Zeitschrift: Jahrbuch der Sekundarlehrerkonferenz des Kantons Zürich

Herausgeber: Sekundarlehrerkonferenz des Kantons Zürich

Band: - (1927)

Artikel: Neue Wege zu einer fruchtbaren Geometrie aus dem Leben und für das Leben

Autor: Bruggmann

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-819664

Neue Wege zu einer fruchtbaren Geometrie aus dem Leben und für das Leben.

Von *Dr. Bruggmann,* Aadorf.

Mein Begleitwort ist nicht in erster Linie an die engeren Fachgenossen, die ja ohnehin meine Vorschläge unter die Lupe nehmen werden, gerichtet; es soll auch bei den *Freihandzeichnern, Geographen, Historikern* und *Physikern* unserer Schulstufe um einige Beachtung und kritische Durchsicht werben. Werte Kollegen! Sie sind wohl mit mir der Ansicht, daß eine Einkapselung in ein Spezialfach für unsere Stufe am allerwenigsten taugt. Zu Ihren Fächern habe ich von der Geometrie aus Brücken zu schlagen versucht; vielleicht erscheint Ihnen manches in Ihren Domänen in neuem Licht, wenn Sie, wie ich hoffe, in meiner Arbeit da und dort etwas Brauchbares finden.

Die sprachkundlichen und kulturgeschichtlichen Bemerkungen sollen selbstverständlich den Schülern nicht einfach dargeboten, sondern soweit möglich, mit ihnen erarbeitet werden. Die Schüler sind, wie ich aus eigener Erfahrung weiß, mit Lust und Liebe dabei, und haben mir manch schönes Beispiel selbst geliefert.

Meine Fachgenossen bitte ich, die Arbeit als einen bescheidenen Versuch bewerten zu wollen, die Geometrie aus ihrer überlieferten, versteinerten und lebensfremden Form zu lösen. Ich spreche hier natürlich von der Sekundarschule.

Es hat mich auch die Ueberzeugung geleitet, daß unsere Schulgeometrie viel abstrakten Kram enthält, der nur in seltenen

Fällen geistiger Besitz unserer Jungen werden kann. Es schwankt der Grund, auf dem wir bauen.

Natürlich konnte und sollte kein systematischer vollständiger Lehrgang der Planimetrie in den Rahmen eines Jahrheftes gepreßt werden.

Ich beschränke mich auf einige charakteristische Themata und wählte die grundlegenden Abschnitte:

I. Was will die Geometrie?
II. Fundamentale räumliche Betrachtungen: Wagrechte, senkrechte, schiefe Richtung. Himmelsrichtungen.
III. Linien.
IV. Einige praktische Winke.
V. Winkel.
VI. Abstand eines Punktes von einer Geraden.
VII. Symmetrie und ihre Anwendungen.
VIII. Sind wir mit dem Konstruieren auf dem rechten Wege?

Ein Schlußkapitel über die Beweisführung ist vorläufig im Papierkorb verschwunden, worüber niemand untröstlich sein wird. Weitgehende Rücksicht nahm ich auf die Lehrer an ungeteilten Schulen. Es finden sich viele Aufgaben und Übungen (namentlich bei Linien, Winkeln, Symmetrie) welche gemeinsam in Klasse I, II, III behandelt werden können; die schwierigeren eher für II. oder III. passenden sind mit einem Stern *) bezeichnet. Manche eignen sich auch als Repetitionsübungen für die obern Klassen. Selbstverständlich muß schon aus Zeitmangel eine Auswahl getroffen werden.

Für die sprachkundlichen und kulturgeschichtlichen Ergänzungen habe ich — dies sei eingefleischten Geometern und Naturwissenschaftlern zur Ermunterung gesagt — nie ein etymologisches Wörterbuch oder Idiotikon konsultiert; es sollte kein gelehrter Ballast eingeschmuggelt werden.

