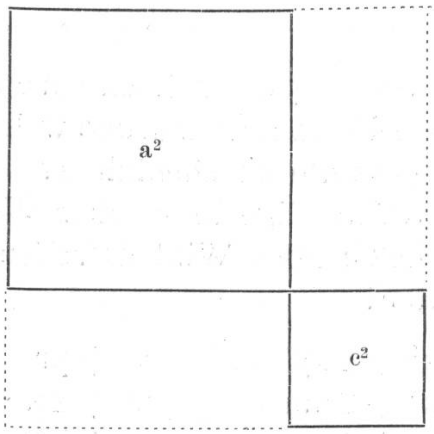


Fig. 3.

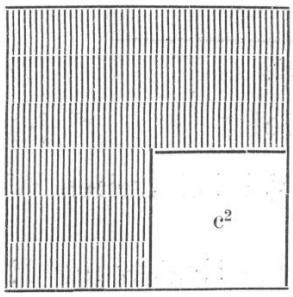


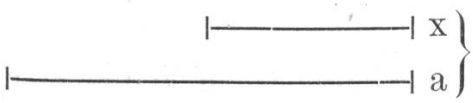
Fig. 4.

---

17. Ein Bataillon Soldaten, dessen Marschkolonne 884 m lang ist, biegt von der Hauptstraße in eine rechtwinklig zu ihr stehende Querstraße ein. Das Tempo der Kolonne beträgt 120 Schritte. Wenn nun in einem bestimmten Moment nach der Abbiegung der hinterste Mann der Kolonne einen bestimmten Akkord des Marsches der Bataillonsmusik genau 2 Sekunden später hört als der vorderste, wie viele Meter der ganzen Kolonne haben dann schon in die Querstraße eingebogen? (Die Schallgeschwindigkeit ist, um eine ganzzahlige Lösung zu erhalten, = 338 m anzunehmen.)

---

18. Gegeben seien die Strecken x und a.



Konstruiere Flächen mit den folgenden Maßzahlen:

a) $x^2 + ax$ c) $a^2 + 2ax$
b) $a^2 + ax$ d) $x^2 + 2ax$

1. in möglichst unregelmäßiger Form,
2. in Rechteckform,
3. in Form eines Winkelstreifens,
4. in Quadratform im Anschluß an 3!

---

19. Ergänze den Winkelstreifen von Fig. 5 zu einem Quadrat! Wieviel kommt hinzu, und welches ist der gesamte Flächeninhalt?

Vervollständige in gleicher Weise die nachstehenden Winkelstreifen zu Quadraten!

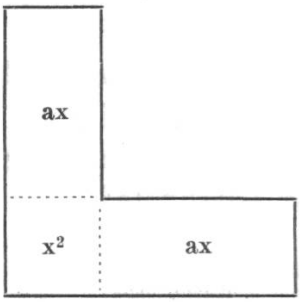


Fig. 5.

$x^2 + 2xy$	$x^2 + pr$
$m^2 + 2mn$	$x^2 + 2x \cdot 3$
$u^2 + 4u$	$u^2 + 7u$

Beispiel. $r^2 + pr + ? = (?)^2$

Winkelstreifen $W = r^2 + 2r \cdot \frac{p}{2}$

Quadratische Ergänzung $E = \left(\frac{p}{2}\right)^2$

Vollständiges Quadrat $= r^2 + 2r \cdot \frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(r + \frac{p}{2}\right)^2$

---

20. Multipliziert man eine gewisse Zahl x mit einer um 12 größern, so erhält man 288! Wie heißt die Zahl? (Versuche die Lösung unmittelbar im Anschluß an die Aufgaben von Nr. 19!)

---

21. Hast Du schon versucht, ein rechtwinkliges Dreieck aus der Kathete a und dem nicht anliegenden Hypotenusenabschnitt n zu konstruieren?! Löse nun diese Aufgabe durch Rechnung! $a = 60$
$n = 27$

Anleitung. Stütze Dich auf den Satz: $a^2 = mc$. Drücke c durch m und n aus!

Setze die Zahlen ein! Du erhältst einen Winkelstreifen.

22. Versuche das gleiche Problem in allgemeinen Zahlen zu lösen und benütze die Bezeichnungen der nebenstehenden Figur! Die Kathete b und der Abschnitt 2p sollen bekannt sein; x muß durch b und 2p ausgedrückt und hernach auf Grund des Ausdruckes konstruiert werden.

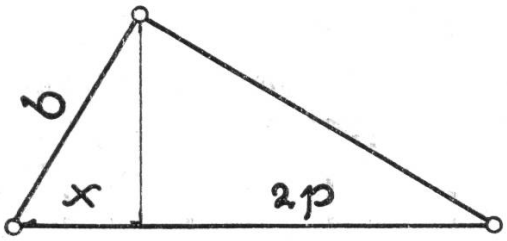


Fig. 6.

---

23. Fläche R''' = 1560.* Versuche aus diesen Angaben die Seite des umschriebenen Quadrates zu finden!

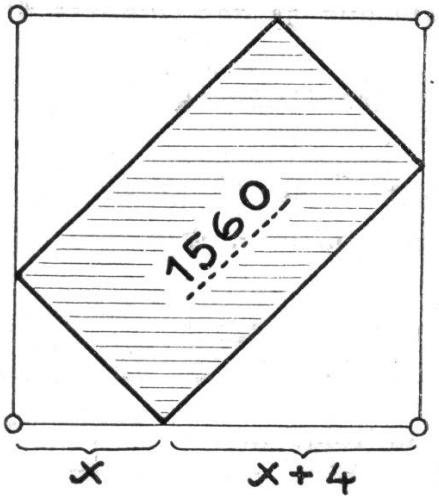


Fig. 7.

(2 hübsche Proben!)

---

24. Der Flächeninhalt eines Rechtecks beträgt 1215 cm². Wie lang sind die Seiten, wenn die eine um 18 cm länger ist als die andere?

---

25. Ein prismatisches Badebassin von quadratischer Grundfläche (s = 30 m) soll mit einem überall gleich breiten Rasenband umgeben werden, dessen Fläche gleich dem Dreifachen der Wasseroberfläche ist. Wie breit wird das Rasenband?

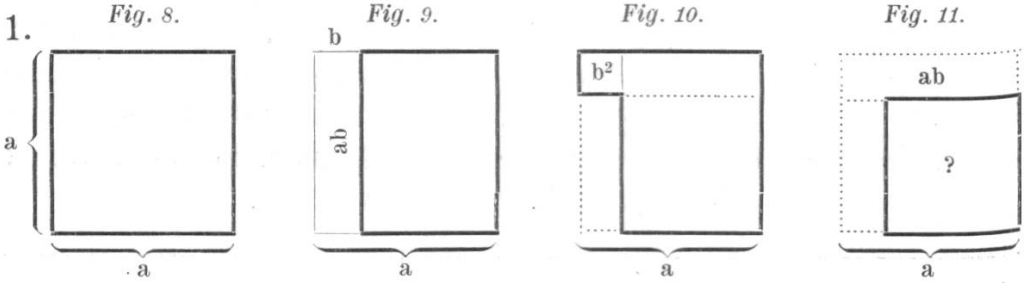
---

* R''' bedeutet das durch Schraffen kenntlich gemachte Rechteck.

2. Vom Quadrat über der Differenz zweier Strecken.

$(a - b)^2 = ?$

1.



a^2 $\quad$ $a^2 - ab$ $\quad$ $a^2 - ab + b^2$ $\quad$ $a^2 + b^2 - 2ab$

Diese Figuren zeigen, wie aus a^2 das Quadrat über der Seite $a - b$ entsteht:

Man schneidet zunächst das Rechteck mit dem Inhalt $a \cdot b$ weg.

Dann fügt man zum Rest wieder b^2 hinzu.
Endlich nimmt man nochmals $a \cdot b$ weg.

Daraus folgt:

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.^*$$

---

2. Betrachte die Fig. 12! Was folgt aus dieser Rahmenfigur für die Größe von $(a - b)^2$?

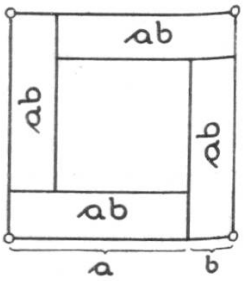


Fig. 12.

---

3. Zeige an Hand von Beispielen mit bestimmten Zahlen, daß die D^2-Formel für ganz beliebige Zahlenwerte gültig ist!

Beispiel. $\quad 99^2 = (\underset{a}{100} - \underset{b}{1})^2$

$$\begin{aligned} a^2 &= 10000 \\ b^2 &= 1 \\ \hline a^2 + b^2 &= 10001 \\ -2ab &= -200 \\ \hline (a - b)^2 &= 9801 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 99 \cdot 99 \\ \hline 891 \\ 891 \\ \hline 9801 \end{array}$$

---

* Diese Gleichung heißt die D^2-Formel; das D^2 soll darauf hinweisen, daß es sich um das Quadrat über der Differenz zweier Strecken handelt.

Berechne ebenso auf zwei Arten:

$19^2 = (20 - 1)^2$	$46^2 = (50 - 4)^2$
$28^2 = (30 - 2)^2$	$49^2 = (50 - 1)^2$
$37^2 = (40 - 3)^2$	$8{,}98^2 = (9 - 0{,}02)^2$
$(3^3/_4)^2 = (4 - {}^1/_4)^2$	$91^2 = (100 - 9)^2$
$(6^2/_3)^2 = (7 - {}^1/_3)^2$	$179^2 = (200 - 21)^2$

---

4. Berechne ferner die nachstehenden Quadrate:

$(x - y)^2$	$(2a - b)^2$	$(c - 1)^2$	$(q - r)^2$
$(3x - z)^2$	$(m - 2)^2$	$(n - {}^1/_2)^2$	$(r - 8)^2$

---

5. Schreibe die S^2-Formel und die D^2-Formel untereinander und vergleiche sie miteinander! Wie läßt sich das Ergebnis in Worten ausdrücken?

---

6. Wähle $a = 17$ und $b = 2$! Bilde nun $a + b$, $a - b$, $(a + b)^2$, $(a - b)^2$! Subtrahiere endlich von $(a + b)^2$ den Wert von $(a - b)^2$, teile sodann die Differenz durch 4! Was stellt der Quotient dar?

Mach noch vier eigene Beispiele!

---

7. Betrachte Fig. 13! Schreibe eine Gleichung für c^2 auf, in welcher lauter Flächen mit den Maßzahlen a und b vorkommen!

Welcher Dir wohlbekannte Lehrsatz der Geometrie läßt sich aus der Gleichung ableiten?

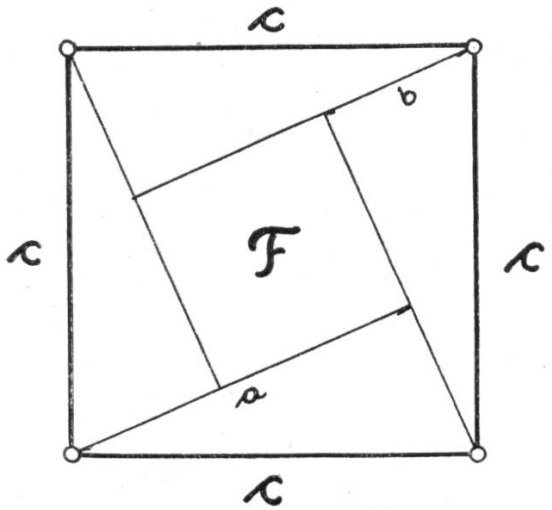


Fig. 13.

8. Der Unterschied zweier Zahlen beträgt 7; das Produkt ist 2058. Wie groß ist jede der beiden Zahlen?

Lösung.

$$\begin{array}{r|l} (a-b)^2 = 49 & a+b=\sqrt{8281}=91 \\ 4ab = 8232 & \\ \hline (a-b)^2+4ab = 8281 = (a+b)^2 & \begin{array}{l|l|l} a+b=91 & 2a=98 & 2b=84 \\ a-b=\ \ 7 & a=49 & b=42 \end{array} \end{array}$$

Probe!

---

9. Berechne in gleicher Weise die Zahlen x und y, m und n aus folgenden Angaben:

$$\begin{array}{r|r} x+y = 52 & m-n = 100 \\ xy = 555 & mn = 20301 \end{array}$$

---

10. In einem gewissen rechtwinkligen Dreieck teilt der Höhenfußpunkt die Hypotenuse so, daß die beiden Abschnitte m und n sich um 14 mm unterscheiden. Wie lang sind diese Abschnitte und die Hypotenuse, wenn die Höhe 24 mm mißt?

---

11. Berechne auf zwei verschiedene Arten die Hypotenusenabschnitte eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn Dir gegeben sind:

die Hypotenuse = 150 mm
die Höhe = 72 mm

---

12. Dem Quadrat Q^0 mit den „Ring"-Ecken ist das gleichseitige Dreieck aaa einbeschrieben. Wie lang sind x und a? Berechne dann zur Probe die Inhalte der 4 Dreiecksflächen, die zusammen das Quadrat Q^0 ausmachen müssen.

