Zeitschrift: Jahrbuch der Sekundarlehrerkonferenz des Kantons Zürich
Herausgeber: Sekundarlehrerkonferenz des Kantons Zürich
Band: - (1929)

Artikel: Aufgaben für den Rechenunterricht der II. Klasse Sekundarschule
Autor: Gassmann, Emil
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-819524

Aufgaben

für den

Rechenunterricht der II. Klasse Sekundarschule

zusammengestellt

von

Emil Gassmann

Winterthur

Verlag der Sekundarlehrerkonferenz des Kantons Zürich

Allgemeine Bemerkungen.

Der Verfasser möchte auch bei dieser Zusammenstellung dem Prinzip der lebenswahren Problemstellung Geltung verschaffen. Grundsätzlich soll das Interesse des Schülers an dem Sachgebiet, das der Anwendung der Rechnungsoperationen und Rechnungsformen zu Grunde gelegt wird, geweckt werden. Dann bietet es Gelegenheit, gleichzeitig das praktische und das formale Können zu erweitern und zu vertiefen. Die Aufgabengruppen sind so gewählt, daß sie statt der Zersplitterung einem konzentrierten Schaffen rufen.

Die Abschnitte über allgemeine Prozentrechnungen, Wurzelziehen und Verhältnisgleichungen werden zusammengehalten durch die Leitaufgabe „Wie veranschaulicht man Zahlengrößen zweckmäßig?" Diese Aufgabestellung ist zeitgemäß, sie entspricht auch dem Arbeitsprinzip. Die errechneten Zahlen sind durch die Kontrolle auf ihre Richtigkeit nicht erledigt, sondern werden die Grundlage einer zweckmäßigen Tätigkeit (Veranschaulichung) und gewinnen dadurch an Bedeutung. Die Herstellung von Veranschaulichungen dient dem Verständnis realer Zusammenhänge; sie leitet den Schüler auch an, die zu Propaganda- und Reklamezwecken immer häufiger auftretenden, irreführenden und unrichtigen Veranschaulichungen zu erkennen.

Wenn in der 1. Klasse schon einfache graphische Darstellungen gezeichnet worden sind, so kann in der 2. Klasse gleich mit schwierigern Problemen begonnen werden. Tabelle 1 stellt die Preisschwankungen von Lebensmitteln von 1914 bis 1926 dar. Außer den wertvollen volkswirtschaftlichen Betrachtungen, die mit der Verarbeitung dieses Materials verbunden werden können, dient es dazu, die Bedeutung der Prozente als Vergleichsgrundlage verständlich zu machen. Für die Einführung genügt eine kleine Auswahl von etwa 3 Artikeln (z. B. Milch, Butter, weiße Bohnen) und die Beschränkung auf Anfangs-, Höchst- und Endpreis (s. Fig. 1 u. 2). Nachher folgt die Errechnung und Darstellung der Preisschwankungen einiger Artikel von 1914 bis 1926 (Fig. 3). Die Preise von 1914 sind der Ausgangswert der Verteuerung; sie werden mit 100 % angesetzt. Es ist für die Schüler eine neue, ungewohnte Aufgabe, beispielsweise die Zahl 62 in % von 35 auszudrücken (Brotpreis 1914 und 1922). Es ist sonst verfehlt, wenn man das Verhältnis kleiner

Zahlen (unter 100) prozentual aufeinander bezieht. So ist es ganz wertlos, die Zahl der Schüler einer Klasse, die an einem Ausflug nicht teilnehmen können, in % der Gesamtschülerzahl auszudrücken (von den 25 Schülern einer Klasse konnten 2 wegen Unwohlsein nicht an der Schulreise teilnehmen, d. h. 8 %; in der Parallelklasse [30 Schüler] fehlte 1 Schüler aus demselben Grund, d. h. 3,57 %!), weil diese Zufallszahl keinen Vergleichswert hat. In unserem Fall trifft das nicht zu, die %-Zahlen auch für die Zahlen unter 100 sind das zweckmäßigste Vergleichsmittel.

Die Tabelle 3 gibt uns das Material, um die prozentuale Verteilung verschiedener Größen innerhalb der Gesamtgröße darzustellen. Die Veranschaulichung kann durch Streifen oder Kreise gemacht werden. Beide Darstellungen eignen sich, um zugleich die absolute Größe der beiden Vergleichsgruppen (Betriebe in der Schweiz und im Kt. Zürich) und die relative Aufteilung wiederzugeben (Fig. 4).

In ähnlicher Weise kann Tabelle 4 verwendet werden. Wir fügen noch Tabelle 5 über das Rebareal und den Weinertrag im Kt. Zürich an. Sie dient zur Einführung in die abgekürzte Division.

Die Tabelle 6 liefert das Zahlenmaterial für das Ziehen von Quadratwurzeln, und da die Quadrate nachher in verkleinertem Maßstab gezeichnet werden, bildet sie auch den Ausgangspunkt für die Lehre von den Proportionen.

Die Tabellen 7, 8 und 9 enthalten weitern Übungsstoff.

Die Aufgabengruppe „Was in der Familie des Sekundarschülers Karl Weber gerechnet wird“ bringt in anderer Weise einen wichtigen Rechenstoff dieser Stufe in sinnvollen Zusammenhang. Unter Beschränkung auf das Wesentlichste wurde auf die große Mannigfaltigkeit der Aufgaben verzichtet, welche die Lehrmittel füllen, die aber in der Mehrheit nicht lebenswahr sind und darum füglich als „Knacknüsse“ in zweite Linie gerückt werden dürfen. Es sollte hier besonders leicht sein, das noch verwertbare Aufgabenmaterial des obligatorischen Lehrmittels an geeigneter Stelle einzuschieben. Die Ableitung der Zinsformel gibt ungesucht Gelegenheit zur Behandlung des Vielsatzes. Die Familienbeziehungen Karl Webers können natürlich noch weiteren Anlaß zum Rechnen geben; vor allem lassen sich aus dem Geschäft, in dem der Vater tätig ist, weitere Aufgaben des kaufmännischen Rechnens herbeiziehen.

Im dritten Abschnitt, „Schwierigkeiten des genauen Rechnens“, möchte ich zeigen, wie ein wenig beliebtes und leider oft vernachlässigtes Gebiet des Rechenunterrichtes so eingeführt werden kann, daß die Schüler den Wert des Verfahrens einsehen und es mit Interesse erlernen. Wie bei der abgekürzten Division kann man sich in der 2. Klasse mit dem hier gegebenen Anwendungsgebiet begnügen. Eine eingehendere Behandlung der abgekürzten Operationen gehört in die 3. Klasse.

Die drei Aufgabengruppen sollen den Sinn der Reform des Rechenunterrichtes kennzeichnen und den Weg zu einer freiern und zweckmäßigern Gestaltung desselben finden lassen.

I. Vergleich und Veranschaulichung von Zahlengrößen

Tabelle 1. **Preise wichtiger Lebensmittel beim Konsumverein Winterthur 1914—1926.**

September	1914	1916	1918	1920	1922	1924	1926
Butter am Stock	3.40	4.80	7.70	7.80	5.20	4.70	4.10
Käse, fett	2.30	2.60	4.20	4.70	3.50	4.—	3.60
Milch 1 l (im Laden)	—.25	—.27	—.33	—.46	—.33	—.39	—.35
Olivenöl 1 l	2.60	3.—	6.90	6.40	3.40	3.20	3.50
Brot 1 kg	—.35	—.56	—.78	—.78	—.62	—.57	—.58
Vollmehl	—.52	—.65	—.84	—.85	—.64	—.60	—.60
Weiße Bohnen	—.60	—.86	3.60	1.30	—.50	—.80	—.56
Teigwaren Ia.	—.68	1.—	1.42	1.60	1.06	1.—	1.—
Zucker, Kristall	—.68	—.95	1.36	2.15	—.84	—.86	—.54
Kohlen, Anthrazit	6.80	8.50	27.90	22.80	14.—	12.80	11.40
Seife Ia 1 kg	1.04	1.64	5.25	3.30	1.75	1.63	1.63

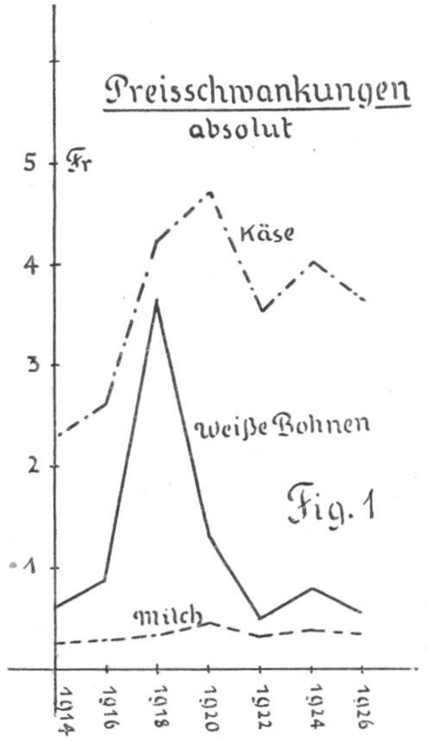
Erklärung der Tabelle 1. Sie enthält eine Zusammenstellung der Preise wichtiger Lebensmittel aus den Jahren 1914 bis 1926 und zeigt die Preisschwankungen, die für diese

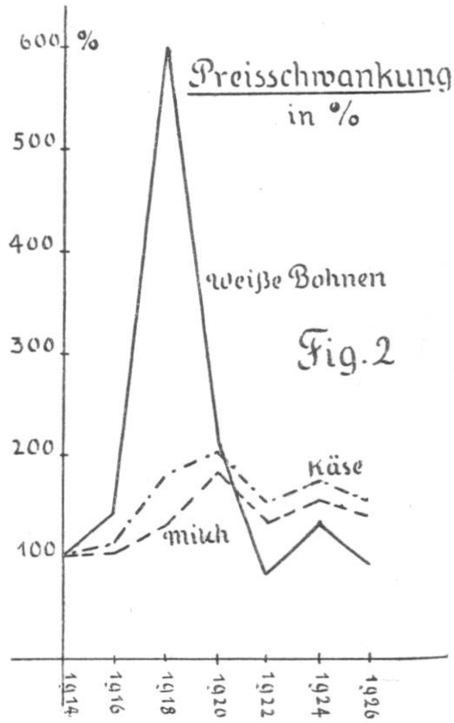
Tabelle 2.

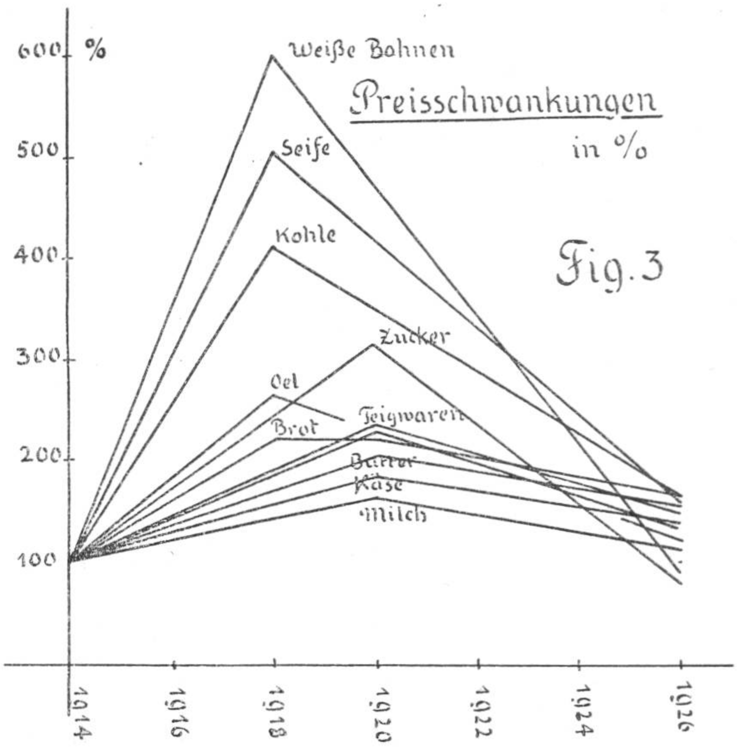
Preisschwankungen in %. (Lösungen zu Tabelle 1.)