(900 mm^2!)

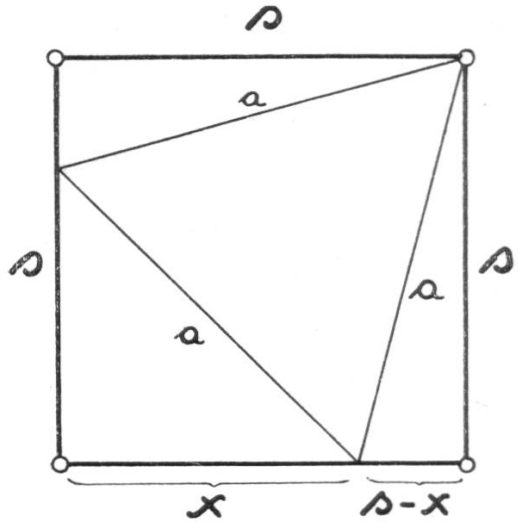


Fig. 14.

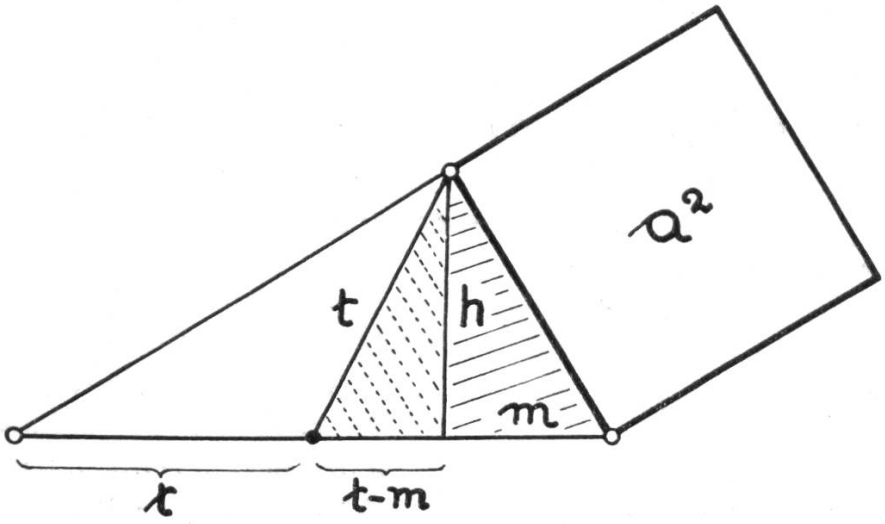


Fig. 15.

13. Die Fig. 15 ermöglicht es, das Kathetenquadrat a^2 durch die Maßzahl der Hypotenuse ($c = 2t$) und die Maßzahl des Abschnittes m auszudrücken.

Anleitung.

Aus dem punktierten Dreieck folgt:

$$t^2 = (t - m)^2 - h^2; \text{ aber } h^2 = a^2 - m^2$$

dieses an Stelle von h^2 eingesetzt, erhält man:

$$t^2 = t^2 - 2mt + m^2 + a^2 - m^2$$
$$t^2 = t^2 - 2tm + a^2 \qquad \text{usw.}$$

3. Von der Differenz zweier Quadratflächen.

$$a^2 - c^2 = ?$$

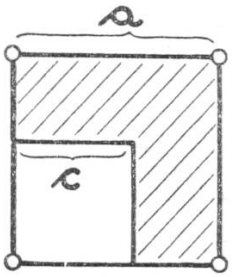


Fig. 16.

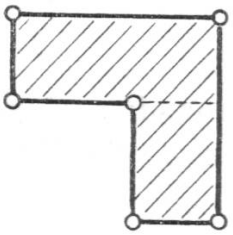


Fig. 17.

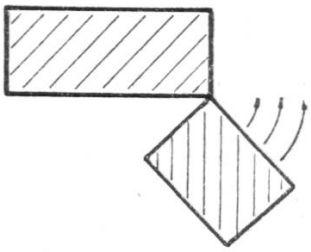


Fig. 18.

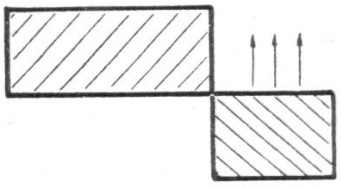


Fig. 19.

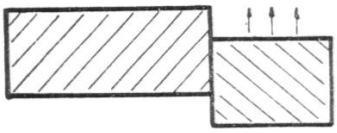


Fig. 20.

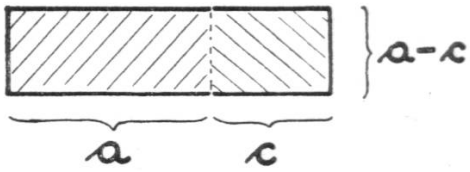


Fig. 21.

Betrachte die nebenstehende Figurenreihe! Was soll durch sie dargestellt werden? Welches ist der Inhalt des schraffierten Winkelstreifens? Welches sind Länge, Breite und Inhalt des durch die Verwandlung entstandenen Rechtecks?

Also läßt sich die Gleichheit der beiden Flächen (Winkelstreifen und Rechteck) durch folgende Buchstabengleichung ausdrücken:

$$a^2 - c^2 = (a - c) \cdot (a + c)$$

Wie würde die Gleichung lauten, wenn die Quadratseiten die nachstehenden Bezeichnungen hätten:

Seite des großen Q'	des kleinen
r	t
x	y
2 m	n
p	$\frac{q}{2}$

Versuche auch die Bedeutung der Gleichung in Worten auszudrücken!

Selbstverständlich ist auch:

$$(a + c)(a - c) = a^2 - c^2$$

oder in Worten:

Ein Rechteck, dessen Länge gleich der Summe zweier Strecken a und c und dessen Breite gleich ihrer Differenz ist, hat gleichen Inhalt wie der Winkelstreifen, welcher durch Subtraktion des Quadrates mit der Seite c vom Quadrat mit der Seite a entsteht.

Die obige Formel gestattet noch eine sehr hübsche Anwendung auf das Kopfrechnen. Da ja eine jede Zahl Maßzahl einer Strecke sein kann, so besteht die Möglichkeit, die obige Formel für die Ausführung gewisser Multiplikationsrechnungen zu benützen. Ein Beispiel wird die Sache klar machen:

statt $(20+3)\cdot(20-3)$, also statt $23\cdot 17$ rechnen wir 20^2-3^2
$= 400 - 9 = 391$

oder statt $(90-7)\cdot(90+7)$ $[83\cdot 97]$ rechnet man 90^2-7^2
$= 8100 - 49 = 8051$

Versuche in *gleicher Weise* die nachstehenden Produkte zu berechnen und mache die Probe durch schriftliche Ausführung der Multiplikation:

$49\cdot 51$	$7{,}8\cdot 8{,}2$	$19{,}2\cdot 20{,}8$	$18^2/_3\cdot 21^1/_3$
$28\cdot 32$	$48\cdot 42$	$17{,}5\cdot 18{,}5$	$24\cdot 36$
$44\cdot 56$	$109\cdot 91$	$42\cdot 58{,}0$	$77\cdot 103$
$3^1/_2\cdot 4^1/_2$	$8^1/_4\cdot 9^3/_4$		

Beachte noch, was die hier aufgeführten 2 Zahlen (z. B. 28 und 32) sind in bezug auf die beiden andern Zahlen (in diesem Beispiel 30 und 2), mit denen man die Rechnung durchführt, und gib auf Grund davon eine neue Deutung für die Gleichung $(x+y)(x-y) = x^2-y^2$. Wer sich tüchtig übt im Berechnen solcher Produkte, wird es darin zu einer schönen Fertigkeit bringen können. Er wird auch erstaunt sein zu sehen, wie häufig einem im praktischen Leben solche Produkte entgegentreten, bei welchen die vereinfachte Berechnung möglich ist. Ihre Häufigkeit mehrt sich noch, wenn man sich die Mühe nimmt, die Quadrate der ganzen Zahlen von 1 bis 50 ins Gedächtnis aufzunehmen, was durchaus keine Überforderung ist, um so mehr, als einige dieser Quadratzahlen an bekannte Jahreszahlen aus der Geschichte erinnern. Merke Dir zum Beispiel:

$38^2 = 1444$ (St. Jakob an der Birs)
$39^2 = 1521$ (Reichstag zu Worms)
$41^2 = 1681$ (= 1481 Tagsatzung zu Stans + 200)

Wer über diese ersten Quadratzahlen verfügt, wird dann auch Beispiele wie die folgenden ohne große Mühe bewältigen:

$$35 \cdot 37 = (36 - 1)\ (36 + 1) = 36^2 - 1 = 1295$$
$$43 \cdot 49 = (46 - 3)\ (46 + 3) = 46^2 - 9 = 2107$$
$$24 \cdot 32 = (28 - 4)\ (28 + 4) = 28^2 - 16 = 768$$

Die Formel (1) ist jedoch noch fruchtbarer, indem sie gestattet, gerade die so häufig auftretenden Quadratzahlen in überaus eleganter Art zu berechnen. Eine kleine Umformung macht sie sofort hiezu geeignet. Es sei z. B. das Quadrat der Zahl 117 zu berechnen:

$117 \cdot 117$; wir *vermindern* den ersten Faktor um 17 und *vermehren* den zweiten um 17, dann heißt unsere Rechnung:

$(117 - 17) \cdot (117 + 17)$ oder $100 \cdot 134 = 13400$. Das ist aber nach dem vorigen nicht mehr 117^2, sondern 17^2 weniger; wir müssen also zum Produkt 13400 noch $17^2 = 289$ addieren und erhalten das Ergebnis 13689. Probe!

Der Weg ist also folgender:

$$117^2 = 117 \cdot 117 = (117 - 17) \cdot (117 + 17) + 17^2$$

oder in Buchstaben

$$a^2 = a \cdot a = (a + b)\ (a - b) + b^2$$

Auf diese Gleichung kann man auch direkt gelangen, wenn man bei Formel (1) beiderseits b^2 addiert. Das b wird stets so gewählt, daß entweder $(a + b)$ oder dann $a - b$ gleich 100 oder gleich 50 wird, also z. B.

$$\begin{aligned} 47^2 &= (47 + 3) \cdot (47 - 3) + 3^2 \\ &= 50 \cdot 44 + 9 \\ &= 100 \cdot 22 + 9 = 2209 \end{aligned}$$

Nach einiger Übung wickelt sich die ganze obige Rechnung in stark verkürzter Weise so ab:

	47	44	22	2200 und 9 (2209)
oder:	56	62	31	3100 plus 36 macht 3136
oder gar so:	56	62	3100 und 36.	

Ferner:

61^2	61	72	$3600 + 121 = 3721$
88^2	88	76	$7600 + 144 = 7744$

Berechne in gleicher Art:

$$92^2,\ 107^2,\ 96^2,\ 89^2,\ 113^2,\ 57^2,\ 44^2$$

Merke Dir vor allem auch, daß Quadrate von Zahlen, deren Einerstelle eine 5 ist, ganz leicht zu finden sind, denn

$$\begin{aligned} 75^2 &= (75+5)\cdot(75-5)+5^2 \\ &= 80\cdot 70+25 \\ &= 5625 \end{aligned}$$

Übe auch diese Berechnungen fleißig und Du wirst nach kurzer Zeit fähig sein, die Quadrate von Zahlen wie 35, 65, 85 usw. innerhalb 1—2 Sekunden anzugeben.

Endlich soll noch eine letzte Verwendungsmöglichkeit unserer *S- mal D-Formel* kurz angedeutet sein; es soll berechnet werden: $43\cdot 47$!

$$\begin{aligned} 43\cdot 47 &= (45-2)\cdot(45+2) \\ &= \quad 45^2 \quad -2^2 \\ &= \overbrace{40\cdot 50+5^2}-2^2 \\ &= 40\cdot 50+\underbrace{(5-2)}\ (5+2) \\ &= 40\cdot 50+3\cdot 7 \qquad\qquad = 2021 \end{aligned}$$

Die letzte Linie läßt den Vorteil der vorgenommenen Umformung leicht erkennen: Das Produkt der beiden Einer (3 und 7) gibt die beiden letzten Stellen des Produktes, das Produkt des obern und untern Zehners [4 und 5], die beiden ersten Ziffern des vierstelligen Produktes.

Versuche die entsprechende Rechnung am Produkt $54\cdot 56$ durchzuführen.

(Beachte, daß in beiden Beispielen die Summe der Einer $= 10$ ist!) Übe zu Hause und vergiß die Prüfung der Ergebnisse nicht. (Symmetrische Multiplikation.)

In den nachfolgenden Aufgaben ist immer der Versuch zu machen, durch geeignete Wahl der Bezeichnungen einen Ausdruck von der Gestalt x^2-y^2 bzw. $(x+y)(x-y)$ zu erlangen. Durch Umformung dieses Ausdruckes und Einführung der gegebenen Zahlen in diesen wird die Lösung gelingen.