	1914	1916	1918	1920	1922	1924	1926
Butter	100	141	226	229	162	138	121
Käse	100	113	183	204	152	174	156
Milch	100	108	132	184	132	156	140
Olivenöl	100	115	265	178	131	123	135
Brot	100	160	223	223	177	163	166
Mehl	100	125	161	163	123	115	115
Weiße Bohnen	100	143	600	216	83	133	93
Teigwaren	100	148	209	235	156	148	148
Zucker	100	140	200	316	123	126	79
Kohlen (Anthr.)	100	125	410	335	206	188	168
Seife	100	158	505	317	168	157	157

Zeit typisch sind. Aus der Bearbeitung ergeben sich Einblicke in die Abhängigkeit unserer Volkswirtschaft von den politischen Ereignissen der Welt. Der Gewinn an mathematischem Wissen ist die Einsicht, daß die Übersicht und auch die Veranschaulichung der absoluten Zahlen für die Vergleichung der Preis-







schwankungen verschiedener Artikel ungeeignet sind. Als zweckmäßige Vergleichsgrundlage dienen dagegen die in Prozent des Anfangspreises umgerechneten Zahlen (Tabelle 2).

Aufgaben: a) Veranschauliche die Preisbewegung von Milch, Käse und weißen Bohnen mit Hülfe eines Koordinatensystems (Fig. 1). Was befriedigt an dieser Darstellung nicht?

b) Dieselbe Art der Veranschaulichung, aber nicht mit absoluten Zahlen, sondern in Prozent des Anfangspreises (1914) ausgedrückt (Fig. 2).

c) Umrechnung der ganzen Preistabelle in % des Anfangspreises (Arbeitsteilung).

d) Vergleichung verschiedener Lebensmittelgruppen mit Hülfe der neuen Tabelle und graphische Veranschaulichung der Preisschwankungen.

e) Vereinfachte Darstellung unter Benützung der Anfangs-, Schluß- und Höchstzahl (Fig. 3).

Tabelle 3. **Landwirtschaftsbetriebe.**

Betriebstypen 1924	in der Schweiz Zahl	%	im Kt. Zürich Zahl	%
1. Wirtschaften mit erheblichem Ackerbau (mehr als 1/2 des Ackerlandes Getreide)	76643	**31,4**	6214	**29,4**
2. Wirtschaften mit erheblichem Ackerbau (bis 1/2 Getreide)	59138	**24,3**	4220	**19,9**
3. Reine Graswirtschaften	53346	**21,9**	5846	**27,6**
4. Wirtschaften mit etwas Ackerbau	31324	**12,9**	3329	**15,7**
5. Weidebetriebe	11172	**4,6**	46	**0,2**
6. Weinbaubetriebe	9025	**3,7**	1276	**6,0**
7. Waldbetriebe	1433	**0,6**	104	**0,5**
8. Streubetriebe	799	**0,3**	76	**0,4**
9. Gartenbaubetriebe	709	**0,3**	66	**0,3**
	243589	**100**	**21177**	**100**

Aufgabe: a) Vergleiche die Zahl der verschiedenen Landwirtschaftsbetriebe der Schweiz unter sich und mit der Gesamtheit aller Betriebe.

b) Dieselbe Aufgabe für den Kanton Zürich.

Die Vergleichung kann zunächst als Abschätzungsaufgabe im Kopf unter Verwendung gemeiner Brüche versucht werden. Bei diesem Versuch zeigen sich die Nachteile des Verfahrens deutlich.

c) Drückt die Zahl der verschiedenen Betriebe in % der Gesamtzahl aus.

d) Veranschaulichung durch Teilung eines Streifens von 1 dm Höhe.

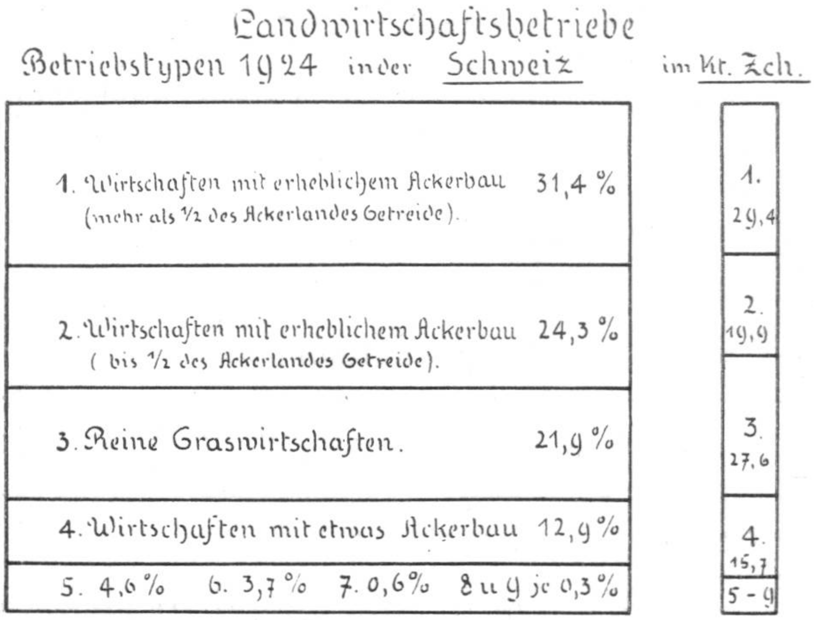


Fig. 4

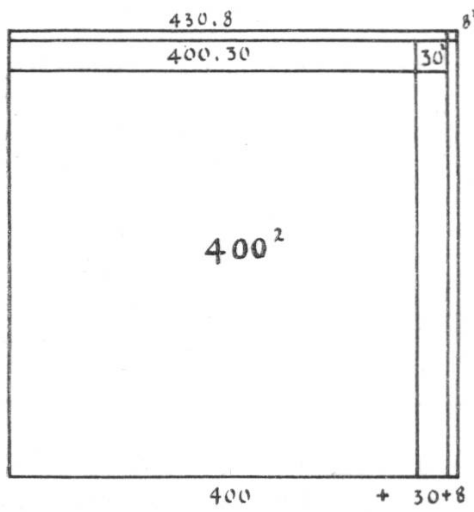


Fig. 5

e) Vergleich der Verhältnisse in der ganzen Schweiz und im Kanton Zürich (Fig. 4).

Durch verschiedene Breite der beiden Streifen kann zugleich das Verhältnis der absoluten Größe der Zahlen für die Schweiz und den Kanton Zürich ausgedrückt werden.

Tabelle 4.

Verteilung des Kulturlandes im Kanton Zürich. 1924.

	Gesamt-kulturland ha	Wiesland ha	Ackerland ha	Garten-land ha	Gemüse ha	Hülsen-früchte ha
1. Affoltern	8482,4	5311,3	944,3	43,8	25,8	18,9
2. Andelfingen	10862,5	5158,3	2895,4	104,5	25,8	16,9
3. Bülach	12621,0	6794,5	2692,5	94,5	84,5	25,6
4. Dielsdorf	11096,4	5935,7	2130,4	93,0	52,3	23,7
5. Hinwil	14687,4	9306,6	598,1	81,6	52,9	29,1
6. Horgen	7661,2	5632,0	455,9	32,9	54,6	21,1
7. Meilen	6833,0	3854,3	430,0	66,9	50,7	30,2
8. Pfäffikon	12600,5	7324,6	1148,6	96,0	45,3	15,9
9. Uster	9752,2	5711,6	1090,5	68,1	45,4	23,0
10. Winterthur	17736,1	9820,8	2814,8	100,7	90,6	41,6
11. Zürich	8487,2	4726,7	1665,3	107,0	320,7	93,9
Total Kt. Zürich	**120819,9**	**69576,4**	**16865,8**	**889,0**	**848,6**	**339,9**

Diese Tabelle kann in gleicher Weise benützt werden wie Tabelle 3. Durch Verteilung der Rechnungsarbeit unter verschie-

Tabelle 5.

Rebareal im Kanton Zürich. 1912—1923.

Jahre	Rebbesitzer ha	Fläche des Reblandes ha	Verkehrswert des Reblandes Fr.
1910	14581 (**0,22**)	3235,2	18972963 (**5865**)
1914	11775 (**0,20**)	2430,7	13628073 (**5606**)
1918	9516 (**0,19**)	1811,5	11414035 (**6301**)
1922	8075 (**0,18**)	1466,0	10000127 (**6822**)

Weinertrag im Kanton Zürich. 1912—1923.

Jahre	Ertrag in hl	Wert des Ertrages in Fr.	
1912	56524	1999070	**(35,38)**
1913	18194	963220	**(52,67)**
1914	28862	1369800	**(47,46)**
1915	115977	5792830	**(49,95)**
1916	35760	2350470	**(65,73)**
1917	72837	6672140	**(91,60)**
1918	57933	8329710	**(145,54)**
1919	48116	5510400	**(114,52)**
1920	35906	5297580	**(147,54)**
1921	47596	5990860	**(125,87)**
1922	94921	5590080	**(58,89)**
1923	44620	4625900	**(103,67)**

1912—1923 = 657246 hl Fr. 54492060
Durchschnittsertrag 54770,5 hl
Durchschnittswert im Ganzen Fr. 4541005
pro hl „ 82.91

dene Schülergruppen kann die Arbeitszeit verkürzt werden, ohne daß die Kontrolle der Einzelergebnisse unterbleiben muß.

Mit den Angaben über das Rebareal und den Weinertrag im Kanton Zürich läßt sich vorteilhaft die abgekürzte Division üben. Diese ist so einfach und in diesem Fall auch leichtverständlich, daß theoretische Auseinandersetzungen auf ein Minimum beschränkt werden können.

Aufgaben: a) Wieviele ha Rebland fielen in den Jahren 1910—1922 durchschnittlich auf einen Rebbesitzer?

b) Berechne den durchschnittlichen Verkehrswert 1 ha Rebland in den Jahren 1910—1922.

c) Wieviel galt durchschnittlich 1 hl Wein in den Jahren 1912—1923.

Rechnungsbeispiel: Im Jahre 1922 besaßen
8075 Rebbesitzer zusammen 1466 ha
1 „ ?

Welches wird der höchste Stellenwert des Ergebnisses? (Zehntel)

Auf welche Genauigkeit hat das Ergebnis sinngemäß berechnet zu werden? (Aren)

$$\begin{array}{l} 1466 \text{ ha} : 8075 = 0{,}18 \text{ ha} \\ 658 \\ 13 \end{array}$$

Im Jahre 1922 entfielen auf einen Rebbesitzer im Kanton Zürich durchschnittlich **18 a** Rebland.

d) Stellt die Ergebnisse der vorigen Rechnungen graphisch dar?

Bemerkung: Es ist natürlich nicht nötig, daß alle Schüler alle graphischen Darstellungen machen. Die reiche Auswahl dieser Veranschaulichungen wird vielmehr das Ergebnis einer zweckmäßigen Kollektivarbeit sein.

Tabelle 6. **Größe der Schweiz im Vergleich zu den Nachbarländern und zu Rußland.**

	Grösse in km²	Seite eines gleich grossen Quadrats in km	im verkleinerten Masstab 1 : 20 000 000 cm
Rußland	4 131 600	**2032**	**10,16**
Frankreich	551 000	**742**	**3,71**
Deutschland	470 200	**685**	**3,42**
Italien	312 600	**558**	**2,79**
Österreich	84 000	**289**	**1,45**
Schweiz	41 300	**203**	**1,01**

Aufgabe: Die Schweiz soll mit den Nachbarländern (und mit Rußland) nach dem Flächeninhalt verglichen werden. Die Veranschaulichung durch Quadrate erscheint hiezu geeignet. Wir müssen also die Seiten flächengleicher Quadrate suchen. Diese Aufgabe läßt sich durch Probieren lösen und es ist lehrreich, den Versuch an einigen Beispielen durchzuführen. Da ein solches Verfahren nicht befriedigen kann, ergibt sich das Bedürfnis nach einer mathematisch einwandfreien Methode des Wurzelziehens.

Die zweite Wurzel.

Grundlage für das Wurzelziehen ist die Kenntnis der Quadratzahlen zwischen 1 und 100.

Das Verfahren des Wurzelziehens ergibt sich als Umkehrung eines zweckmäßigen Potenzierens.

Wir entwickeln es aus dem Quadrat zweistelliger Zahlen.

$43 \,.\, 43$	$(40 + 3)(40 + 3)$
9	$3 \,.\, 3$
$12 \,.$	$40 \,.\, 3$
$12 \,.$	$40 \,.\, 3$
$16 \,.$	$40 \,.\, 40$
1849	$40^2 + 2 \,.\, 40 \,.\, 3 + 3^2 = 1849$

Allgemein $(z + e)^2 = z^2 + 2 \,.\, z \,.\, e + e^2$

Entwickelt nach dieser Formel 29^2, 54^2, 72^2, 11^2, 99^2. Geometrische Veranschaulichung von 43^2 (an der Tafel in cm, im Heft in mm).

Feststellung: Vergrößert man die Seite eines Quadrates von 40 cm Länge um 3 cm, so besteht das Quadrat über der Seite 43 cm nicht nur aus $a^2 + b^2$, sondern dazu noch aus zwei gleichgroßen Rechtecken mit den Seiten 40 cm und 3 cm $(2 \,.\, 40 \,.\, 3)$.

Anfänglich ist es vorteilhaft, die Wurzel aus Quadratzahlen zu ziehen, die unmittelbar vorher durch Potenzieren erhalten worden sind, weil dadurch der Zusammenhang beider Verfahren klarer vor Augen tritt.

	$40^2 = 1600$		$\sqrt{1849} = 4.$
$43^2 =$	$2 \,.\, 40 \,.\, 3 = 240$	$= 1849$	1600
	$3^2 = 9$		249

Der Zehner der Wurzel muß erraten werden. Der Rest 249 besteht aus $2 \,.\, z \,.\, e + e^2$. Da e^2 verhältnismäßig klein ist, kann es beim Aufsuchen des „unbekannten“ e vorläufig vernachläßigt werden. Also setzen wir

$$2 \,.\, 40 \,.\, e \sim 249$$
$$e \sim 249 : 80 = 3$$

Da es sich beim Suchen des e nicht um ein streng richtiges Verfahren, sondern um ein Probieren handelt, ist das Ergebnis erst sicher, wenn sich vom Rest 249 die beiden Posten $2 \,.\, 40 \,.\, 3$ und 3^2 abziehen lassen. Im vorliegenden Fall bleibt nach Abzug derselben 0 übrig, was uns bestätigt, daß 1849 eine Quadratzahl ist.

In derselben Weise sollen noch mehrere Potenzen behandelt werden: 34^2, 41^2, 58^2, 66^2 usw.

$\sqrt{1024}$,	$\sqrt{5329}$,	$\sqrt{9025}$,	$\sqrt{7569}$,	$\sqrt{169}$	etc.
(32)	**(73)**	**(95)**	**(87)**	**(13)**	

Es folgen Beispiele nachstehender Art:

$$350^2,\ 470^2,\ 570^2,\ 610^2,\ 790^2,\ 804^2 \text{ etc.}$$
$$430^2 = 400^2 + 2 . 400 . 30 + 30^2$$
$$(h + z)^2 = h^2 + 2 . h . z + z^2$$

Zur Veranschaulichung dient dieselbe Zeichnung, indem wir statt 43 cm 430 mm setzen können.

$$\sqrt{129600},\quad \sqrt{608400},\quad \sqrt{122500} \text{ etc.}$$
(36) **(78)** **(35)**

Die Allgemeingültigkeit des Satzes $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ kann den Schülern eindringlich zum Bewußtsein gebracht werden, wenn man ihnen zeigt, daß er nicht an das dekadische System gebunden ist:

$$7^2 = (4 + 3)^2 = 4^2 + 2 . 4 . 3 + 3^2 = 49$$
$$13^2 = (9 + 4)^2 = 9^2 + 2 . 9 . 4 + 4^2 = 169$$

Nun begreifen sie auch leichter jene Beispiele, bei denen das b nicht unmittelbar richtig gefunden wird:

$$\begin{array}{l} \sqrt{2|89} = 1. \\ \underline{100} \\ 189 : 20 \end{array}$$

(Planmäßiges Aufsuchen des Einers, nicht sprunghaft vorgehen!)

Ähnliche Beispiele: $\sqrt{225}$, $\sqrt{841}$, $\sqrt{361}$ etc.
(15) **(29)** **(19)**

Nachdem eine gewisse Fertigkeit im Ausziehen zweistelliger, rationaler Wurzeln erreicht ist, bereiten die dreistelligen Wurzeln keine Schwierigkeiten mehr.

$$\begin{aligned} 438^2 &= (430 + 8)^2 \\ &= 430^2 + 2 . 430 . 8 + 8^2 \end{aligned}$$

Wir benutzen zur Veranschaulichung dieselbe Zeichnung wie bei 43^2, indem wir die Seite um 8 mm verlängern. Dann treten zu den frühern Figuren hinzu zwei Rechtecke mit den Seiten 430 mm und 8 mm und ein Quadrat mit der Seite 8 mm. Wir stellen die Übereinstimmuug fest zwischen der Einteilung des Quadrates (438^2) und der auf obige Weise zerlegten Potenz

$$\begin{aligned} 438^2 = (400^2 &+ 2 . 400 . 30 + 30^2 \\ &+ 2 . 430 . \ 8 + \ 8^2 \end{aligned}$$

(s. Fig. 5)

$$\begin{array}{rl}
 & \sqrt{191844} = 43. \\
h^2 & \underline{16\ldots.} \\
 & 31844 : 800 \\
2.h.z & \underline{24\ldots} \\
 & 7844 \\
z^2 & \underline{900} \\
 & 6940 : 860
\end{array}$$

$$(430 + e)^2 = 430^2 + 2 \,.\, 430 \,.\, e + e^2$$
$$6940 \sim 2 \,.\, 430 \,.\, e$$
$$e \sim \frac{6940}{2 \,.\, 430} = 8$$

Bezeichnet man allgemein mit a den schon gefundenen Teil der Wurzel, mit b die nächste gesuchte Stelle, so läßt sich immer nach der Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$ rechnen.

Vereinfachung des Verfahrens:

$$\begin{array}{r}
\sqrt{61|30|89} = 783 \\
\underline{49|00|00} \\
12\,30|89 : 1400 \\
11\,20|00 \\
\underline{.\,64|00} \\
46\,89 : 1560 \\
46\,80 \\
\underline{9} \\
-
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
\sqrt{613089} = 783 \\
\underline{49} \\
1230 : 14 \\
1120 \\
\underline{64} \\
4689 : 156 \\
4680 \\
\underline{9} \\
-
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\sqrt{61|30|89} = 783 & \\
123'0 & : 14_8 \\
4689 & : 156_3 \\
0 &
\end{array}$$

(Nachdem man durch Division durch 2 a das b gefunden hat, hängt man dieses dem Divisor an. Dann kann der Rest $2\,a\,b + b^2$ durch einfache Multiplikation mit b gefunden und abgezogen werden.)

Das Lehrbuch von Gubler enthält genügend Beispiele für rationale Wurzeln.

Schwierigere Beispiele:

$$\sqrt{307^2}, \quad \sqrt{643204}, \quad \sqrt{11881} \text{ etc.}$$
(94249) (802) (109)

Es ist nicht tunlich, das ganze Übungsmaterial vorwiegend in rationalen Beispielen zu suchen, es ist vielmehr notwendig, den Schüler rechtzeitig darauf aufmerksam zu machen, daß bei praktischen Aufgaben rationale Wurzeln eine seltene Ausnahme sein werden. Zwischen den ganzzahligen Quadratzahlen 9 und 16 liegen schon 7 ganze Zahlen, aus denen die Quadratwurzel irrational ist, und diese Zwischenzahlen nehmen von Quadratzahl zu Quadratzahl zu (Reihe der ungeraden Zahlen). Aus demselben Grunde können wir die Wurzel aus gemeinen und Dezimalbrüchen auf den Schluß versparen, da sie mehr als theoretische Ergänzung notwendig sind. Dient das Wurzelziehen der Erlangung von Maßzahlen fürs Zeichnen, wie bei der Eingangsaufgabe und den nachfolgenden Aufgaben, so genügen in der Regel dreiziffrige Ergebnisse.

Bei Wandtafelzeichnungen hat man es mit einer Anzahl dm zu tun und kann nicht über eine Genauigkeit auf 1 mm hinauskommen. Im Hefte hat man es mit cm, mm und $\frac{\text{mm}}{10}$ zu tun. Selbst in großen Zeichnungen ist die Verwendung von Maßzahlen, die mehr als 4 Ziffern aufweisen, ausgeschlossen (z.B. 25,76 cm). Es ist daher fruchtbarer, bei den Übungen ein Material zu wählen, das diesem Umstand Rechnung trägt, als rein mechanisch 5- und 6-ziffrige rationale und irrationale Wurzeln auszuziehen.

Der Begriff der irrationalen Wurzel bereitet dem Schüler keinerlei Schwierigkeiten. Man denkt sich die Sache so, daß man die Wurzel aus einer möglichst nahe an der gegebenen Zahl liegenden Quadratzahl zieht. Haben wir beispielsweise $\sqrt{181}$ zu rechnen, so ist die nächstliegende ganze Quadratzahl 169, die Wurzel auf ganze gerechnet 13. Will man auf Zehntel rechnen, so ist die entsprechende Quadratzahl 179,56, die Wurzel 13,4. Für die Genauigkeit auf Hundertstel ist die Quadratzahl 180,9025 maßgebend. $\sqrt{180{,}9025} = 13{,}45$. Natürlich ist es nicht nötig, daß man eine solch naheliegende Quadratzahl kennt, man wendet vielmehr das entwickelte Verfahren an ohne Rücksicht darauf, daß die Wurzel rational oder irrational sein kann. Nun kann die Eingangsaufgabe gelöst werden, und die folgenden drei Tabellen enthalten nochmals ein ähnliches Material (Fig. 6).

Die Behandlung der Potenzen und Wurzeln gemeiner Brüche ist notwendig im Hinblick auf die Algebra.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2^2}{3^2} \text{ also } \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3} \text{ etc.}$$

Sofern nicht Zähler und Nenner Quadratzahlen sind, schreibt man den gemeinen Bruch erst in Form eines Dezimalbruches und zieht aus diesem die Wurzel:

Tabelle 7. **Größenverhältnis der Erdteile.**

Erdteile	km²	Seite eines gleich grossen Quadrates km	Verkleinerung Masstab 1:100000000 cm
Asien	44163670	**6645**	**6,6**
Amerika	39000650	**6245**	**6,2**
Afrika	30057500	**5482**	**5,4**
Polargebiete	12669500	**3559**	**3,5**
Europa	9897150	**3146**	**3,1**
Australien	8954420	**2992**	**2,9**

Tabelle 8.