1. a) Es sollen aus den Seitenmaßzahlen des nebenstehenden Dreiecks berechnet werden:

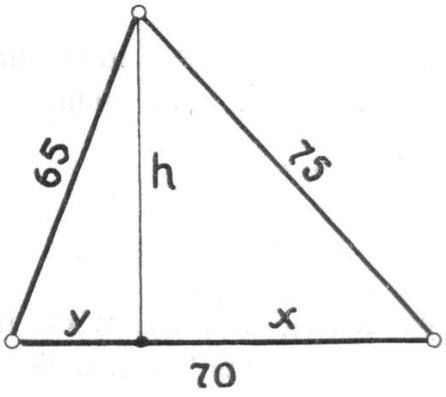


Fig. 22.

1. die Abschnitte x und y
2. die Höhe h
3. die Fläche

Anleitung.

Nach Pythagoras gilt:

$h^2 + x^2 = 5625 \quad (= 75^2)$

$h^2 + y^2 = 4225 \quad (= 65^2)$

Schau die beiden Gleichungen mit offenen Augen an! Was folgt daraus?

b) Berechne in derselben Weise die Inhalte der Dreiecke mit den nachstehenden Seitenmaßzahlen:

50	85	105
15	41	52
34	50	52
50	78	112
34	65	93

Die Höhe, welche auf der unterstrichenen Seite senkrecht steht, ist jeweilen ganzzahlig.

Versuche noch am folgenden Beispiel, alle drei Höhen zu berechnen und führe mit jeder von ihr die Inhaltsberechnung durch. Was wirst Du erwarten?

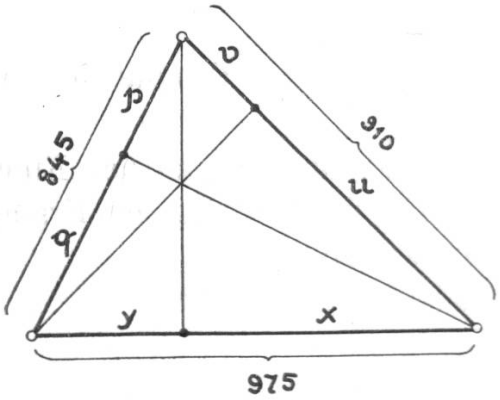


Fig. 22.

Du mußt für alle drei Höhen ganze Maßzahlen herausbekommen!

---

2. Bei einem gewissen rechtwinkligen Dreieck mißt die Kathete a 45 mm und die Summe von Hypotenuse und Kathete b hat die Maßzahl 81.

3.

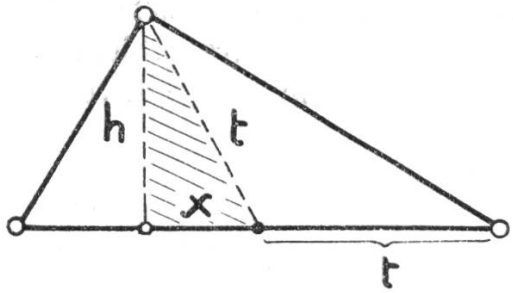


Fig. 23.

Die nebenstehende Figur stellt ein rechtwinkliges Dreieck dar. Versuche aus dem schraffierten Dreiecklein den Satz vom Höhenquadrat abzuleiten!

---

4. Man soll eine Summe s von Fr. 2400.— um 6 % vermehren und hernach von der neuen Summe (s') 6 % derselben wiederum subtrahieren. Was wirst Du von diesem zweiten Ergebnis (s'') voraussagen können?

Mach dieselbe Rechnung mit einem Kapital von Fr. 7400.—!

Berechne nun in beiden Fällen den Unterschied $s - s''$ und bilde das Verhältnis $\frac{s - s''}{s}$! Du mußt 0,0036 erhalten, also $\frac{36}{10000}$, was gleich viel ist wie $\frac{6}{100} \cdot \frac{6}{100}$.

Um wie viele Bruchteile würde wohl das ursprüngliche Kapital abnehmen, wenn eine ähnliche Rechnung mit einem Fuß von 7 % durchgeführt würde, oder mit einem von x %? Versuch nun mit allgemeinen Zahlzeichen zu zeigen, daß Deine Vermutung richtig ist, und versuche eine Formel aufzustellen für s''. Kapital = s, Prozentfuß = x oder p. Prüfe die Richtigkeit Deiner Formel an weiteren Beispielen. (Doppelte Berechnung.)

5.

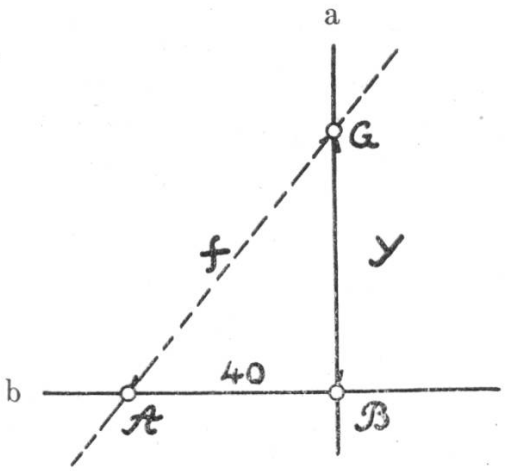


Fig. 24.

Die Geraden a und b stehen senkrecht aufeinander. AB mißt 40 mm. Die gestrichelte Gerade ist so zu ziehen, daß x um 10 mm länger wird als y. (Berechnung, und unabhängig von ihr auch die Konstruktion.)

6. Berechne für eine Reihe von je zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen den Unterschied ihrer Quadratzahlen, stelle diese Differenzen in einer Tabelle zusammen und versuche sie zu deuten! (Gesetz!)

Beispiel:

$49^2 = 2401$
$48^2 = 2304$
$u = 97$

$42^2 = 1764$
$41^2 = 1681$
$u = 83$

x	y	x^2	y^2	$x^2 - y^2$	
49	48	2401	2304	97	= ?
42	41	1764	1681	83	= ?
5	4	25	16	9	= ?

7.

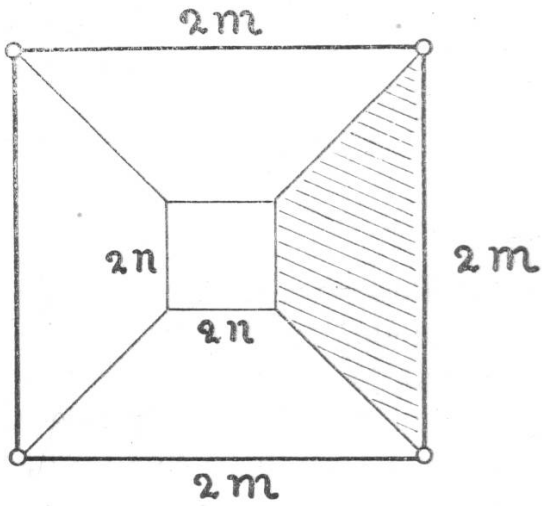


Fig. 25.

Betrachte Fig. 25! Wie drückt sich die Fläche des schraffierten Trapezes durch die Seiten 2 m und 2 n der beiden konzentrischen Quadrate aus? Forme den Ausdruck um und versuche, ihn auf die bekannte Trapezformel zurückzuführen!

8.

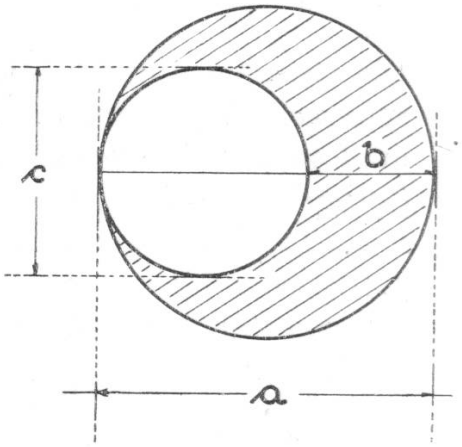


Fig. 26.

Der schraffierte „Halbmond" habe eine Fläche von 121 cm². Die größte Breite b mißt 2 cm. Was kannst Du berechnen? (Vergiß die Probe nicht!)

$$\pi = \frac{22}{7}$$

9. Ist es möglich, daß $(x - y)(x + y)$ für gewisse Zahlen gleich 1 wird? Versuche für x und y passende Werte zu finden und mach die Probe!

---

10. Der Unterschied zwischen der zweiten Potenz von b und der zweiten Potenz von p beträgt $1^1/_3$, und $b - p$ selber ist $^2/_3$. Berechne b und p! Was fällt Dir am Ergebnis auf? Gibt es wohl noch andere Zahlenpaare mit der gleichen Eigenschaft?

---

11. Gewiß hast Du auch schon auf der Lägern oder einem andern Juraberg versteinerte Ammonshörner oder Stücke von solchen gefunden. Miß in der nebenstehenden Abbildung (1 : 10) eines solchen Bruchstückes die beiden Entfernungen AB und CD und versuche daraus den Durchmesser des ganzen „Hornes" herauszubekommen! (Siehe auch die Skizze! p entspricht CD und h der Strecke DB.)

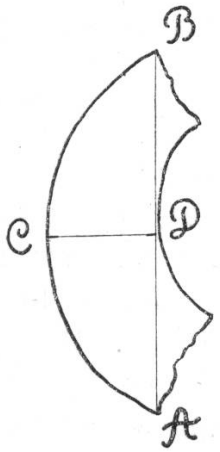


Fig. 27.

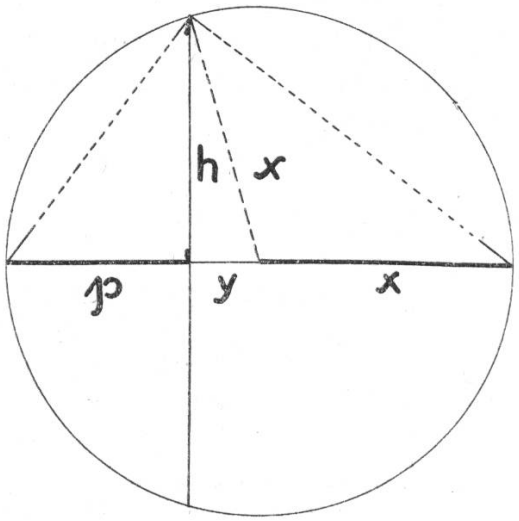


Fig. 28.

---

12. Durch den Diagonalenschnittpunkt M des Rechtecks R ist eine Gerade gezogen, welche die Längsseiten des Rechtecks unter Winkeln von 45° schneidet und in die Abschnitte x und y zerlegt. Versuche den Flächeninhalt des Rechtecks auf zwei Arten durch die beiden Maßzahlen x und y auszudrücken, desgleichen den Umfang!

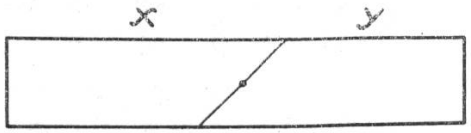


Fig. 29.

13. Versuche nun auf Grund der in Aufgabe 12 gefundenen Beziehung die Seiten eines Rechtecks aus Inhalt und Umfang herauszufinden.

	Fläche	Umfang	x	y	l	b
a)	1425 mm^2	220,0 mm	?	?	?	?
b)	31,6 cm^2	28,0 cm	?	?	?	?
c)	14,0 cm^2	18,0 cm	?	?	?	?
d)	350,0 mm^2	90,0 mm	?	?	?	?
e)	430,0 mm^2	138 mm	?	?	?	?
f)	20,0 mm^2	20 mm	?	?	?	?

Die ersten vier Beispiele gehen auf. Bei e und f sind Länge und Breite je auf drei Dezimalen genau zu berechnen. (Doppelte Probe in allen Beispielen.)

---

14. Es ist Dir sicher aufgefallen, daß bei Aufgabe 13 f die Maßzahlen von Umfang und Fläche gleich groß sind. Untersuche, ob es auch ein Rechteck mit einer Fläche von 12 cm^2 und einem Umfang von 12 cm gibt.

Versuche herauszufinden, wie groß die Flächenmaßzahl mindestens sein muß, damit die Umfangmaßzahl ihr gleich sein kann.

15.

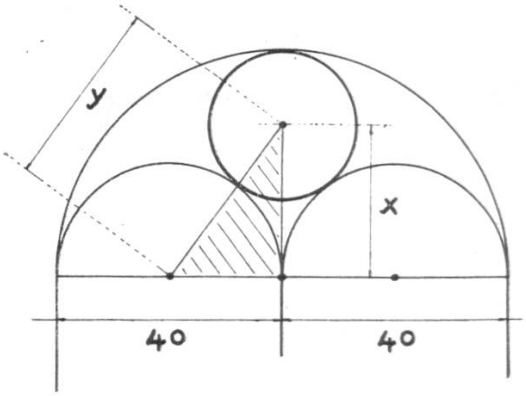


Fig. 30.

Es soll der Radius (z) des kleinen Kreisleins im Rundbogenfenster berechnet werden. Ganze Fensterbreite 80 cm. Deute das Ergebnis und leite daraus eine einfache planimetrische Konstruktion ab.