Größenverhältnis der Schweizerkantone.

	Grösse in km²	Seite eines gleich grossen Quadrates km	Verkleinerung Masstab 1 : 400000 cm
Zürich	1729	**41,5**	**1,04**
Bern	6884	**82,9**	**2,07**
Luzern	1492	**38,6**	**0,96**
Uri	1074	**32,7**	**0,82**
Schwyz	908	**30,1**	**0,75**
Unterwalden	768	**27,7**	**0,69**
Glarus	685	**26,1**	**0,65**
Zug	240	**15,4**	**0,39**
Freiburg	1671	**40,8**	**1,02**
Solothurn	792	**28,1**	**0,70**
Basel	464	**21,5**	**0,54**
Schaffhausen	298	**17,2**	**0,43**
Appenzell	415	**20,4**	**0,51**
St. Gallen	2014	**44,8**	**1,1**
Graubünden	7113	**84,3**	**2,1**
Aargau	1403	**37,3**	**0,93**
Thurgau	1006	**31,7**	**0,79**
Tessin	2813	**53,2**	**1,3**
Waadt	3212	**56,5**	**1,4**
Wallis	5335	**72,3**	**1,8**
Neuenburg	800	**29,2**	**0,73**
Genf	282	**16,7**	**0,41**

Tabelle 9. **10 Schweizerseen.**

	Grösse in km²	Seite eines gleich grossen Quadrates in km	im verkleinert. Masstab 1 : 500 000 mm
Genfersee	581,4	**24,1**	**48,2**
Bodensee	537,4	**23,1**	**46,2**
Neuenburgersee	215,8	**14,6**	**29,2**
Vierwaldstättersee	113,7	**10,6**	**21,2**
Zürichsee	88,5	**9,4**	**18,8**
Thunersee	47,8	**6,9**	**13,8**
Zugersee	38,2	**6,2**	**12,4**
Walensee	24,2	**4,9**	**9,8**
Greifensee	8,5	**2,9**	**4,8**
St. Moritzersee	0,7	**0,8**	**1,6**

$$\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{0{,}75} \qquad \sqrt{\frac{5}{6}} = \sqrt{0{,}8333\,..} \quad \text{etc.}$$

$$0{,}7^2 = 0{,}49 \text{ also } \sqrt{0{,}49} = 0{,}7 \text{ (nicht } 0{,}07!)$$

$$0{,}07^2 = 0{,}0049 \text{ also } \sqrt{0{,}0049} = 0{,}07$$

$$\sqrt{0{,}16},\ \sqrt{0{,}09},\ \sqrt{0{,}0004},\ \sqrt{0{,}0196}$$

Quadrate von Dezimalbrüchen haben immer eine gerade Stellenzahl nach dem Komma. Quadratwurzeln aus Dezimalbrüchen mit ungerader Stellenzahl sind daher immer irrational

$$\sqrt{0{,}9} = \sqrt{0{,}90} \qquad \sqrt{0{,}025} = \sqrt{0{,}02|50} \quad \text{etc.}$$

Zur Erklärung dient auch die Schreibung in Form von gemeinen Brüchen:

$$\sqrt{0{,}09} = \sqrt{\frac{9}{100}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{100}} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

$$\sqrt{0{,}9} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Die Verhältnisgleichung.

Bei der Veranschaulichung des Größenverhältnisses von Flächen, z. B. der Schweizerseen, müssen wir den verkleinerten Maßstab benützen (1 : 500000). Dies ist eine vorzügliche Gelegenheit zur Einführung der Verhältnisgleichung (Proportion).

Entgegen der Gepflogenheit, zuerst von Verhältnissen zu sprechen, muß darauf hingewiesen werden, daß der Begriff des Verhältnisses mathematisch erst in der Verhältnisgleichung Bedeutung hat. Wenn ich 2 Dinge, z.B. 2 Strecken vergleiche, so drücke ich das Größenverhältnis durch Maßzahlen aus und dann haben wir 4 Größen vor uns. Wenn die Strecke a = 6 dm und die Strecke b = 8 dm, so verhalten sie sich wie die Zahlen 6 und 8 (schreibe 6 : 8) oder 3 : 4. Durch den Vergleich gelangen wir also zur Proportion

$$a : b = 3 : 4$$

Ursprünglich werden Proportionen meist diese Form gehabt haben: 2 gleichartige Dinge stehen zueinander in einem Größenverhältnis, das durch Maßzahlen ausgedrückt werden kann. Erst die Abkürzung dieser Maßverhältnisse führt zur Proportion in unbenannten Zahlen. Es ist gut, wenn wir zunächst diese Entwicklung im Auge behalten und vor allem Größenverhältnisse von Dingen zahlenmäßig ausdrücken, wodurch wir ohne weiteres die Verhältnisgleichung mit ihren besondern Eigenschaften erhalten. Nur bei diesem Hergang begreift der Schüler, daß der Wert des einzelnen Verhältnisses, der ja die Grundlage der Gleichung ist, nach seiner Größe von untergeordneter Bedeutung ist. Die Kenntnis der Größe des Verhältnisses spielt allerdings beim verkleinerten Maßstab eine Rolle, was auch dadurch zum Ausdruck kommt, daß es immer die Form 1 : . . . annimmt. Es sagt uns auf den ersten Blick, wie manchmal größer die Strecke in Natur als in der Zeichnung ist.

Von diesen, dem Schüler bekannten Verhältnissen, können wir am augenscheinlichsten durch Zeichnungen zu der allgemeinen Form der Proportion überleiten.

Aufgaben: a) Zeichnet zwei Strecken an die Tafel (anfänglich am besten parallel) und schätzt ab, wie sie sich nach ihrer Länge zueinander verhalten. Durch Messen derselben in cm bekomme ich ein genaueres Maßverhältnis. Der Zufall kann es mit sich bringen, daß wir hier schon das Verhältnis der Maßzahlen abkürzen können.

b) Zeichnet (schätzungsweise) zu einem an der Tafel gegebenen Rechteck ein ähnliches, von dem eine Seite gegeben ist. Meßt nachher die Seiten und vergleicht die Zahlenverhältnisse (Fig. 7).

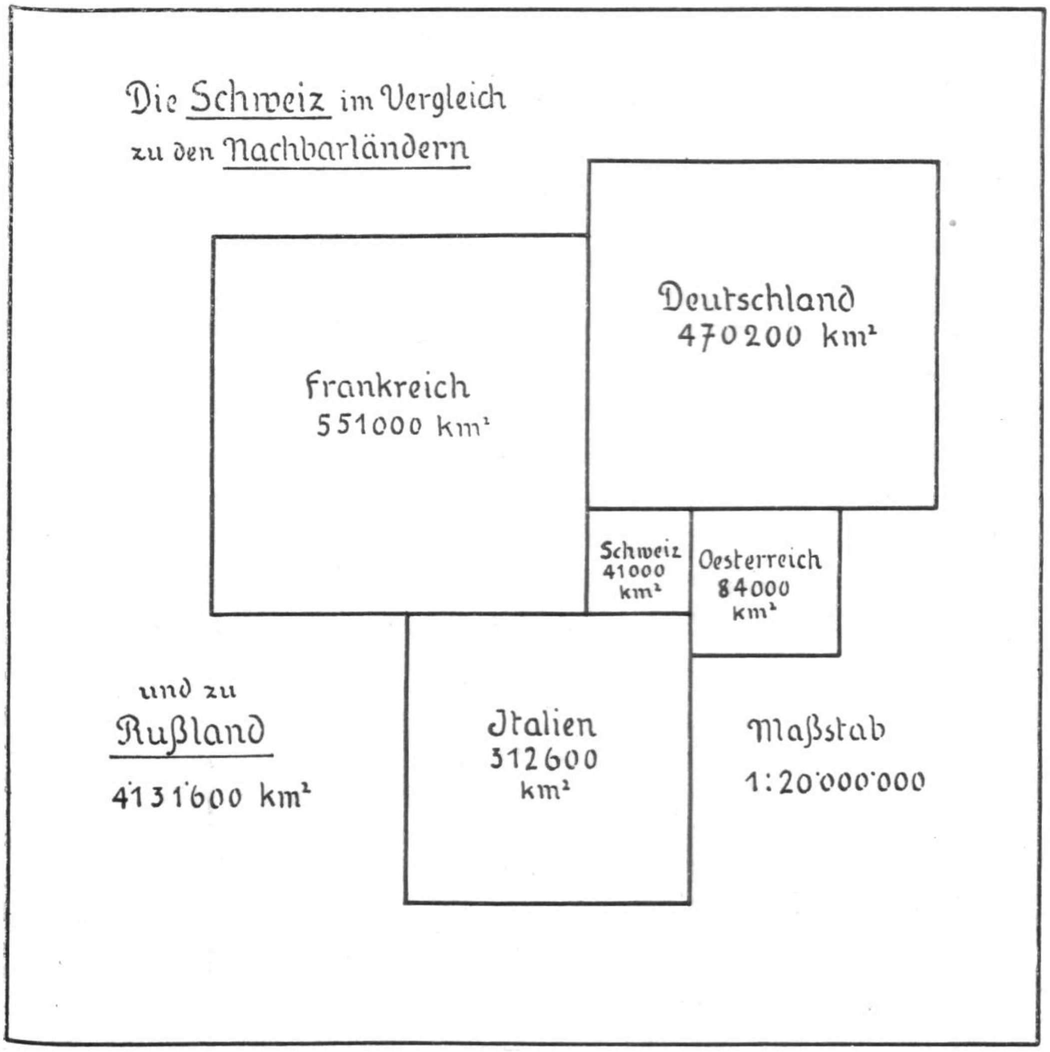


Fig. 6

c) Zeichnet zu 3 gegebenen Strecken die vierte Proportionale. Meßt nachher die Strecken und vergleicht die Zahlenverhältnisse (Fig. 8).

d) Kürzt folgende Zahlenverhältnisse ab:

8 : 12 = **(2 : 3)**	15 : 45 = **(1 : 3)**	11 : 77 = **(1 : 7)**
10 : 30 = **(1 : 3)**	18 : 48 = **(3 : 8)**	27 : 63 = **(3 : 7)**
25 : 35 = **(5 : 7)**	18 : 54 = **(1 : 3)**	42 : 56 = **(6 : 7)**
24 : 36 = **(2 : 3)**	35 : 49 = **(5 : 7)**	36 : 96 = **(3 : 8)**

e) Setzt zu folgenden Zahlenverhältnissen gleich große durch Erweitern:

3 : 4 =	1 : 9 =	3 : 10 =
2 : 5 =	7 : 8 =	13 : 2 =
4 : 7 =	5 : 11 =	7 : 13 =
6 : 2 =	11 : 12 =	15 : 8 =