16.

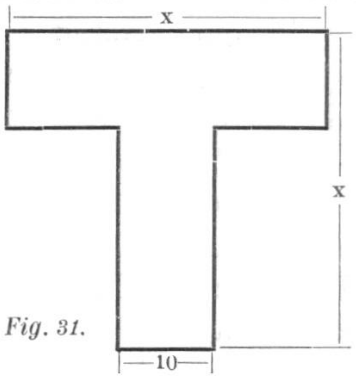


Fig. 31.

Die Fläche der nebenstehenden „Reißschiene“ sei 940 mm^2, ihre Breite 10 mm. Wie lang sind die verschiedenen Seiten dieses Achtecks? (2 Lösungen suchen!)

17. Jede Zahl ist gleich groß wie das Doppelte der Zahl, d. h. $a = 2a$! Prüfe den hier folgenden „Beweis“ und suche den Fehler!

	1. $a^2 - a^2 = a^2 - a^2$	
folgt	2. $a(a-a) = (a+a)(a-a)$	Jetzt beiderseits durch a–a dividieren
folgt	3. $a = a + a$!	

---

18. Prüfe durch Einsetzen von einfachen Zahlen an Stelle von a und b, ob die nachfolgende Gleichung richtig ist:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$$

Wie würde die Gleichung lauten, wenn man beide Seiten viermal größer machte? (Löse vorher noch die Klammern.)

---

19. Aus obigem folgt eine neue Gleichung, welche eine wertvolle Anwendung ermöglicht.

$$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$$

In dieser Gleichung wollen wir einmal für a die Quadratzahl 4 und für b die einfachste Quadratzahl, nämlich 1, einsetzen.

Wir erhalten: $(4+1)^2 = (4-1)^2 + 4 \cdot 4 \cdot 1$

oder $5^2 = 3^2 + 4^2$ $(25 = 9 + 16!)$

Oder andere Quadratzahlen eingesetzt:

für a setzen wir 9
„ b „ „ 4 und erhalten die Gleichung:

$$\begin{aligned} (9+4)^2 &= (9-4)^2 + 4 \cdot 9 \cdot 4 \\ 13^2 &= 5^2 + (2 \cdot 3 \cdot 2)^2 \\ 13^2 &= 5 + 12^2 \\ 169 &= 25 + 144 \end{aligned}$$

Woher sind Dir die beiden Gleichungen bekannt? Wie könnten wir solche Gleichungen nennen? Versuche durch Einsetzen anderer Quadratzahlen an Stelle von a und b weitere pythagoräische Gleichungen zu finden und stelle hernach alle in einer Tabelle zusammen.

Große Kathete	Kleine Kathete	Hypotenuse
4	3	5
12	5	13

20. Wie kann man das Quadrat über der Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks durch a^2 und m^2 ausdrücken? (Beachte die Fig. 32.) Verwandle die Quadratdifferenz und drücke das Ergebnis $h^2 = (\quad)(\quad)$ in Worten aus? Wie könnte man an Hand einer genauen Zeichnung, in der sowohl das Quadrat über der Höhe als auch das flächengleiche Rechteck eingezeichnet sind, die Richtigkeit rein geometrisch nachprüfen? (Ergänzungsparallelogramm.)

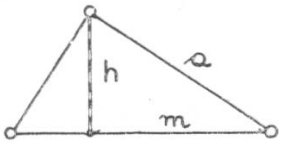


Fig. 32.

21.

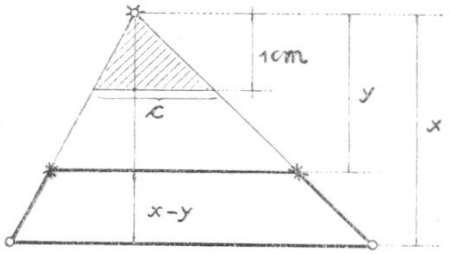


Fig. 33.

$$D''' = \frac{c \cdot 1}{2} = \frac{c}{2} \quad *$$

$$D^0 = \frac{c}{2} \cdot x^2$$

$$D^* = \frac{c}{2} \cdot y^2$$

$$D^0 - D^* = \text{Trapez} = \frac{c}{2} \cdot (x^2 - y^2)$$

Versuche nun im Ausdruck für das Trapez die Höhe $x - y$ einzuführen und forme dann den Ausdruck weiter um, bis die bekannte Trapezformel erscheint!

---

22. Der Flächeninhalt des hier gezeichneten Rechtecks sei 28 cm², der Unterschied zwischen Länge und Breite beträgt 3 cm. Aus diesen beiden Angaben sollst Du unter Beachtung dessen, was Du bei Aufgabe 14 gelernt hast, die Länge und die Breite des Rechtecks herausrechnen.

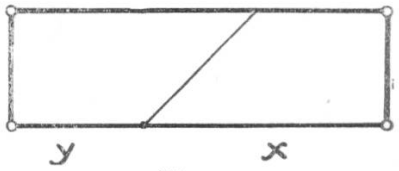


Fig. 34.

---

23. Lies die nachfolgende Ableitung sorgfältig durch, und versuche durch Lösung eines Zahlenbeispieles die Richtigkeit der Schlußformel nachzuweisen!

Für den Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreiecks gelten die beiden Formeln:

$$1.\ F = \frac{b^2}{2} \qquad 2.\ F = \frac{c^2}{4} = \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} = \left(\frac{c}{2}\right)^2 = F$$

* D''' bedeutet: schraffiertes Dreieck.
D^0 „ Dreieck mit den „Ringecken".
D^* „ „ „ „ „Sternecken".

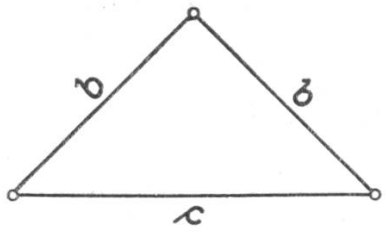


Fig. 35.

Statt Formel 1 kann man offenbar auch setzen:

$$F = \sqrt{\frac{b^2}{2} \cdot \frac{b^2}{2}}$$

oder,

da $\frac{b^2}{2} = \frac{c^2}{4}$ $F = \sqrt{\frac{b^2}{2} \cdot \frac{c^2}{4}}$

Weiterhin läßt sich $\frac{b^2}{2}$ als Unterschied zwischen b^2 und $\frac{b^2}{2}$ ausdrücken; das gibt die neue Formel

$$F = \sqrt{\left(b^2 - \frac{b^2}{2}\right) \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2}} \text{ oder} = \sqrt{\left[b^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2\right] \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2}}$$

Endlich ergibt die Zerlegung des Klammerausdruckes folgende Schlußformel:

$$F_\triangle = \sqrt{\left(b + \frac{c}{2}\right)\left(b - \frac{c}{2}\right) \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2}}$$

Beachte nun noch, daß $b + \frac{c}{2}$ nichts anderes ist als der halbe Umfang des gleichschenklig-rechtwinkl. Dreiecks. $\left(\frac{u}{2}\right)$; ferner $b - \frac{c}{2} = \frac{u}{2} - c$, und der Faktor $\frac{c}{2}$ ist die Differenz zwischen dem halben Umfang und dem Schenkel b. Setzen wir noch $\frac{u}{2} = s$, dann nimmt unsere Formel folgende endgültige Gestalt an:

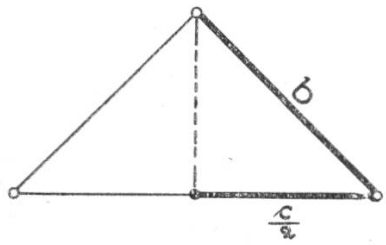


Fig. 36.

$$F_\triangle = \sqrt{s\,(s-c)\,(s-b)\,(s-b)}\,^*$$

---

24. Die eben abgeleitete Formel gilt auch für allgemeine Dreiecke, sofern wir den einen der beiden Faktoren $(s - b)$ durch $s - a$ ersetzen. Prüfe die Richtigkeit dieser Aussage

* Die Formel ist von Heron gefunden worden; er lebte um 120 v. Chr. in Alexandrien. Die allgemein gültige Formel heißt: $F = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$

an den nachfolgenden Dreiecken, indem Du deren Inhalte auf zwei Arten berechnest: 1. nach der Heronschen Formel, 2. nach der in Aufgabe 1, Seite 118, angegebenen Art.

	a	b	c	
1. Dreieck	13	14	15	Die unterstrichene Seite hat ganzzahlige Höhe!
2. „	68	75	77	
3. „	7	8	9	

---

25. Leite unter Verwendung der Heronschen Formel die Gleichung zur Berechnung des Flächeninhalts eines gleichseitigen Dreiecks aus der Seite a ab!

---

26. Ein Schüler schreibt in der Aufregung an Stelle von $x^2 - y^2$ den Ausdruck $(x - y)^2$ und bekommt zufolge dessen beim Einsetzen der Zahlen nur die Hälfte von dem, was er hätte erhalten sollen. In welchem Verhältnis stehen x und y zueinander? (Prüfe das Resultat an Zahlenbeispielen!)

---

27. Wenn man eine gewisse Zahl a um $^3/_4$ ihres Wertes vermehrt und hernach den vermehrten Betrag wieder um $^3/_4$ seines Wertes vermindert, dann ist die nunmehr vorhandene Zahl um 45 kleiner als die ursprüngliche Zahl a. Um wie viele Prozente ist a kleiner geworden? Versuche mehrere Lösungen zu geben und vor allem den Zusammenhang mit der S·D-Formel zu finden!

Überlege Dir schnell: Wird es wohl auf dasselbe hinauskommen, wenn man die beiden Operationen vertauscht, d. h. also zuerst a um $^3/_4$ vermindert und hernach den neuen Betrag um $^3/_4$ seines Wertes vermehrt?

---

28. Wandle die nebenstehende Proportion in eine Produktengleichung um, und versuche eine geometrische Figur zu zeichnen, in der a, b, x und y als Strecken vorhanden sind! Gib sodann vier ganze Zahlen an, welche die Gleichung befriedigen!

$$\frac{a - x}{b - y} = \frac{b + y}{a + x}$$

Lösungen.

$(x + y)^2 = ?$

1. a) $38{,}5^2 = 1482{,}25$
$38{,}3^2 = 1466{,}89$ } Unterschied 15,36 m².

b) $2\,R = 0{,}4 \cdot 38{,}3 = 4 \cdot 3{,}83 = 15{,}32$
$Q'' = 0{,}2 \cdot 0{,}4 \qquad 0{,}04$ } Untersch. = 15,36 m².

2.

Seitenzuwachs	2 R	Q''	Flächenzuwachs
0,2	1,6	0,04	1,64
0,4	3,2	0,16	3,36
0,6	4,8	0,36	5,16
0,8	6,4	0,64	7,04
1,0	8,0	1,00	9,00
1,2	9,6	1,44	11,04
1,4	11,2	1,96	13,16
1,6	12,8	2,56	15,36
1,8	14,4	3,24	17,64

Der letzte Flächenzuwachs übersteigt bereits die Fläche des ursprünglichen Quadrates. Der gesuchte Seitenzuwachs liegt zwischen 1,6 und 1,8; bester Näherungswert auf 1 Dezimal genau: 1,7.

1,7	13,6	2,89	16,49

Der genaue Wert: $4\sqrt{2} - 4$ $[= 4 \cdot 0{,}414 = 1{,}656]$.

---

3. Alte Seite $= x$ | Flächenzuwachs: $2\,xy + y^2$
Neue Seite $= x + y$ | Neuer Inhalt: $(x + y)^2$

4.

Alte Seite	Neue Seite	Flächenzuwachs
a	$a + b$	$2\,ab + b^2$
a	$a + n$	$2\,an + n^2$
a	$a + 4$	$8\,a + 16$
$2\,m$	$2\,m + b$	$4\,mb + b^2$
$2\,m$	$2\,m + n$	$4\,mn + n^2$
$2\,m$	$2\,m + 4$	$16\,m + 16$
$3\,u$	$3\,u + b$	$6\,ub + b^2$
$3\,u$	$3\,u + n$	$6\,un + n^2$
$3\,u$	$3\,u + 4$	$24\,u + 16$

5.
$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$\text{oder} = x^2 + y^2 + 2xy$$
$$(m+n)^2 = m^2 + n^2 + 2mn$$
$$(a+x)^2 = a^2 + x^2 + 2ax$$
$$(r+q)^2 = r^2 + q^2 + 2rq$$
$$(a+2)^2 = a^2 + 4 + 4a$$
$$(b+5)^2 = b^2 + 25 + 10b$$

8.