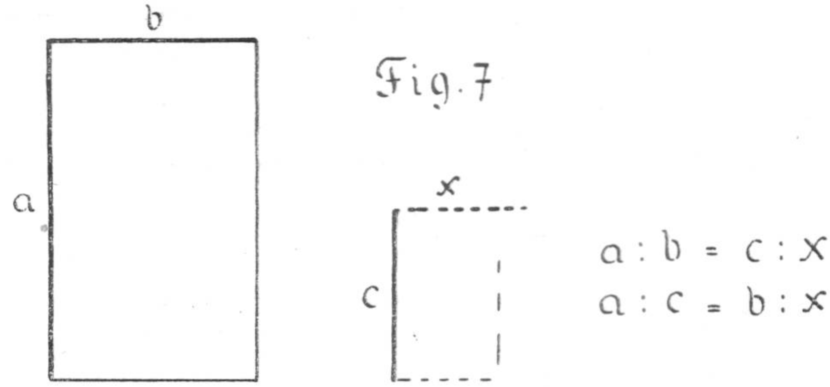


Fig. 7

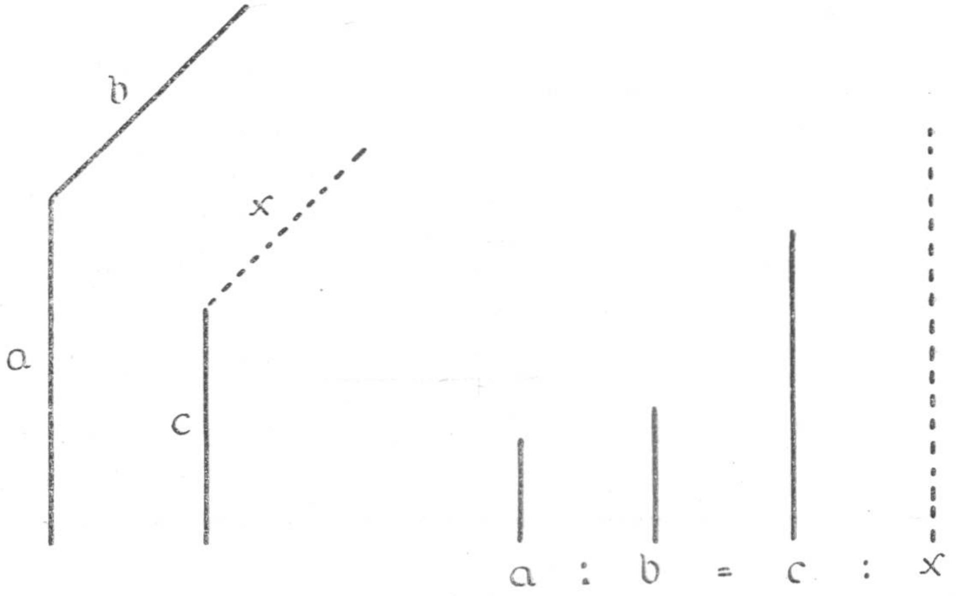
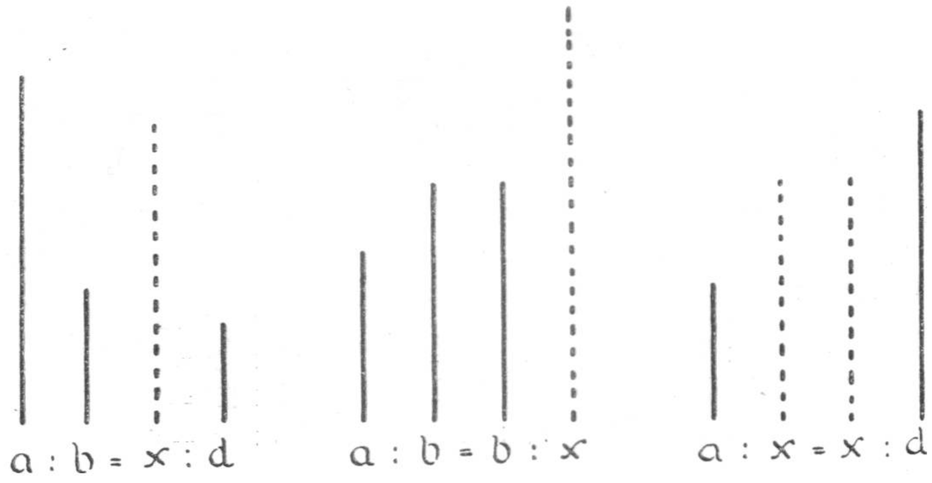


Fig. 8



f) Drückt folgende Verhältnisse ganzzahlig aus:

$1\frac{1}{2} : 2\frac{1}{2} = \mathbf{3:5}$	$\frac{2}{5} : \frac{4}{5} = \mathbf{1:2}$	$4\frac{3}{4} : 5\frac{1}{4} = \mathbf{19:21}$
$\frac{1}{2} : \frac{7}{2} = \mathbf{1:7}$	$\frac{3}{15} : \frac{2}{5} = \mathbf{1:2}$	$\frac{6}{7} : \frac{6}{5} = \mathbf{5:7}$
$\frac{1}{3} : \frac{1}{6} = \mathbf{2:1}$	$2{,}4 : 3{,}5 = \mathbf{24:35}$	$2\frac{1}{2} : 20 = \mathbf{1:8}$
$2\frac{1}{3} : 3 = \mathbf{7:9}$	$3\frac{1}{5} : 2{,}6 = \mathbf{16:13}$	$3\frac{2}{3} : 4\frac{3}{4} = \mathbf{44:57}$

g) Wie verhalten sich:

36 Fr. : 54 Fr.	**(2 : 3)**	24 cm : 4800 m	**(1 : 20000)**
3,5 m : 5,6 m	**(5 : 8)**	3,5 cm : 14 km	**(1 : 400000)**
2,25 dm² : 6,25 dm²	**(9 : 25)**	5,3 km : 10,6 cm	**(50000 : 1)**
$7\frac{1}{2}$ a : $8\frac{3}{4}$ a	**(6 : 7)**	49 km : 7 dm	**(70000 : 1)**

Aus der genaueren Betrachtung der Verhältnisgleichungen ergibt sich, daß alle in folgender Form geschrieben werden können:

$$a : b = n \cdot a : n \cdot b$$

Der Erweiterungsfaktor n kann alle Werte von 1 bis ∞ haben. Denkt man an den Wert der einzelnen Verhältnisse, so kann man der Gleichung auch die Form $\frac{a}{b} = \frac{na}{nb}$ geben.

h) Sucht in folgenden Proportionen den Erweiterungsfaktor:

$5 : 13 = 60 : 156$	**(12)**	$42 : 66\frac{1}{2} = 6 : 9\frac{1}{2}$	**(7)**
$12 : 17 = 48 : 68$	**(4)**	$4\frac{1}{3} : 5\frac{1}{4} = 13 : 15\frac{3}{4}$	**(3)**
$24 : 30 = 36 : 45$	**($1\frac{1}{2}$)**	$6{,}8 : 9{,}7 = 136 : 194$	**(20)**
$7 : 11 = 17{,}5 : 27{,}5$	**($2\frac{1}{2}$)**	$22{,}4 : 10{,}6 = 24{,}64 : 11{,}66$	**(1,1)**

i) Verändere folgende Proportionen unter Beibehaltung eines Gliedes:

$3 : 4 = 12 : 16$	Beispiel: $3 : 4 = 12 : 16$
$15 : 5 = 27 : 9$	$21 : 28 = 12 : 16$
$2 : 3 = 10 : 15$	$21 : 14 = 12 : 8$
$1 : 7 = 2{,}5 : 17{,}5$	$27 : 7 = 12 : 4$

k) Errate in folgenden Proportionen das fehlende Glied:

$1 : 2 = x : 6$	**(3)**	$10 : x = 25 : 5$	**(2)**
$3 : 4 = 9 : x$	**(12)**	$x : 3 = 27 : 9$	**(9)**
$x : 5 = 3 : 15$	**(1)**	$75 : 100 = x : 1000$	**(750)**
$7 : x = 14 : 2$	**(1)**	$60 : 48 = 10 : x$	**(8)**

Die oben gegebene algebraische Form der Gleichung läßt uns leichter erkennen, daß in einer Verhältnisgleichung nur drei unabhängige Größen (a, b und n) stecken und daß man darum ein fehlendes Glied aus den drei bekannten berechnen kann. Die Berechnung kann zunächst durch Aufsuchen des Erweiterungsfaktors n versucht werden. Wir können aber leicht von der Normalform die Gleichheit der Produkte der innern und äußern Glieder ableiten:

$$4 : 5 = 12 : 15 \qquad \text{oder} \qquad a : b = na : nb$$

$$4 : 5 = 3 . 4 : 3 . 5 \qquad\qquad bna = anb$$

$$5 . 3 . 4 = 4 . 3 . 5$$

In jeder Verhältnisgleichung ist das Produkt der innern gleich dem Produkt der äußern Glieder.

Aufgabe. 1) Zeichnet 4 proportionale Strecken (schätzungsweise), meßt sie und berechne aus der erhaltenen Zahlenproportion das Produkt der innern und das der äußern Glieder. Der Unterschied der Produkte ist das Maß für die Genauigkeit der Schätzung.

Aus dem vorigen Satze über die Gleichheit der Produkte ergibt sich das einfachste Verfahren zur Berechnung eines unbekannten Gliedes:

$$a : b = c : x$$

$$ax = b . c$$

$$x = \frac{b . c}{a}$$

Das Verhältnis zweier Größen wird oftmals nicht durch abstrakte Zahlen, sondern durch andere reale Größen ausgedrückt (z. B. Maßzahlen, Preise etc.). Wenn die Menge eines Verkaufsartikels zunimmt, so wächst im gleichen Verhältnis der Verkaufspreis. Ware und Verkaufspreis verändern sich, abgesehen von Preisreduktionen besonderer Art, proportional.

Wertpaare, die sich proportional verändern, sind:

Ware — Preis
Kapital — Zins
Zeit — Zins
Fläche — Flächenfüllung (z. B. Farbe)
Volumen — Fassung
Schattenlänge — Körperhöhe
Kartenstrecke — Distanz in der Natur
Masse eines Materials — Menge daraus hergestellter Dinge
Zeit — Weg (bei gleicher Geschwindigkeit)

Wenn Wertpaare so beschaffen sind, daß beim Wachsen des einen Wertes der andere in gleichem Maße abnimmt, dann stehen sie im *indirekten* oder *umgekehrten Verhältnis.*

Wertpaare, die im umgekehrten Verhältnis stehen, beziehen sich auf irgend eine gleichbleibende Gesamtmenge. Solche Wertpaare sind:

Arbeiterzahl	—	Zeit (bei gleicher Leistung)
Kapital	—	Zeit (bei gleichem Zins)
Zeit	—	Geschwindigkeit (bei gleicher Strecke)
Zuflußmenge	—	Füllungszeit (bei gleichem Volumen)
Radgröße	—	Umlaufzeit (bei gleichem Weg)
(Lichtstärke	—	Entfernung der Lichtquelle) (quadratisch)

Aufgaben. m) Berechnet die Höhe von Gegenständen (Telegraphenstangen, Bäume, Dachgiebel etc.) mit Hülfe der Schattenlänge.

Beispiel: Höhe eines Leitungsmastes?
Schatten eines Meterstabes = 83 cm
Schattenlänge des Mastes (auf der Ebene) = 9,95 m

$$0{,}83 : 9{,}95 = 1 : x$$
$$0{,}83\,x = 9{,}95$$
$$x = \frac{9{,}95}{0{,}83} = 12$$

Höhe des Mastes **12 m**

n) Berechnet Steigungen von Bahnstrecken unter Benützung von Karte und Fahrplan.