$(24+6)^2$	$(19+11)^2$	$(17+13)^2$
$24^2 = 576$	$19^2 = 361$	$17^2 = 289$
$6^2 = 36$	$11^2 = 121$	$13^2 = 169$
$2 \cdot 6 \cdot 24 = 288$	$2 \cdot 11 \cdot 19 = 418$	$2 \cdot 13 \cdot 17 = 442$
zus. $= 900$	zus. $= 900$	zus. $= 900$

---

9. $(20+5)^2 = 20^2 + 2 \cdot 5 \cdot 20 + 5^2 = 20 \cdot 20 + 10 \cdot 20 + 25$
$= \underline{30 \cdot 20 + 25}$

10. $(30+5)^2 = 30^2 + 2 \cdot 5 \cdot 30 + 5^2 = 30 \cdot 30 + 10 \cdot 30 + 25$
$= \underline{40 \cdot 30 + 25}$
$(40+5)^2 = 40^2 + 2 \cdot 5 \cdot 40 + 5^2 = 40 \cdot 40 + 10 \cdot 40 + 25$
$= \underline{50 \cdot 40 + 25}$

---

11. Katheten a und b zusammen 105 cm lang, Hypotenuse c $= 75$ cm.

$$a + b = 105$$
$$(a+b)^2 = 11025$$
$$\left.\begin{aligned} \underbrace{a^2 + b^2}_{c^2} + 2ab &= 11025 \\ = 5625 \end{aligned}\right\}$$

Voneinander subtrahieren:

$$2ab = 5400$$
$$\frac{ab}{2} = \frac{5400}{4} = \underline{1850 = F}$$

---

12. Aus $2c\,(c+b) = 790{,}92$ folgt, weil $c + b = 23{,}4$

$$2c = \frac{790{,}92}{23{,}4} = 33{,}8 = 2c$$
$$16{,}9 = c$$
$$6{,}5 = b$$

Weil rechtwinkliges Dreieck, muß $a^2 + b^2 = c^2$ sein.

$$\begin{array}{r} a^2 = 243{,}36 \\ b^2 = 42{,}25 \\ \hline a^2 + b^2 = 285{,}61 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sqrt{285{,}61} = 16{,}9 = c \\ \underline{256} \\ 2961 : 32\dot{9} \\ \underline{2961} \\ 0 \end{array}$$

---

13. $u = 46$

$\frac{u}{2} = 23 = x + y$

$d = 17$

$d^2 = 289 = x^2 + y^2$

$$(x+y)^2 = \underbrace{x^2 + y^2}_{289} + 2xy = 529$$

$$289 + 2xy = 529$$

$$x \cdot y = \frac{529 - 289}{2}$$

$$F = \frac{240}{2} = 120$$

Die Seiten sind durch Probieren zu finden!

$x + y = 23$ $\qquad$ $x^2 + y^2$ muß 289 sein.

$x = 12$, $y = 11$	$x^2 = 144$, $y^2 = 121$	zus. $265 \neq 289$
$x = 13$, $y = 10$	$x^2 = 169$, $y^2 = 100$	zus. $269 \neq 289$
$x = 14$, $y = 0$	$x^2 = 196$, $y^2 = 81$	zus. $277 \neq 289$
$x = 15$, $y = 8$	$x^2 = 225$, $y^2 = 64$	zus. $289 = 289$

Die Seiten messen 15 cm und 8 cm.

Probe: $8 \cdot 15 = 120$!

Umfang $u = 204$	Umfang $u = 124$
$\frac{u}{2} = 102$	$\frac{u}{2} = 62$
$d = 78$	$d = 50$
Seite $x = 72$	Seite $x = 48$
Seite $y = 30$	Seite $y = 14$
Fläche $= 2160$	Fläche $= 672$

14. Die Seiten seien u und v, Fläche $= u \cdot v = 1500$, der Radius r.

$$u + v = 85$$

$$\left.\begin{aligned}(u+v)^2 &= u^2 + v^2 + 2uv = 7225\\ 2uv &= 3000\end{aligned}\right\}\ \text{subtr.}$$

$$\text{bleibt}\quad u^2 + v^2 = 4225 = (2r)^2$$

$$2r = 65$$
$$r = 32{,}5$$

---

15. Die Summe der beiden Zahlen a und b sei s, ihre Differenz sei d.

$$(s+9)^2 = s^2 + 18s + 81 = s^2 + 135$$
$$18s = 54$$
$$s = 3 = a + b$$
$$d = 1 = a - b$$
$$s + d = 4 = 2a$$
$$a = 2$$
$$b = 1$$

---

16. $(a+c)^2 = a^2 + c^2 + 2ac = 2704$ | $a + c = \sqrt{2704}$

$a^2 - c^2 = 1976$ | $a + c = 52$

$$2a^2 + 2ac = 4680$$
$$a\,(a+c) = 2340$$
$$a = 2340 : 52 = 45 \qquad b = 7$$

17.

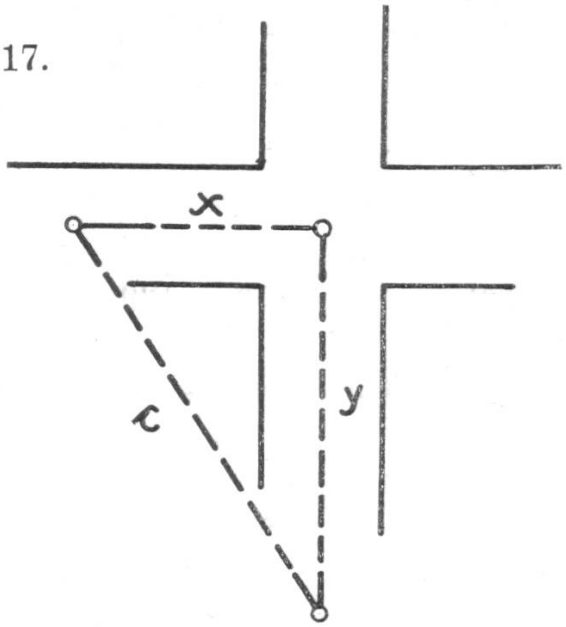


Fig. 37.

Die gestrichelte, rechtwinkl. abgebogene Strecke stellt die 884 m lange Marschkolonne dar (= x + y). Die Strecke c ist der Weg des Schalles von der Spitze der Kolonne bis zum letzten Mann an ihrem Ende. $c = 2 \cdot 338 = 676$ m. Nun gelten folgende Beziehungen:

$$x + y = 884 \text{ m}$$

$$\left.\begin{array}{r} \underbrace{x^2 + y^2}_{c^2} + 2\,xy = 781456 \\ = 456976 \end{array}\right\} \text{subtr.}$$

$$2\,xy = 324480$$
$$xy = 162240$$

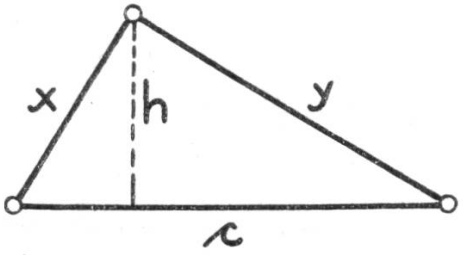


Fig. 38.

Nun ist in jedem rechtwinkligen Dreieck das Produkt der beiden Katheten-Maßzahlen $a \cdot b$ gleich $c \cdot h$ (Hypotenuse mal Höhe). Man kann also das Produkt $x \cdot y$ durch $c \cdot h$ ersetzen, und weil im vorliegenden Fall $c = 676$ ist, so folgt

$$676\,h = 162240$$
$$h = 162240 : 676 = 240$$
$$h = 240$$

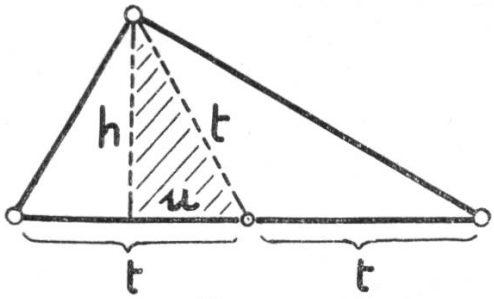


Fig. 39.

Aus dem schraffierten rechtwinkligen Dreiecklein der Fig. 39 mit den Seiten t $\left(= \frac{676}{2}\right)$, h (= 240) und u folgt ferner:

$$u^2 = t^2 - h^2$$
$$t^2 = 114244$$
$$h^2 = 57600$$
$$u^2 = 56644$$
$$u = 238$$

Daraus ergeben sich die beiden Hypotenusenabschnitte m und n:

$$t + u = 338 + 238 = 576 = m$$
$$t - u = 338 - 238 = 100 = n$$

Endlich finden wir für die beiden Katheten x und y:

$$x^2 = 240^2 + 576^2 = 576\ [100 + 576]$$
$$x^2 = 576 \cdot 676$$
$$x = 24 \cdot 26 = 624$$

$$y^2 = 240^2 + 100^2 = 100\ (576 + 100)$$
$$y^2 = 100 \cdot 676$$
$$y = 260$$

Probe. $x + y = 624 + 260 =$ Kolonnenlänge

18. Zum Ausdruck $x^2 + ax$

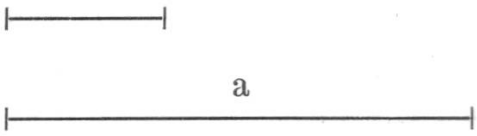


Fig. 40.

1.

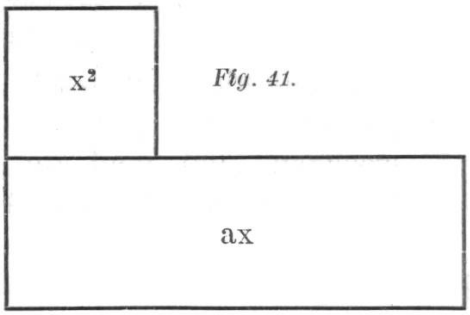


Fig. 41.

3.

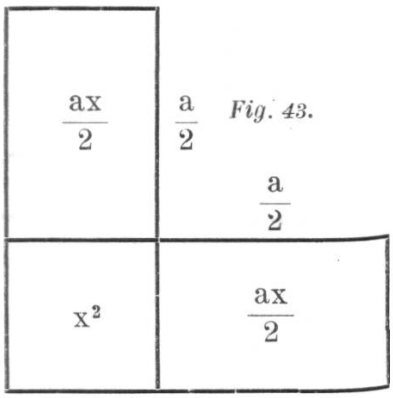


Fig. 43.

2.

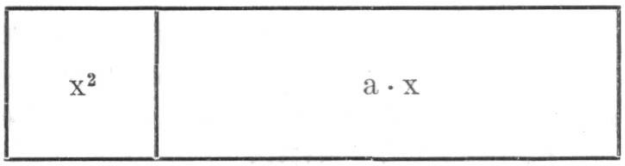


Fig. 42.

4.

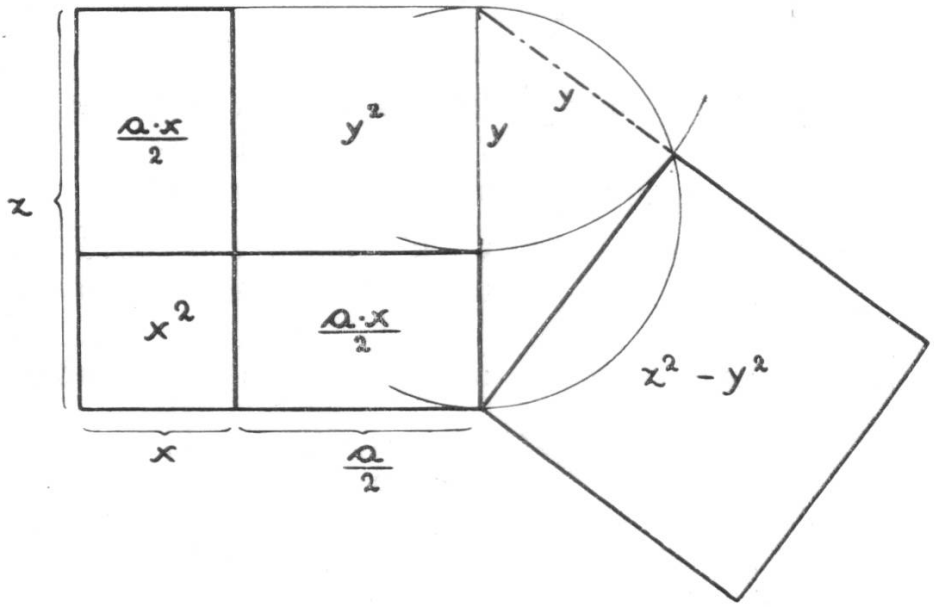


Fig. 44.

$$z^2 - y^2 = x^2 + ax$$

19.

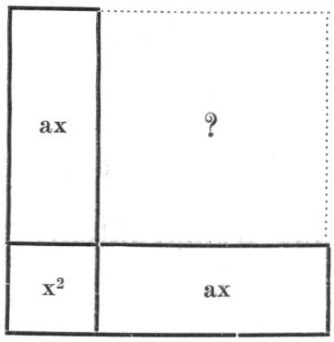


Fig. 45.

Es ist a^2 zuzufügen.
Gesamtflächeninhalt $= (a + x)^2$
$= a^2 + x^2 + 2ax$

Winkelstreifen	Quadratische Ergänzung
$x^2 + 2xy$	$+ y^2$
$m^2 + 2m \cdot n$	$+ n^2$
$u^2 + 4u$	$+ 2^2$
$r^2 + pr$	$\left(\frac{p}{2}\right)^2$
$x^2 + 2x \cdot 3$	$+ 9$
$u^2 + 7u$	$+ (3{,}5)^2$

20.

$$x\,(x + 12) = 288$$
$$x^2 + 12x + 6^2 = 288 + 6^2$$
$$(x + 6)^2 = 324$$
$$x = \sqrt{324} - 6 = 12\,^*$$

Probe!

21.

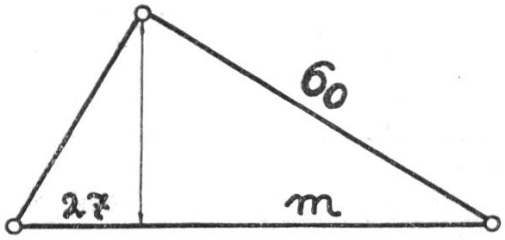


Fig. 46.

$$m\,(m + 27) = 60^2$$
$$m^2 + 27m + 13{,}5^2 = 3600 + 182{,}25$$
$$(m + 13{,}5)^2 = 3782{,}25$$
$$m = \sqrt{3782{,}25} - 13{,}5$$
$$m = 61{,}5 - 13{,}5 = 48$$

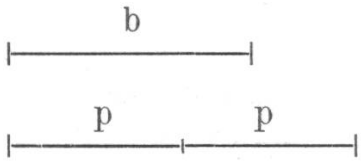
$a = 60$	$h = 36$
$n = 27$	$b = 45$
$m = 48$	
$c = 75$	

* Es wird mit Absicht vermieden, zwei Wurzelwerte anzunehmen.

22. Aus 21 ergibt sich $x\,(x + 2p) = b^2$

$$x^2 + 2px + p^2 = b^2 + p^2$$
$$(x + p)^2 = b^2 + p^2$$
$$x = \sqrt{b^2 + p^2} - p$$

Daraus ergibt sich die nachstehende Konstruktion:



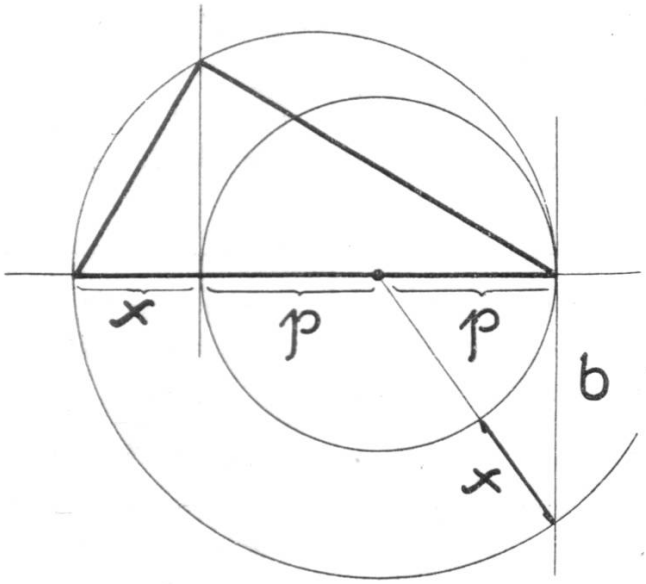


Fig. 47.

23.

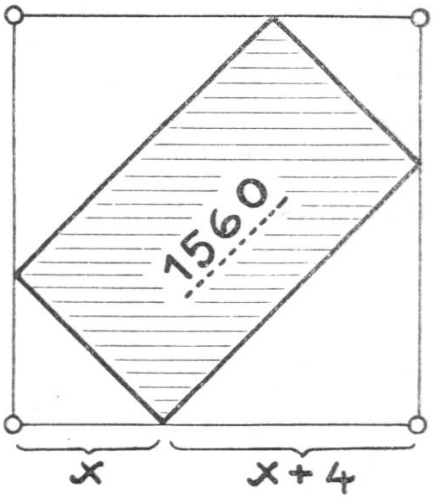


Fig. 48.

Da die abgeschnittenen Ecken gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke sind, so gilt für Länge und Breite des Rechtecks:

$$l = (x + 4)\,\sqrt{2}$$
$$b = x \cdot \sqrt{2}$$

somit für den Inhalt:

$$F = l \cdot b = x \cdot (x + 4) \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$
$$= 1560$$

woraus folgt:

$$x^2 + 4x = 780$$
$$x^2 + 4x + 4 = 784 = (x+2)^2$$
$$x = \sqrt{784} - 2 = 26$$
$$x + 4 = 30 \qquad \text{Quadratseite} = 56!$$

1. Probe. $x^2 + (x+4)^2 + 1560 = 56^2$

$$\underbrace{676 + 900 + 1560}_{3136} \quad \uparrow$$
$$= 3136$$

2. Probe. Breite $b = 36{,}769$ } $l \cdot b$ durch abgekürzte Multiplikation ergibt: $1559{,}97 = 1560$.
Länge $l = 42{,}426$ }

---

24. Länge $= x + 18$ | Fläche $F = x\,(x+18) = 1215$
Breite $= x$ |

$$x^2 + 18x + 81 = 1215 + 81$$
$$x + 9 = \sqrt{1296}$$
$$x = 36 - 9 = 27$$
$$x + 18 = 45$$

Probe. $45 \cdot 27 = 1215$

25.

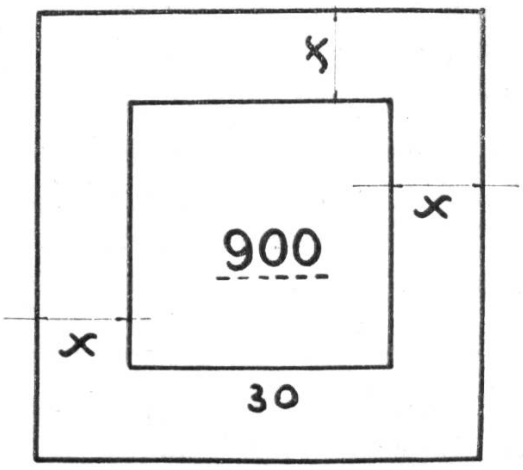


Fig. 49.

$$4 \cdot 30x + 4x^2 = 3 \cdot 900$$
$$30x + x^2 = 675$$
$$15^2 + 30x + x^2 = 900$$
$$15 + x = 30$$
$$x = 15$$

oder direkt:

$$(30 + 2x)^2 = 4 \cdot 900$$
$$30 + 2x = 60$$
$$2x = 30 \qquad x = 15$$

Probe!

$(a - b)^2 = ?$

3. Die Aufgaben können nach der Formel und nach dem gewöhnlichen Multiplikationsverfahren berechnet werden.

Beispiel. $(3^3/_4)^2 = \frac{15}{4} \cdot \frac{15}{4} = \frac{225}{16} = 14^1/_{16}$

$(3^3/_4)^2 = (4 - {}^1/_4)^2 = 16 + {}^1/_{16} - 2 = 14^1/_{16}$

$(3^3/_4)^2 = 14^1/_{16}$	$8{,}98^2 = 80{,}6404$
$(6^2/_3)^2 = 44^4/_9$	$91^2 = 8281{,}00$
$49^2 = 2401$	$179^2 = 32041{,}00$

4.

$(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$	$(3x - z)^2 = 9x^2 + z^2 - 6xz$
$(2a - b)^2 = 4a^2 - 4ab + b^2$	$(m - 2)^2 = m^2 - 4m + 4$
$(c - 1)^2 = c^2 - 2c + 1$	$(n - {}^1/_2)^2 = n^2 - n + {}^1/_4$
$(q - r)^2 = q^2 + r^2 - 2qr$	$(r - 8)^2 = r^2 - 16r + 64$

5.

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$
$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

Das Quadrat über der Summe zweier Strecken a und b ist um den vierfachen Inhalt des Rechteckes gebildet aus diesen beiden Strecken, (also um 4 ab) *größer als das Quadrat über ihrer Differenz.*

6.

$a = 17$	$a + b = 19 \quad (a + b)^2 = 361$
$b = 2$	$a - b = 15 \quad (a - b)^2 = 225$

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 136$$
$$136 : 4 = 34 = 2 \cdot 17 = ab$$

7.

$$c^2 = (a - b)^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab + 2ab$$
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Der Beweis des indischen Astronomen Bhaskara (geb. 1114 n. Chr.) für den pythagoräischen Lehrsatz.

8. Lösung gegeben.

9.

$(x+y)^2 = 2704$	$(m-n)^2 = 10000$	
$4xy = 2220$	$4mn = 81204$	
$(x-y)^2 = 484$	$(m+n)^2 = 91204$	
$x-y = 22$	$m+n = 302$	$\sqrt{91204} = 302$
$x+y = 52$	$m-n = 100$	$1204 : 602$
$2x = 74$	$2m = 402$	
$x = 37$	$m = 201$	
$y = 15$	$n = 101$	
Probe: $37 \cdot 15 = 555$	Probe: $101 \cdot 201 = 20100$	
	201	20301

10.

$m - n = 14$ $\qquad$ $m \cdot n = h^2 = 576$

$(m-n)^2 = 196$	$2m = 64$
$4mn = 2304$	$m = 32$ Diff. $= 14$
$(m+n)^2 = 2500$	$n = 18$ Prod. $= 576$
$m+n = 50$	$c = 50$
$m-n = 14$	

11.

Hypotenuse $c = 150$ mm
Höhe $h = 72$ mm

1. Art.

$mn = h^2 = 5184$

$$
\begin{aligned}
m+n &= 150 \\
\hline
(m+n)^2 &= 22500 \\
4mn &= 20736 \\
\hline
(m-n)^2 &= 1764 \\
m-n &= 42 \\
m+n &= 150 \\
\hline
m &= 192 : 2 = 96 \\
n &= 54
\end{aligned}
$$

Probe. $h = \sqrt{m \cdot n} = \sqrt{96 \cdot 54} = \sqrt{16 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 9} = 4 \cdot 6 \cdot 3 = 72$

2. Art.

$$x^2 = 75^2 - 72^2 = \left.\begin{array}{r} 5625 \\ -\,5184 \end{array}\right\} = 441$$

$$x = \sqrt{441} = 21$$
$$m = 75 + 21 = \underline{96}$$
$$n = 75 - 21 = \underline{54}$$

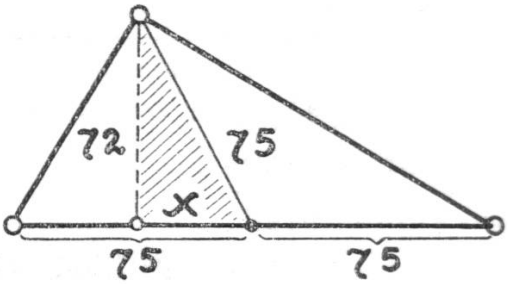


Fig. 50.

12.

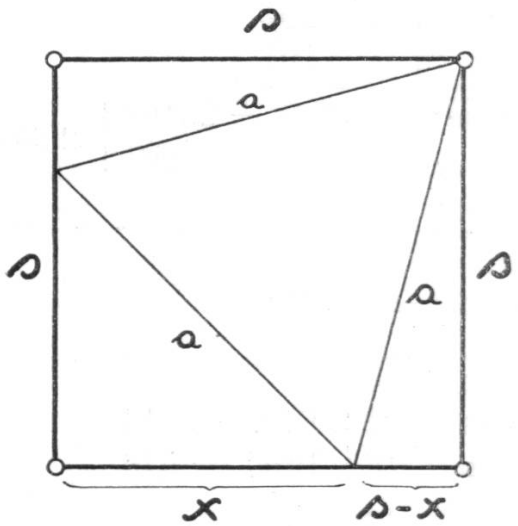


Fig. 51.

einerseits ist

$$a^2 = s^2 + (s - x)^2$$
$$a^2 = s^2 + s^2 + x^2 - 2\,sx$$

anderseits

$$a^2 = 2\,x^2$$

folgt $2\,x^2 = 2\,s^2 + x^2 - 2\,sx$

$$x^2 + 2\,sx = 2\,s^2$$
$$x^2 + 2\,sx + s^2 = 3\,s^2$$
$$x + s = s\sqrt{3}$$
$$x = s\sqrt{3} - x$$

$$x = 30\sqrt{3} - 30 = 30\,(\sqrt{3} - 1)$$
$$= 30 \cdot 0{,}732$$
$$x = 21{,}96 \quad a = x\sqrt{2} = 31{,}05$$
$$s - x = 8{,}04$$

Für die einzelnen Dreiecksinhalte findet man:

$$\frac{x^2}{2} = 241{,}1 \quad \left(\text{zugleich } \frac{a^2}{4}\right)$$
$$2 \cdot \frac{s\,(s - x)}{2} = 241{,}2$$
$$\frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 417{,}6$$

$$\text{zusammen} = 899{,}9 = 900 = 30^2$$

Man beachte: $\dfrac{x^2}{2} = 2 \cdot \dfrac{s\,(s - x)}{2}$!