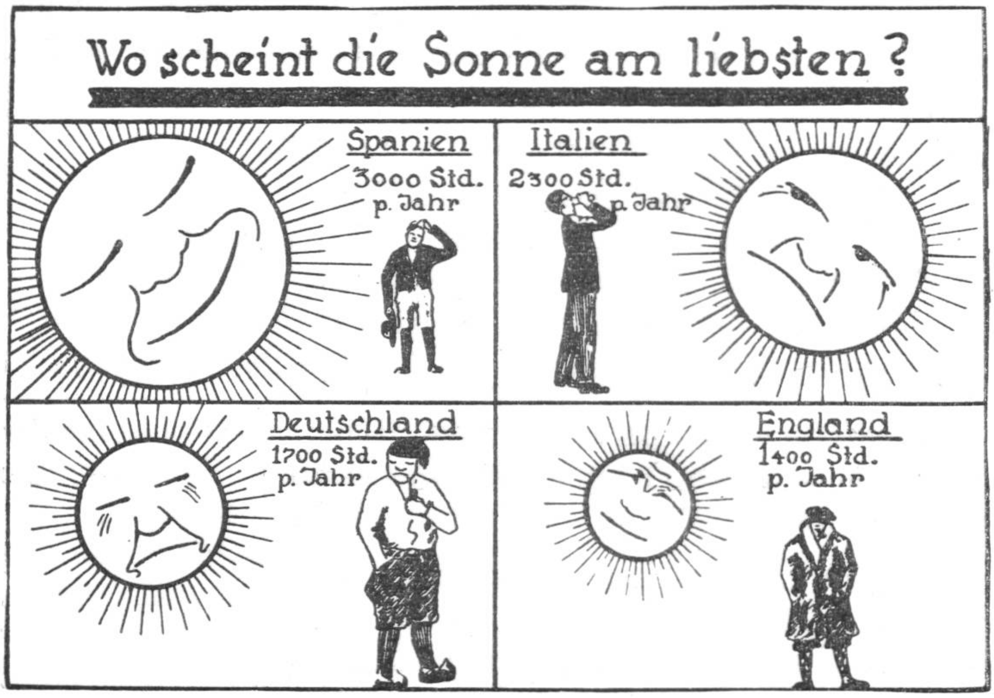
Beispiel: Durchschnittliche Steigung der Tößtalbahn von Sennhof bis Fischental.

Entfernung von Winterthur bis Fischental 39 km
" " " " Sennhof 9 "
Höhe von Fischental 751 m
" " Sennhof 487 m

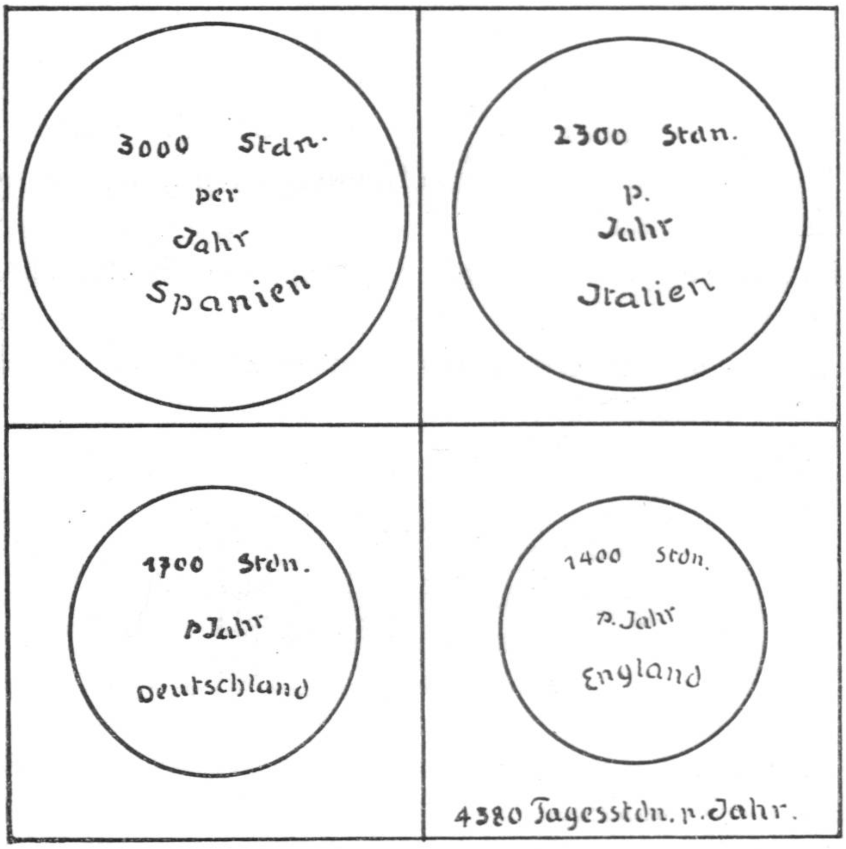
Lösung:
$$30\,000 : 1000 = 264 : x$$
$$30 : 1 = 264 : x$$
$$30\,x = 264$$
$$x = \frac{264}{30} = 8{,}8$$

Durchschnittliche Steigung der Tößtalbahn von Sennhof bis Fischental **8,8** $^0/_{00}$.

NB. Die Angabe der Tarifkilometer des Fahrplans erlaubt nur eine ganz ungefähre Rechnung; denn nimmt man obige Strecke nach dem Fahrplan in umgekehrter Fahrrichtung (Wald-Winterthur), so ist sie 27 km.


Wo scheint die Sonne am liebsten?
Spanien
3000 Std. p. Jahr
Italien
2300 Std. p. Jahr
Deutschland
1700 Std. p. Jahr
England
1400 Std. p. Jahr

a


3000 Stdn. per Jahr Spanien
2300 Stdn. p. Jahr Italien
1700 Stdn. p. Jahr Deutschland
1400 Stdn. p. Jahr England
4380 Tagesstdn. p. Jahr.

b

Fig. 9

o) Verteilung von Geschäftsgewinnen.

Beispiel: Gebrüder Müller betreiben zusammen mit einem Kapital von Fr. 50 000.— ein Papeteriegeschäft. Karl Müller hat Fr. 35 000.—, sein Bruder Robert Fr. 15 000.— Anteil am Geschäftskapital. Wie verteilen sie den Gewinn von Fr. 11 532.—?

$$35\cancel{000} : 50\cancel{000} = x \text{ Fr.} : 11\,532 \text{ Fr.}$$
$$50 \,.\, x \text{ Fr.} = 35 \,.\, 11\,532 \text{ Fr.}$$
$$x = \frac{35 \,.\, 11\,532}{50} = 8072.40$$

Der Gewinnanteil von Karl Müller beträgt **Fr. 8072.40**, derjenige von Robert Müller **Fr. 3459.60.**

p) Weist die Unrichtigkeit der in Fig. 9a gegebenen Veranschaulichung nach und korrigiert sie. (Die Aufgabe kann erst gelöst werden, wenn die Kreisberechnung und der Satz über das Flächenverhältnis ähnlicher Figuren den Schülern bekannt sind.)

Lösung: Anzahl der Tagesstunden im ganzen Jahr 4380			
	Veranschaulichungsfläche	43,80	cm^2
	Seite eines gl. gr. Quadrates	**6,62**	cm
Anzahl der Sonnenstunden in Spanien 3000			
	Veranschaulichungsfläche	30	cm^2
	Radius des gl. gr. Kreises	**3,1**	cm
Dieselbe Rechnung ergibt für	Italien	**2,8**	„
„ „ „ „	Deutschland	**2,3**	„
„ „ „ „	England	**2,1**	„
Korrigierte Veranschaulichung	Fig. 9 b.		

Aufgabe 9. Eine Frau verfertigt aus bastumwickelten Schnüren, die sie spiralförmig zusammennäht, kreisförmige Untersätzchen. Normalerweise haben die Tellerchen 13 cm Durchmesser. Bei dieser Größe ist zu rechnen für Schnur 20 Rp., für Bast 30 Rp., Arbeitslohn Fr. 3.—. Verkaufspreis?

Eine Dame hat ein Untersätzchen von doppeltem Durchmesser bestellt. Als sie hiefür eine Rechnung von Fr. 13.50 erhält, reklamiert sie in der Meinung, überfordert zu werden. Die Frau muß ihr vorrechnen, daß sich bei genauer Rechnung ein noch höherer Preis ergibt.

Lösung: Kreisflächen verhalten sich wie die Quadrate über den Durchmessern.

$$\begin{aligned} x\ \text{Fr.} : 3.50\ \text{Fr.} &= (2\,.\,13)^2 : 13^2 \\ &= \quad 4 : 1 \\ x &= \text{Fr. } 3.50\,.\,4 = \textbf{Fr. 14.—} \end{aligned}$$

Die Frau berechnet nach dieser Erfahrung Offerten für Tellerchen mit Durchmessern von

15 cm	20 cm	25 cm	30 cm
(4.66)	**(8.28)**	**(12.95)**	**(18.64)**

Auf besondere Bestellung hin stellt die Frau ein Untersätzchen her, das genau Fr. 10.— kostet. Durchmesser? **(22 cm)**

II. Was in der Familie des Sekundarschülers Karl Weber in Winterthur gerechnet wird.

Karl Weber besucht die 2. Klasse der Sekundarschule. Sein Vater, Robert Weber, ist Prokurist in einem Konfektionsgeschäft. Ein Bruder, Hans, ist Angestellter der Kantonalbank. Karl verkehrt viel bei seinem Onkel, Heinrich Weber, welcher als Monteur der Maschinenfabrik Gebrüder Sulzer große Reisen macht und seinem Neffen viel davon erzählt.

1. Aufgabe: Karl trifft seinen Onkel Heinrich an der Vorbereitung für eine Reise nach Paris, wo er zwei Wochen bleiben muß, um eine große Maschine zu montieren. Sie rechnen zusammen aus, wie viel die Reise voraussichtlich kosten wird.

Billett Paris retour, III. Klasse	Fr. 50.80
Verpflegung unterwegs ca.	„ 30.—
Pension in Paris für 12 Tage zu 90 f. Fr. = 1080 f. Fr.	„ 219.25
Besondere Ausgaben für Belehrung und Unterhaltung	„ 50.—
	Fr. 350.05

Onkel Heinrich kauft 1300 f. Fr. und zahlt dafür Fr. 263.90. Zu welchem Kurs wurde ihm gewechselt? (f. Fr. 20.30)

2. Aufgabe: Karl stellt, angeregt durch seinen Onkel, die Kosten zusammen für

a) einen achttägigen Aufenthalt in Amsterdam,
b) einen fünftägigen Aufenthalt in München,
c) einen solchen von 12 Tagen in Wien.

a)	Pension in Amsterdam für 9 Tage zu 12 h. fl.	h. fl. 108.—
	Für Fahrten, Eintritte usw.	„ „ 35.—
		h. fl. 143.—
	Man kauft 150 h. fl. zu 208.20	Fr. 312.—
	Billett III. Klasse durch das Reisebureau .	„ 104.—
	Verpflegung unterwegs ca.	„ 30.—
		Fr. 446.30
b)	Übernachten und Frühstück für 5 Tage in München zu M. 7.50	M. 37.50
	Mittag- und Nachtessen zu M. 3.50 . . .	„ 35.—
	Verschiedenes (Museen usw.)	„ 20.—
	Verpflegung unterwegs	„ 20.—
		M. 112.50

Man kauft M. 120.— zu 123.35	Fr. 148.—
Fahrkarte (Romanshorn-Lindau)	„ 43.60
	Fr. 191.60

c) In Wien: tägliche Ausgaben ca. Sch. 20

Für 12 Tage	Sch. 240.—
Verschiedenes	„ 20.—
	Sch. 260.—
Man kauft 280 Sch. für	Fr. 204.40
Verpflegung auf der Reise	„ 30.—
Fahrkarte	„ 89.70
	Fr. 324.10

d) Reise nach London?

Hans erklärt seinem Bruder Karl die Bedeutung und den Sinn der Handelsnachrichten in der Zeitung.

*Handels-Nachrichten.

Devisenkurse.
Nominelle Notiz vom 16. März 1929.

		Käufer	Verkäufer
Check:	London	$25.22^3/_4$	$25.23^1/_4$
	Frankreich	20.30	20.32
	Italien	27.21	$27.23^1/_2$
	Belgien	72.15	$72.22^1/_2$
	New-York Kabel	$5.19^7/_8$	$5.20^1/_8$
	New-York Check	$5.18^7/_8$	$5.19^3/_8$
	Deutschland	$123.32^1/_2$	123.40
	Budapest	90.55	90.70
	Österreich	73.—	73.10
	Prag	15.38	15.41
	Holland	208.20	$208.27^1/_2$
	Kopenhagen	138.55	138.65
	Oslo	138.60	138.70
	Stockholm	138.85	138.95
	Warschau	58.15	58.35
	Spanien	79.50	80.25
	Bukarest	3.05	$3.12^1/_2$

Privat-Diskonto $3^1/_2$ %.