---

13. Aus der Gleichung $t^2 = t^2 - 2\,tm + a^2$ folgt $2\,tm = a^2$, da aber $2\,t = c$, folgt $cm = a^2$.

$x^2 - y^2 = ?$

1. a) $\left.\begin{array}{l} h^2 + x^2 = 5625 \\ h^2 + y^2 = 4225 \end{array}\right\}$ subtrahieren

$$\begin{array}{r} x^2 - y^2 = 1400 \\ \underbrace{(x+y)}\,(x-y) = 1400 \\ 70 \cdot (x-y) = 1400 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x - y = 20 \\ x + y = 70 \\ \hline 2x = 90 \\ x = 45 \\ y = 25 \end{array}$$

endlich folgt für die Höhe:

$$h^2 = 75^2 - 45^2 = (75+45)(75-45) = 30 \cdot 120 = 3600$$

oder auch $h^2 = 65^2 - 25^2 = (65+25)(65-25) = 90 \cdot 40 = 3600$

also $h = 60$ $\qquad F = 2100$

b)

a	b	c	x	y	h	F
50	85	<u>105</u>	75	30	40	2100
15	41	<u>52</u>	40	12	9	234
<u>34</u>	50	52	20	14	48	816
50	78	<u>112</u>	72	40	30	1680
34	65	<u>93</u>	63	30	16	744

c)

$a = 910$	$b = 845$	$c = 975$
$u = 585$	$q = 495$	$x = 546$
$v = 325$	$p = 350$	$y = 429$
$h_1 = 780$	$h_2 = 840$	$h_3 = 728$

Fläche = 354900

---

2. Nach Pythagoras ist

$$c^2 - b^2 = a^2 = 45^2$$

also $(c+b)(c-b) = 45 \cdot 45$

oder $c - b = \dfrac{45 \cdot 45}{81} = 25$

$$\begin{array}{r} c - b = 25 \\ c + b = 81 \end{array} \quad \Big| \quad \begin{array}{r} 2c = 106 \\ c = 53 \end{array} \qquad b = 28$$

Probe!

3. Für das Höhenquadrat gilt: $h^2 = t^2 - x^2$
$= (t + x)\ (t - x)$

aber $t + x$ ist der größere Hypotenusenabschnitt und $t - x$ ist der kleinere; nennen wir sie m und n, so folgt $h^2 = m \cdot n$.

---

4. $s' = 2400 - \frac{6}{100} \cdot 2400$

$= 2400 - 144 = 2256$

$s'' = 2256 + \frac{6}{100} \cdot 2256$

$= 2256 + 135{,}36$

$s'' = 2391{,}36 \qquad s - s'' = 8{,}64 = \frac{36}{10000} \cdot 2400$

wenn $K = 7400$, dann $s = 7400$, $s'' = 7373{,}36$ | $s - s'' = 26{,}64 = \frac{36}{10000} \cdot 7400$

Allgemein:

Ursprünglicher Betrag $= s$
Prozentfuß $= p$

$$s' = s - \frac{p}{100} s = s\left(1 - \frac{p}{100}\right)$$
$$s'' = s' + \frac{p}{100} s' = s'\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

da nun $s' = s\left(1 + \frac{p}{100}\right)$

so folgt $s'' = s\left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$

oder $\quad s'' = s\left(1 - \frac{p^2}{10000}\right)$

oder $\quad s'' = s - \frac{p^2}{10000} \cdot s$

Aus der letzten Form ergibt sich sofort, daß s'', z. B. für $p = 6\,\%$, um $\frac{36}{10000}$ von s kleiner ist als der ursprüngliche Betrag s.

5. Es folgt aus der Figur:

$$x^2 - y^2 = 40^2$$
$$(x - y)(x + y) = 40 \cdot 40$$
$$x + y = \frac{40 \cdot 40}{10} = 160$$

$$\begin{aligned} x + y &= 160 \\ x - y &= 10 \\ \hline 2x &= 170 \\ x &= 85 \\ \hline y &= 75 \end{aligned}$$

Lösung auf konstruktivem Weg.

Trage auf dem vertikalen Schenkel von S aus 10 mm nach abwärts ab und verbinde den Endpunkt C mit A. Jetzt die Mittelsenkrechte von AC! Diese schneidet den senkrechten Schenkel im gesuchten Punkt G.

---

6. $97 = 49 + 48$
$83 = 42 + 41$
$9 = 5 + 4$

Da der Unterschied zweier aufeinander folgender ganzer Zahlen gleich 1 ist, so ist in diesem speziellen Fall $x^2 - y^2 = x + y$!

---

7. Die vierfache Trapezfläche (4 T) hat den Flächeninhalt $4m^2 - 4n^2$; folglich $T = m^2 - n^2$
$= (m + n)(m - n)$

Nun ist aber $m - n$ die Trapezhöhe h
und $m + n$ die halbe Summe der beiden Parallelen,

folglich können wir $(m + n)(m - n)$ ersetzen durch $\frac{a + c}{2} \cdot h$,

woraus sich die Trapezformel $T = \frac{a + c}{2} \cdot h$ ergibt.

---

8. Halbmond $= \frac{\pi}{4} a^2 - \frac{\pi}{4} c^2$

$$= \frac{\pi}{4}(a^2 - c^2) = 121$$
$$a^2 - c^2 = \frac{484}{\pi}$$
$$(a - c)(a + c) = \frac{484}{\pi} = 7 \cdot 22 = 154$$

Nun ist aber $a - c$ gleich der größten Breite b des Halbmondes und darum folgt weiter:

$$a + c = \frac{154}{a - c} = \frac{154}{2} = 77$$

$a + c = 77$ $a - c = 2$ $2a = 79$ $2c = 75$	$a = 39{,}5$ cm $c = 37{,}5$ cm	Probe. $a^2 = 1560{,}25$ $c^2 = 1406{,}25$ $a^2 - c^2 = 154{,}00$ $\frac{\pi}{4}(a^2 - c^2) = \frac{22 \cdot 154}{7 \cdot 4} = 121$

9. Da $(x + y)(x - y) = 1$, so muß auch $x^2 - y^2 = 1$ sein. Solche Quadrate, deren Unterschied 1 beträgt, lassen sich aber unzählige angeben.

1. Beispiel.

$x^2 = 9{,}00$ $y^2 = 8{,}00$	$x = 3{,}00000$ $y = 2{,}8284$ $x + y = 5{,}8284$ $x - y = 0{,}1716$	Probe. $(x + y)(x - y) = 1$! $5{,}8\dot{2}\dot{8}\dot{4} \cdot 0{,}1\acute{7}16$ 40799 583 349 $1\,00015 = 1$!

2. Beispiel.

$x^2 = \frac{169}{25}$ $y^2 = \frac{144}{25}$ $x^2 - y^2 = \frac{25}{25} = 1$	$x = \frac{13}{5} = 2{,}6$ $y = \frac{12}{5} = 2{,}4$ $x + y = 5{,}0$ $x - y = 0{,}2$	Probe. $(x + y)(x - y) =$ $5 \cdot 0{,}2 = 1$

3. Beispiel. Man kann auch darauf hinweisen, daß $x + y = \frac{1}{x - y}$ sein muß, d. h. die Summe und die Differenz der gesuchten Zahlen x und y müssen zueinander reziprok sein. Auf Grund dieser Beziehung lassen sich ebenfalls leicht Zahlenpaare x und y bestimmen.

$x + y = 4$ $x - y = \frac{1}{4}$	$2x = \frac{17}{4}$ $x = \frac{17}{8}$	$2y = \frac{15}{4}$ $y = \frac{15}{8}$	$x^2 = \frac{289}{64}$ $y^2 = \frac{225}{64}$ $x^2 - y^2 = \frac{64}{64} = 1$!

10. $b^2 - p^2 = \frac{4}{3}$

$b + p = \frac{2}{3}$

durch Division dieser beiden Gleichungen erhalten wir $b + p$.

$b + p = 2 \left(\frac{6}{3}\right)$

$b - p = \frac{2}{3}$

$2b = \frac{8}{3}$

$b = \frac{4}{3}$

$p = \frac{2}{3}$

Es fällt auf:

Die größere der beiden Zahlen ist gleich groß wie die Differenz der Quadrate, die kleinere gleich der Differenz der Zahlen selber.

Es gelten also folgende Beziehungen:

1. $p = b - p$, also $b = 2p$
2. $b = b^2 - p^2$ oder da $b = 2p$ und $b^2 = 4p^2$
3. $2p = 4p^2 - p^2$

$3p^2 = 2p$

$p = \frac{2}{3} \quad b = \frac{4}{3}$

Wir gelangen somit zum selben Zahlenpaar b und p!

---

11. Aus der Fig. 28 folgt: [$p = 18$; $h = 24$]

$x^2 - y^2 = h^2 = 576$

$y - y = p = 18$

$x + y = \frac{24 \cdot 24}{18} = 4 \cdot 8 = 32$

$x + y = 32 \quad | \quad 2x = 50$

$x - y = 18 \quad | \quad x = 25 \qquad 2x = 50$

---

12. a) Länge des Rechtecks $= x + y$

Breite „ „ $= x - y$

Fläche $(x + y)\ (x - y)$

b)

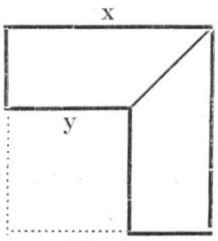


Fig. 52.

Legt man die beiden kongruenten Trapeze, in welche das Rechteck durch die 45°-Linie zerfällt, so aneinander, wie nebenstehende Figur es zeigt, so ist leicht ersichtlich, daß der Rechtecksinhalt

$$F = x^2 - y^2.$$

also $F = (x + y)\ (x - y)$ | zugleich Bestätigung der
und $F = \quad x^2 - y^2$ | S·D-Formel!

$$u = 2\ (x + y) - 2\ (x - y)$$
$$u = 4x$$

---

13. Gang der Lösung.

1. Berechnung von x aus dem bekannten Umfang.
   $x = u : 4$
2. Berechnung von y^2 aus dem Flächeninhalt F und x^2.
   Da nämlich $x^2 - y^2 = F$
   so ist ja $y^2 = x^2 - F$
3. Länge $= x + y$
   Breite $= x - y$.

Beispiel a. $F = 1425\ mm^2$
$u = 220\ mm.$

$x = \frac{u}{4} = 220 : 4 = 55$ | $x^2 = 3025$ | $l = x + y = 95$
$x^2 = 3025$ | $F = 1425$ | $b = x - y = 15$
| $y^2 = 1600$

Fläche	Umfang	x^2	y^2	x	y	l	b
1425	220,0	3025	1600	55	40	95	15
31,36	28,0	49	17,64	7	4,2	11,2	2,8
14,0	18,0	20,25	6,25	4,5	2,5	7,0	2
350,0	90,0	506,25	156,25	22,5	12,5	35,0	10,0
430,0	138,0	1190,25	760,25	34,500	27,573	62,073	6,927
20,0	20,0	25,0	5,00	5,0	2,236	7,236	2,764

1. Probe: Die doppelte Summe von l und b muß gleich dem gegebenen Umfang sein.
2. Probe: Das Produkt aus l und b muß den bekannten Flächeninhalt ergeben.

---

14. Das Verfahren von Nr. 13 führt zu einem negativen Ergebnis.
$u = 12 \qquad F = 12$

$$\begin{array}{r|l} x^2 = 9 & y^2 = -3 \\ F = 12 & y = ? \\ \hline x^2 - F = -3! & \end{array}$$

Es darf offenbar $x^2 - F$ nicht kleiner als Null sein, höchstens *gleich* Null. Es muß somit, da $u = F$ (Maßzahlen!) $\left(\frac{u}{4}\right)^2 \geqq u$.

Daraus folgt: $\frac{u^2}{16} = u$

$u = 16$ (mindestens!)

In der Tat ist beim Quadrat mit dem Umfang 16 cm die Fläche 16 cm².

$u = 16 \qquad x = 4 \qquad x^2 = 16 \qquad y^2 = 0$

Länge $= 4 + 0$

Breite $= 4 - 0$

---

15. Aus der Figur folgt:

$$y^2 - x^2 = 400 \ (= 20^2)$$
$$(y + x)\ (y - x) = 400$$

Nun ist aber $(y + x) = 60$, wie durch Abtragen von y auf der Verlängerung von x nach oben leicht zu erkennen ist. Folgt:

$$y - x = \frac{20}{3} \left(= \frac{400}{60}\right)$$
$$y + x = \frac{180}{3}$$
$$\overline{}$$
$$2y = \frac{200}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{100}{3} \\ x = \frac{80}{3} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Daraus } z = \frac{40}{3} \\ \left(\text{nämlich: } \frac{120}{3} - \frac{80}{3}!\right) \end{array}$$

Der Radius z ist $\frac{1}{3}$ vom Radius des Rundbogenfensters.