* Ausschnitt aus dem „Landboten".

Kosten des Lebensunterhaltes

in verschiedenen europäischen Städten (Hotel II. Ranges und Pensionen).

	Zimmer und Frühstück	Pension von 5 Tagen an
Amsterdam	h. fl. 9.—	h. fl. 12.—
Berlin	Mk. 10.—	Mk. 15.—
Frankfurt a. M.	„ 8.—	„ 15.—
Genua	Lire 35.—	Lire 80.—
Köln	Mk. 8.—	Mk. 14.—
London	s. 10/—	£ 1/—/—
Marseille	f. Fr. 40.—	f. Fr. 80.—
Milano	Lire 40.—	Lire 80.—
München	Mk. 7.50	Mk. 12.—
Nizza	f. Fr. 40.—	f. Fr. 80.—
Paris	„ 50.—	„ 90.—
Rom	Lire 30.—	Lire 60.—
Straßburg	f. Fr. 35.—	f. Fr. 70.—
Venedig	Lire 30.—	Lire 65.—
Wien	Sch. 10.—	Sch. 20.—

Dazu je 10—15 % Bedienung und 5—10 % Aufenthaltstaxe. NB. Nach Angaben eines Reisebureaus.

Fahrpreise

einschliesslich Schnellzugszuschlag.

nach	via		von Winterthur II.	von Winterthur III.	von Zürich II.	von Zürich III.
Amsterdam	Basel-Baden	E	74.60	50.40	71.30	48.10
		R			115.65	77.25
Berlin	Schaffhausen	E	89.05	60.40	89.85	60.—
		R	176.—	117.50	177.50	118.60
Frankfurt a. M.	Schaffhausen	E	43.15	28.40	46.10	30.50
		R	88.50	58.50	90.—	59.60
Genua	Chiasso	E	48.85	32.50	47.80	31.70
		R	—	—	85.30	55.90
Köln	Basel	E	70.10	46.35	66.80	44.05
London	Ostende	E	—	—	91.50	64.30
Marseille	Genève	E	61.85	42.—	60.25	40.85
		R	100.—	67.95	97.55	66.15
Milano	Chiasso	E	33.80	23.50	32.75	22.70
		R	55.10	38.40	53.70	37.15
München	R'horn-Lindau	E	34.80	23.05	37.55	25.—
		R	65.70	43.60	70.60	47.—

Nice	Milano	E	63.85	41.70	62.75	40.90
Paris	Basel	E	46.95	36.15	43.65	31.40
		R	75.95	50.80	70.40	46.90
Rom	Chiasso	E	82.45	52.35	81.40	51.55
Straßburg	Basel	E	23.10	15.85	19.80	13.55
		R	37.80	25.90	32.25	22.—
Stuttgart	Schaffhausen	E	25.65	16.65	28.60	18.75
		R	50.05	32.40	55.—	36.10
Venezia	Chiasso	E	57.80	37.80	56.75	37.—
Wien	Insbruck od. München	E	76.55	44.85	76.55	44.85

E = einfache Fahrt. R = hin und zurück.

Angaben nach dem Kursbuch *Bürkli* 1928/29.

3. Aufgabe: Onkel Heinrich bringt von Paris noch 45 f. Fr. zurück, die er durch Hans bei der Bank umwechseln läßt. Karl rechnet nach dem Kursbericht der Zeitung, wieviel dafür etwa bezahlt werden.

f. Fr. 100.— = s. Fr. 20.30
„ 1.— = „ 0.203
„ 45.— = „ 9.15

a) Rückwechslung des Restbetrages von einer Reise nach Holland von h. fl. 17.— (s. Fr. 35.40)

b) Ebenso: M. 13.50 (Fr. 16.65)

c) Ebenso nach einer Wienerreise: Sch. 22.— (Fr. 16.05)

d) Ebenso: £ 2/16/— (Fr. 70.60)

Im Anschluß an diese Aufgaben können beliebig Übungsaufgaben für Umrechnungen eingeschoben werden. Im Zusammenhang damit ergibt sich ein sehr geeigneter Stoff fürs Kopfrechnen. Dabei sind die Verhältnisse des Schweizergeldes zum fremden Geld zweckmäßig zu vereinfachen, z. B.:

Kurs:			Verhältnis ca.
£	1 =	Fr. 25.22 3/4	1 : 25 = 4 : 100
f. Fr.	100 =	„ 20.30	100 : 20 = 5 : 1
Lire	100 =	„ 27.21	100 : 25 = 4 : 1 (+ 1/10)
$	1 =	„ 5.19 7/8	1 : 5 (+ 1/25)
M.	100 =	„ 123.32 1/2	100 : 125 = 4 : 5
Sch.	100 =	„ 73	100 : 75 = 4 : 3
h. fl.	100 =	„ 208.20	100 : 200 = 1 : 2 (+ 1/20)

Die ungefähre Umrechnung auf Grund der vereinfachten Verhältnisse genügt in vielen Fällen, z. B. wenn man wissen will, wieviel Geld man für eine Reise einwechseln muß. Durch zweckmäßiges Auf- oder Abrunden kann das Ergebnis auf eine hinlängliche Genauigkeit gebracht werden.

Beispiele:

a) f. Fr. 134 = ? Fr. (Genaues Ergebnis nach Kurs 20.30
$^1/_5$ von 134 $\sim$ Fr. 27 = Fr. 27.20)

b) Lire 365 = ? Fr.
$^1/_4$ von 365 = 91 (Genaues Ergebnis nach Kurs 27.21
$+\ ^1/_{10}$ = 9 = Fr. 99.35)
Fr. 100

c) M. 187 = ? Fr. (Nach Kurs 123.32 = Fr. 230.60;
$^5/_4$ von 187 = Fr. 233 (abrunden!) nach Kurs 124.—
= Fr. 231.88)

d) \$ 47 = ? Fr. (Nach Kurs $5{,}19^7/_8$ = Fr. 244.30)
5×47 = Fr. 235.—
$+\dfrac{235}{25}$ = „ 9.— (abgerundet!)
Fr. 244.—

4. Aufgabe: Die Familie Weber erbt von dem verstorbenen Großvater Fr. 12594.50, die bar ausbezahlt werden. Fr. 12500.— sollen zinstragend und sicher angelegt werden. Hans wird zu Rate gezogen, Karl darf die Rechnungen machen.

Man erwägt folgende Möglichkeiten:

a) Die ganze Summe wird in Sparkassen gelegt. Der übliche Zinsfuß ist 4 % oder $4^1/_4$ %.
Zins zu 4 % = Fr. 500.—; Zins zu $4^1/_4$ % = Fr. 531.25.

b) Es werden Bankobligationen auf 5 Jahre fest gekauft (Volksbank 5 %). Zins = Fr. 625.—.

c) Aktien der Maschinenfabrik Gebrüder Sulzer. (Karl rechnet die Aktie zum Nominalwert von Fr. 500.— und einer Dividende von 8 %.)
Dividende für 12 Aktien zu Fr. 1000.— = Fr. 960.—.

Hans erklärt Karl, daß man keine Aktien, die 8 % abtragen, zum Nominalwert kaufen kann. Er zeigt ihm an Hand eines Berichtes der Effekten-Börse, zu welchem Kurs diese Aktien an der Börse gekauft werden.

d) Wie viele Sulzer-Aktien hätten aus dem Betrag der Erbschaft am 21. März 1929 an der Börse gekauft werden können? (Ohne Spesen.) Welches wäre der Zinsertrag für 1929, wenn mit einer Dividende von 8% gerechnet wird?

9 Stück (Rest Fr. 1115.—) Zins Fr. 720.—.

e) Es wird endlich auf den Rat von Hans beschlossen, das Kapital von Fr. 12500.— in folgender Weise anzulegen:

1. 5 Aktien Gebr. Sulzer A.G.
2. 8 Obligationen der Kantonalbank zu 500 mit 5%-Coupons.
3. Restbetrag in Sparkassen.

			Zins
5 Aktien zu Fr. 1265.— (Dividende 8%)	=	Fr. 6325.—	Fr. 400.—
8 Obligationen zu Fr. 500.— (zu 5%)	=	„ 4000.—	„ 200.—
Rest in Sparkassen (4%)	=	„ 2175.—	„ 87.—
	Total	Fr. 12500.—	Fr. 687.—

*Zürcher Effekten-Börse.

Bezahlte Kurse vom 21. März 1929.

Obligationen:

6 Proz. S.B.B. (1. Elektr.) 1921 102.80 c.
$4^1/_2$ Proz. S.B.B. (2. Elektr.) 1922 99.15 c.
4 Proz. S.B.B. (3. Elektr.) 1923 94.20 c.
5 Proz. S.B.B. (4. Elektr.) 1924 102.60 c.
5 Proz. S.B.B. (5. Elektr.) 1925 102.60 c.
5 Proz. S.B.B. (6. Elektr.) 1925 (Anl. in Holland) 102.60 c.
$4^1/_2$ Proz. S.B.B. 1927 98.60 c.
$4^1/_2$ Proz. S.B.B. 1928 98.60 c.
4 Proz. Eidg. Staatsanl. 1922 97.65 c.
$4^1/_2$ Proz. Eidg. Staatsanl. 1926 98.60 c.
$4^1/_2$ Proz. Eidg. Staatsanl. 1927 98.90 c.
$4^1/_2$ Proz. III. Eidg. Mobil.-Anleihe v. 1915 98.25 c.
5 Proz. VIII. Eidg. Mobil.-Anleihe v. 1917 101.70 c.
$4^1/_4$ Proz. Kt. Bern 1914 93 c.
5 Proz. Kt. Bern 1919 101 c.
$5^1/_2$ Proz. Kt. Genf 1925 101.50 c.
$4^3/_4$ Proz. Kt. Zürich 1917 100.25 c.
$4^1/_2$ Proz. Kt. Zürich 1923 98.50 c.
5 Proz. Stadt Zürich 1925 102.10 c.

* Ausschnitt aus dem „Landboten“.

$4^3/_4$ Proz. Stadt Zürich 1927 99.75 c.
$4^3/_4$ Proz. Stadt Zürich 1928 100 c.

Aktien:

Elektrobank A 1322 c.
Basler Handelsbank 744 c.
Eidg. Bank A.-G. 763 c.
Schweiz. Bankgesellschaft 709 c.
Schweiz. Bankverein 815 c.
Schweiz. Gesellschaft für Metallwerte, Basel 795 c.
Aluminium-Industrie, Neuhausen 3840 c.
Brown, Boveri, Baden 570 c.
Choc. Tobler Holding Co., Prior. 160 c.
Kraftwerk Laufenburg, Prior. 1070 c.
Lonza 415 c.
Maschinenfabrik Oerlikon 850 c.
Nestlé & Anglo-Swiss 858 c.
Sulzer-Unternehmungen, A.-G. 1265 c.

5. *Aufgabe:* Karl stellt mit Hilfe des Kursberichtes Rechnungen an über die effektive Verzinsung von Obligationen und Aktien und an Hand von Kursberichten verschiedener Zeiten über Kapitalgewinne und Verluste bei Anlagen in Aktien und Obligationen.

Beispiel: Sulzer-Aktie an der Börse am 21. März 1929 gekauft. Erhoffte Dividende 8 %.

Fr. 1265.— bringen Fr. 80.—
„ 100.— „ „ 6.32

Wirkliche Dividende 7 %.

Fr. 1265.— bringen Fr. 70.—
„ 100.— „ „ 5.53

Erhoffte Verzinsung 6,32 %, wirkliche Verzinsung 5,53 %.