Andere Lösung. Aus dem schraffierten Dreieck folgt:

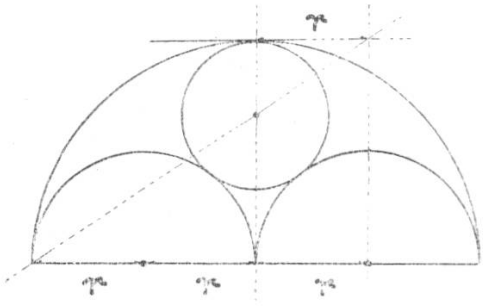


Fig. 53.

$$(20 + z)^2 = (40 - z)^2 - 20^2$$
$$40z = 1600 - 80z$$
$$z = \frac{160}{12} = \frac{40}{3}$$

Fig. 53 zeigt die planimetrische Konstruktion. (Ähnlichkeit!)

---

16. Denkt man sich den „senkrechten Schenkel" der Reißschiene nach links verschoben, so entsteht Fig. 54, aus der ohne weiteres ersichtlich ist:

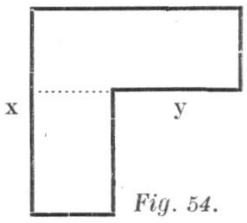


Fig. 54.

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 940 \\ x - y &= 10 \\ \hline x + y &= 94 \\ 2x &= 104 \\ 2y &= 84 \end{aligned} \quad \Big| \text{ dividieren!} \qquad \begin{aligned} x &= 52 \\ y &= 42 \end{aligned}$$

Die aufeinander folgenden Seiten messen: 10; 42; 21; 10; 52; 10; 21; 42; je mm.

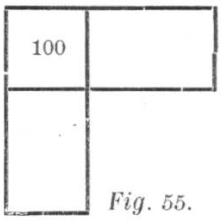


Fig. 55.

2. Lösung. Siehe Fig. 55!

Fläche $940 - 10^2 = 2 \cdot 420$

$420 : 10 = 42 = y$

usw.

---

17. Der Fehler besteht darin, daß beiderseits durch $a - a$ dividiert wird, also durch 0!

---

18. Mit gelösten Klammern lautet die Gleichung:

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} - \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} = ab$$

nach weggeschafftem Nenner lautet sie:

$$\underbrace{(a^2 + b^2 + 2ab) - (a^2 + b^2 - 2ab)}_{4ab} = 4ab$$
$$= 4ab$$

19. Das Einsetzen von Quadratzahlen an Stelle von a und b führt auf pythagoräische Tripel, d. h. auf ganzzahlige Lösungen der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$

$a = 16$	$a + b = 25$	$25^2 = 625$	
$b = 9$	$a - b = 7$	$7^2 = 49$	625
	$\sqrt{4ab} = 24$	$24^2 = 576$	
$a = 25$	$a + b = 34$	$34^2 = 1156$	
$b = 9$	$a - b = 16$	$16^2 = 256$	1156
	$\sqrt{4ab} = 30$	$30^2 = 900$	

usw. Das letzte Tripel läßt sich übrigens noch „kürzen", wodurch man das ursprüngliche Tripel 17; 8; 15 erhält.

---

20. $$h^2 = a^2 - m^2 = (a + m)\ (a - m)$$

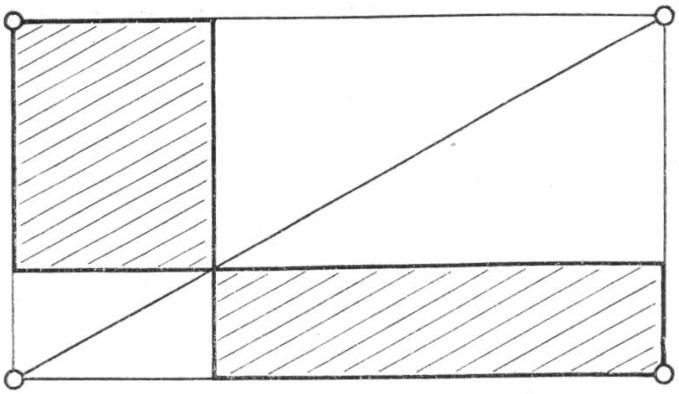


Fig. 56.

Man verwandelt nach dem Satz vom Ergänzungsparallelogramm (Fig. 56) das Höhenquadrat in ein Rechteck mit der Länge $a + m$; dann muß die sich ergebende Breite $= (a - m)$ sein, was mit Hilfe der beiden gestrichelten Kontrollbogen geprüft werden kann (Fig. 57).

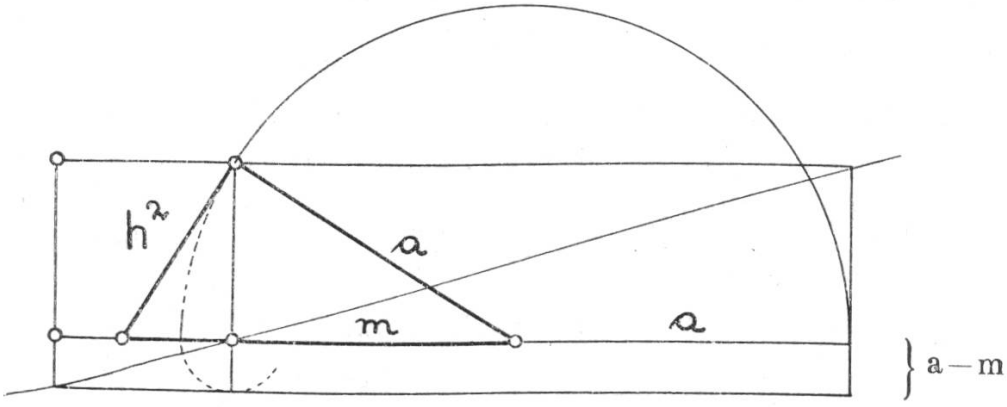


Fig. 57.

21. Trapez $= \frac{c}{2} \cdot (x+y) \cdot \underbrace{(x-y)}$

$$= \frac{c \cdot x + cy}{2} \cdot \quad h$$

$c \cdot x$ ist die Länge der untern Parallelen des Trapezes, usw.

---

22. Nach 14 gilt:

$x^2 - y^2 = 28\ cm^2$ | $x - y =$ Breite des Rechtecks
$x + y =$ Länge „ „

$$\underbrace{(x+y)}_{\text{Länge}} - \underbrace{(x-y)}_{\text{Breite}} = 2y = 3\ cm$$

$$y = 1{,}5$$

$$y^2 = 2\frac{1}{4}$$

folglich $x^2 = 28 + 2\frac{1}{4} = 30\frac{1}{4}$

$$x^2 = \frac{121}{4}$$

$$x = \frac{11}{2} = 5{,}5$$

$$y = \quad 1{,}5$$

Länge $x + y = 7{,}0$ } Diff. $= 3$!
Breite $x - y = 4{,}0$ } Prod. $= 28$!

Daneben natürlich auch folgende Lösung:

Länge $= l$ | $l - b = 3$
Breite $= b$ | $(l-b)^2 = 9$ } folglich
$4lb = 112$ } $(l+b)^2 = 121$ usw.

---

24. 1. Beispiel.

$a = 13$ | $s - a = 8$ } $F = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$ | oder:
$b = 14$ | $s - b = 7$ } $= \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}$ | $\sqrt{7056} = \underline{84}$
$c = 15$ | $s - c = 6$ } $= \sqrt{21 \cdot 21 \cdot 16}$ | $65\acute{6} : 16\acute{4}$
$u = 42$ | $s = 221$ } $F = 4 \cdot 21 = \underline{84}$

2. Beispiel. $F = 2310 \qquad h = 60$

3. Beispiel. $F = 12\sqrt{5} \qquad h = \frac{8}{3}\sqrt{5}$

25.

$a = a$	$s - a = 0{,}5\,a$	$F^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$
$b = a$	$s - b = 0{,}5\,a$	$F^2 = \frac{3}{16} \cdot a^4$
$c = a$	$s - c = 0{,}5\,a$	$F = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$
$u = 3\,a$	$s = 1{,}5\,a$	

---

26. Aus den Angaben folgt:

$$2\,(x-y)^2 = x^2 - y^2$$
$$2\,(x-y) = x + y$$

beiderseits durch $(x-y)$ geteilt:

$$2\,x - 2\,y = x + y$$
$$x - 3\,y = 0$$
$$x = 3\,y$$

x mußte also dreimal so groß sein wie y.

Beispiel:

$x = 12$	$x^2 = 144$	$x - y = 8$
$y = 4$	$y^2 = 16$	$(x-y)^2 = 64 = \frac{128}{2}$!
	$x^2 - y^2 = 128$	

---

27. Die Vermehrung der Zahl a um $\frac{3}{4}$ ihres Wertes kommt der Multiplikation von a mit $1\frac{3}{4}$ gleich; die Verminderung eines Betrages um $\frac{3}{4}$ desselben ist gleichbedeutend der Multiplikation des Betrages mit der Zahl $\frac{1}{4}$.

Das Ergebnis der ersten Operation sei b, das der zweiten c, dann folgt:

$$b = 1\frac{3}{4} \cdot a$$

$$c = \frac{1}{4} \cdot b = \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{4} \cdot a$$

$$c = \frac{7}{16} \cdot a$$

folglich ist die Verminderung $= \frac{9}{16}a = 56\frac{1}{4}\,\%$ von a.

Nun können wir $1\frac{3}{4}$ ersetzen durch $\left(1 + \frac{3}{4}\right)$

und $\frac{1}{4}$ „ „ $\left(1 - \frac{3}{4}\right)$

darum ist auch die nachstehende Formel richtig:

$$c = \left(1+\frac{3}{4}\right)\left(1-\frac{3}{4}\right)\cdot a$$

$$\text{also } c = \left(1-\frac{9}{16}\right)\cdot a = a-\frac{9}{16}a$$

woraus sofort zu ersehen ist, daß a um $\frac{9}{16}$a vermindert wird.

Aus dieser Darstellung ist auch ersichtlich, daß es auf dasselbe hinauskommt, in welcher Reihenfolge die beiden Operationen des Verminderns und Vermehrens vorgenommen werden, denn es ist:

$$a\cdot\left(1+\frac{3}{4}\right)\left(1-\frac{3}{4}\right) = a\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right)\left(1+\frac{3}{4}\right)$$

---

28. Produktengleichung:

$$(a-x)\ (a+x) = (b-y)\ (b+y)$$
$$a^2-x^2 = b^2-y^2$$

Im Dreieck mit den Seiten a, b und c $(= x+y)$ sind die Beziehungen, welche durch die obenstehenden zwei Gleichungen ausgedrückt werden, erfüllt, wenn x und y die durch die Höhe erzeugten Abschnitte auf der Seite c sind.

Anhang.

Tabelle I. **Ganze Maßzahlen für die Seiten rechtwinkliger Dreiecke.** (Rationale Beispiele.)

Hypotenuse	I. Kathete	II. Kathete	Hypotenuse	I. Kathete	II. Kathete
5	4	3	101	20	99
13	12	5	109	60	91
17	15	8	113	112	15
25	24	7	125	117	44
29	21	20	137	105	88
37	35	12	145	143	24
41	40	9	149	140	51
53	45	28	157	132	85
61	60	11	169	120	119
65	63	16	173	165	52
65	56	33	181	180	19
73	55	48	185	153	104
85	77	36	193	168	95
85	84	13	197	195	28
89	80	39	205	187	84
			221	171	140

Tabelle II. **Schiefwinklige Dreiecke mit rationalen Stücken.**

a	b	c	s	s — a	s — b	s — c	F	h_a	h_b	h_c
13	14	15	21	8	7	6	84	$\frac{168}{13}$	12	$\frac{56}{5}$
17	25	26	34	17	9	8	204	24	$\frac{408}{25}$	$\frac{204}{13}$
75	170	175	210	135	40	35	6300	168	$\frac{1260}{17}$	72
85	125	140	175	90	50	35	5250	$\frac{2100}{17}$	84	75
100	265	275	320	220	55	45	13200	264	$\frac{5280}{53}$	96
125	145	180	225	100	80	45	9000	144	$\frac{3600}{29}$	100
125	195	200	260	135	65	60	11700	187,2	120	117

Tabelle III. **Rechtwinklige Dreiecke mit rationalen Seiten, Höhen, Hypotenusenabschnitten und rationalem Inhalt.**

a	b	c	u	h	m	n	a+b	a−b	a+c b+c	F
40	30	50	120	24	32	18	70	10	90 80	600
100	75	125	300	60	80	45	175	25	225 200	3750
180	135	225	540	108	144	81	315	45	405 360	12150
360	270	450	1080	216	288	162	630	90	810 720	48600
480	360	600	1440	288	384	216	840	120	1080 960	86400
80	60	100	240	48	64	36	140	20	180 160	2400
156	65	169	390	60	144	25	221	91	325 234	5070
312	130	338	780	120	288	50	442	182	650 468	20280
624	260	676	1560	240	576	100	884	364	1300 936	81120
234	97,5	253,5	585,0	90	216	37,5	331,5	136,5	487,5 351,0	11407,5
255	136	289	680	120	225	64	391	119	544 425	17340
51	27,2	57,8	136	24	45	12,8	78,2	23,8	108,8 85,0	693,6