6. *Aufgabe:* Hans zeigt Karl, wie er seine Sparkassarechnung selber ordentlich führen kann. Karls erste Einlage in die Sparkasse der Kantonalbank beträgt am 31. März 1929 Fr. 50.—. Er macht im Laufe des Jahres folgende Einlagen: nach dem Examen am 8. April Fr. 10.—, am 10. Juli Fr. 15.—, am 2. Oktober Fr. 20.—. Welches ist sein Guthaben am Ende des Jahres? (Verzinsung 4 %.)

Ausführung:

1929			Kapital		Tage	Zins	
			Fr.	Rp.		Fr.	Rp.
März	31.	Einlage	50	—	270	1	50
April	8.	„	10	—	262	—	25
			60	—		1	75
Juli	10.	„	15	—	170	—	25
			75	—		2	—
Okt.	2.	„	20	—	88	—	15
			95	—		2	15
Dez.	31.	Zins zu 4 %	2	15			
1930		Guthaben auf 31. Dez.	97	15			

Die Bankangestellten lesen die Zinsen aus Tabellen ab und runden auf ganze Fünfer (zu Gunsten der Bank). Wer keine Tabellen hat, berechnet Zinsen auf eine Anzahl von Tagen am bequemsten mit der Formel $z = \frac{k \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}$. Hans entwickelt die Formel zunächst an Zahlenbeispielen. (Was bedeuten die Teilformeln: $\frac{k}{100}$; $\frac{k \cdot p}{100}$; $\frac{k \cdot p}{100 \cdot 360}$?)

1929			Kapital		Tage	Zins	
			Fr.	Rp.		Fr.	Rp.
Jan.	1.	Guthaben auf 31. Dez. 1928	265	30	360	10	60
März	20.	Einlage	21	80		—	65
			287	10		11	25
Juni	25.	„	37	25	185	—	75
			324	35		12	—
Okt.	5.	„	28	60	85	—	25
			352	95		12	25
Dez.	3.	„	43	50	27	—	15
			396	45		12	40
„	15.	Rückzug	100	—	15	—	15
			296	45		12	25
„	31.	Zins zu 4 %	12	25			
		Guthaben auf 31. Dez.	308	70			

7. Aufgabe: Karl führt die Rechnung für das Sparbüchlein seiner Mutter. Sie legt ihre Ersparnisse in eine Sparbüchse, die sie etwa alle Vierteljahre einmal auf die Bank bringt zur Leerung und Eintragung ins Sparbüchlein. Das Guthaben ist auf 31. Dezember 1928 Fr. 265.30, die Einlagen aus der Sparbüchse betragen am 20. März Fr. 21.80, am 25. Juni Fr. 37.25, am 5. Oktober Fr. 28.60, am 3. Dezember Fr. 43.50. Am 15. Dezember zieht Frau Weber zum Einkauf von Weihnachtsgeschenken Fr. 100.— zurück.

8. Aufgabe: Der Vater sagt Karl, daß sein Geschäft, um Bezahlungen bequem machen und Wechsel einlösen zu können, mit der Volksbank im Kontokorrent-Verkehr stehe. (Auf einem Kassabüchlein kann man auch Geld zurückziehen, aber auf einmal nur bis zu einem bestimmten Betrag; es ist nicht für einen lebhaften wechselseitigen Geldverkehr gedacht, sondern zur Anlage kleiner Ersparnisse.) Das Kontokorrent wird anders geführt als das Kassabüchlein. Hans erklärt Karl die Verwendung der Zinsrechnung nach der Formel $z = \frac{n}{d}$

$$z = \frac{k \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360} = \frac{k \cdot t}{100} \cdot \frac{p}{360}$$

k und t sind die veränderlichen Faktoren, p ist so lange konstant, als sich der Zinsfuß nicht ändert. Bringt man den Bruch $\frac{p}{360}$ auf die Form $\frac{1}{\dots\dots}$, so erhält man als Nenner den sogenannten Zinsdivisor (bei 4 % z. B. $\frac{4}{360} = \frac{1}{90}$, Zinsdivisor $= 90$). Da es beim Kontokorrent nicht darauf ankommt, daß man von jedem Posten gleich den Zins kennt, braucht man nur die sogenannten Zinsnummern $\left(\frac{k \cdot t}{100}\right)$ auszurechnen. Beim Rechnungsabschluß kann man die Summe der Zinsnummern durch den Zinsdivisor teilen und erhält so den Gesamtzins.

Beispiel:

Einlagen in einem Kontokorrent.

Datum	Tage bis 31. Dez.	K	n
10. Juli	170	Fr. 300.—	510
15. Sept.	105	„ 500.—	525
20. Okt.	70	„ 150.—	105
8. Nov.	52	„ 450.—	234
		Fr. 1400.—	1374

Zins aus 1374 Nummern		
zu $4^{1}/_{2}\,\%_0 = \frac{1374}{80} =$	„	17.15
Guthaben auf 31. Dez.	Fr.	1417.15

Karl macht weitere Übungen im Berechnen von Zinssummen mit Hilfe der Formel $z = \frac{n}{d}$.

Er stößt auf die Frage der Verwendung dieser Formel für Zinsen zu $3^{1}/_{2}\,\%_0$, $4^{1}/_{4}\,\%_0$ usw., ferner auf den Zinsnummern-Ausgleich und auf die Usancen bei Berechnung der Tage.

III. Schwierigkeiten des genauen Rechnens.

Aufgabe: Berechnet die Länge von Kreislinien nach Wandtafelzeichnungen.

Beispiel: Gemessener Radius 42,3 cm.

(Genauer als auf mm kann der Radius an der Wandtafel nicht gemessen werden, also sind die Zehntel bei der Angabe in cm schon mit Fehlern behaftet.)

$$
\begin{array}{rlcl}
2\,\mathrm{r} & = 84{,}6 \text{ cm} & & \\
2\,\mathrm{r}\,\pi & = 84{,}6 \,.\, 3{,}14159 & = & 265{,}778514 \text{ cm} \\
\text{oder} & \ 84{,}6 \,.\, 3{,}14 & = & 265{,}644 \text{ cm} \\
\text{„} & \ 84{,}6 \,.\, {}^{22}/_{7} & = & 265{,}9 \text{ cm}
\end{array}
$$

```
 84,6 . 3,14159          84,6 . 3,14
---------------         -------------
253,8                   253,8
  8,46                    8,46
  3,384                   3,384
    846                 ---------
    4230                265,644
     7614               =========
-----------
265,778514      (Was bedeutet die letzte Ziffer?)
===========

 84,6 . 22           oder   84,6 . 3
-----------                ----------
1692                        253,8
 169,2                    +  12,1    (1/7 von 84,6)
-----------                ---------
1861,2 : 7 = 265,9          265,9
46           =====          =====
 41
  6,2
```

Scheinbar ist das erste Ergebnis sehr genau, die andern beiden sind ungenau; sie stimmen schon in den Zehnteln nicht mehr. Die Ungenauigkeit ist die Folge der Rechnung. Nun ist aber auch das erste Ergebnis in der ersten Stelle nach dem Komma ungenau. Diese Ungenauigkeit stammt aus zwei Fehlerquellen: 1. sind die Kreidestriche auch in einer scharfen Zeichnung so breit, daß die Messung auf ganze mm die äußerste Genauigkeit bedeutet; 2. wird nur ein Maßstab verwendet werden, in dem ganze cm, höchstens ganze mm eingezeichnet sind. Die Zehntel der in cm angegebenen Maßzahl sind also abgeschätzt und darum stark mit Fehlern behaftet.

Nehmen wir z. B. an, der Fehler betrage $^1/_2$ mm, so wird er durch die Multiplikation mit 2 und nachher mit π schon 3 mm, so daß die Stelle der Zehntel im Ergebnis sehr ungenau ist. Aus diesem Grunde begnügt man sich im allgemeinen mit einem $\pi = 3{,}14$ oder $3^1/_7$. In diesem Fall tritt zu dem unvermeidlichen Messungs- oder Schätzungsfehler noch ein solcher aus der Rechnung, der den ursprünglichen Fehler möglicherweise verringert, vielleicht aber auch vergrößert. Um letzteres zu vermeiden, verwenden wir die *abgekürzte Multiplikation*, als *das Verfahren der größtmöglichen wahrscheinlichen Genauigkeit.*

84,6 . 3,14159
253,8
8,5
3,4
1
265,8

Der Vergleich mit den vorigen Rechnungen zeigt, daß diese Multiplikation so genau ist wie die erste und so kurz wie die zweite.

Aufgabe: Wie groß ist die Fläche der an der Wandtafel gezeichneten Kreise?

Beispiel: $r = 42{,}3$ cm
$r^2 = 42{,}3 \,.\, 42{,}3$

Der in den Zehnteln enthaltene Fehler wird hier mindestens 80mal vergrößert ($40 \,.\, 0{,}3 + 0{,}3 \,.\, 40$). Nehmen wir wieder an, er sei $^1/_2$ mm, so ist er im Quadrat ungefähr $0{,}05 \,.\, 80 = 4$; d. h. die Ganzen sind unverläßlich. Nachher folgt noch die Multiplikation mit π, die den Fehler wiederum dreimal größer macht, so daß er im ungünstigsten Fall mehr als einen Zehner betragen kann (12 bis 13). Diesem Umstand kann durch die abgekürzte Multiplikation wiederum Rechnung getragen werden. Es ist zweckmäßig, die beiden Faktoren zuerst so zu verändern, daß der Multiplikator 10mal kleiner, der Multiplikant 10mal größer gemacht werden. Dabei bleibt der Wert des Produktes unverändert, aber die abgekürzte Multiplikation kann in gleicher Art durchgeführt werden wie im vorigen Beispiel:

423 . 4,23	1790 . 3,14159	
1692	5370	
85	179	
13	72	
1790 (cm²)	2	
	—	(Weil schon zweimal aufgerundet,
F = 5623 cm²	5623	wurde hier abgerundet.)

Suchen wir die Größe des Fehlers geometrisch zu bestimmen, so kommen wir auf folgende Überlegung: Ist der Radius um 1 mm ungenau, so kann der Fehler bei der Fläche als Kreisring vorgestellt werden, der einen Umfang von ca. 2658 mm und eine Breite von 1 mm hat. Er ist etwas größer als ein Rechteck von gleicher Länge und Breite, also ungefähr 27 cm². Bei Annahme eines Fehlers von ½ mm in der Maßzahl des Radius ist er noch etwa 13½ cm². Wir sehen, daß diese Überlegung mit derjenigen des abgekürzten Rechnungsverfahrens in vollem Einklang steht. Um vor Fehlern sicher zu sein, die sich aus mehrmaligem Abrunden oder Aufrunden ergeben, berücksichtigt man bei der abgekürzten Multiplikation gewöhnlich eine Stelle mehr, als unbedingt notwendig wäre. In diesem Fall sieht die vorige Rechnung folgendermaßen aus:

$$
\begin{array}{r}
42\cancel{3} \,.\, 4{,}23 \\ \hline
1692 \\
84{,}6 \\
12{,}7 \\ \hline
1789{,}3
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
\cancel{1}\cancel{7}\cancel{8}\cancel{9}{,}\cancel{3} \,.\, 3{,}14159 \\ \hline
5367{,}9 \\
178{,}9 \\
71{,}6 \\
1{,}8 \\
9 \\
1 \\ \hline
5621{,}2
\end{array}
$$

Bei dieser Multiplikation konnte das π bis auf die fünfte Stelle nach dem Komma verwendet werden; in andern Fällen ergibt sich im Laufe der Rechnung von selbst die Zahl der notwendigen Stellen.

Aufgabe: Sucht weitere Gelegenheit zur Anwendung der abgekürzten Multiplikation.