Um einen langweiligen Rezeptstil zu vermeiden, habe ich mich nicht nur an den Lehrer, sondern, wie es eben knappe Form und Gegenstand gerade verlangten, in zwangloser Weise abwechselnd an Lehrer und Schüler gewendet.

Dem opferwilligen Helfer, Herr List in Birwinken, sei an dieser Stelle für die Vervielfältigung der Figuren herzlich gedankt.

I.
Was will die Geometrie?

Kleiner Geometer! Du hast gewiß schon während eines Schulausfluges oder einer Ferienwanderung auf den Gipfeln des Hörnli, Nollen und Schauenberg, die weißen Dächlein (Pyramiden) bemerkt; weit leuchten sie ja ins Land hinaus. Du weißt vielleicht schon, daß sie die Ecken des Dreiecks Hörnli-Nollen-Schauenberg darstellen. Ein großes Netz solcher Dreiecke erstreckt sich über den Thurgau und die Schweiz. Auf ihm beruht die Vermessung unseres Landes, aus welcher die Landkarte entstanden ist.

Landesvermessung ist die wörtliche Übersetzung des Ausdruckes Geometrie (ge = Land, metron = Maß).

Aus einer genaueren Karte entnimmst du auf einer Velotour oder Bergbesteigung den *Höhenunterschied*, die *Entfernung* zweier Orte, die einzuschlagende *Richtung*, oder du kannst in unbewohnter Gegend deinen Standpunkt feststellen, dich orientieren.

Abstände, Richtungen und *Höhenunterschiede* messen und prüfen aber auch der Straßen- u. Brückenbauer (Ingenieur) Zimmermann, Maurer, Mechaniker, Spengler etc. Oft entnehmen sie die Maße einer vor der Ausführung entworfenen Zeichnung. Nenne solche Berufe! Mit mehr oder weniger einfachen Werkzeugen überzeugen sie sich auch, ob ihr Werk die gewünschte Lage oder Stellung im Raum einnimmt. Gib selber hiefür Beispiele!

Wer braucht eine Schublehre, eine Meßzange? Welche Werkzeuge benützt der Maurer? An welchen Instrumenten hast du schon den Grundbuchgeometer mit seinem Gehülfen hantieren sehen?

Geometrie bedeutet dementsprechend heute — abweichend vom ursprünglichen Sinn des Wortes — *Raumkunde* oder *Raumlehre*. Sie gliedert sich in zwei nicht scharf getrennte Gebiete: Die *Planimetrie* untersucht die ebenen Ge-bilde (la plaine = die Ebene, planus = eben). Die *Stereometrie* betrachtet die Körper, d. h. genau begrenzte Teile des Raumes (Was ist ein Ster?). Aufgabe der Raumkunde ist es, zum Verständnis der räumlichen Verhältnisse zu führen. Erst die Einsicht in die Gesetze und Zusammenhänge, welche unter den geometrischen Gebilden bestehen, ermöglicht es uns, die geometrischen Formen anzuwenden, d. h. sie den praktischen und wissenschaftlichen Zwecken dienstbar zu machen.

Übungen.

Material: 2 Holzwinkel, 1 weicher Bleistift, ein Maßstab, ein Zirkel mit Bleistifteinsatz. Später Redisfeder. Entbehrlich sind Reißfeder und Stechzirkel.

Längenmessung:

1. Das *Heft*. Miß seine Länge und Breite und zeichne es 10 mal, 4 mal kleiner aufs Blatt.
2. *Wandtafel*. Miß ihre Länge und Höhe und zeichne sie in passender Verkleinerung ins Heft.
3. *Schulzimmer*. Fertige einen einfachen Plan in passendem Verkleinerungsverhältnis, etwa 1 : 100.
4. Vergleiche die heute gebräuchlichen Längenmaße mit den früher üblichen Zoll, Schuh, Elle, Rute, Meile.

Karte und Globus.

5. Ermittle aus der Karte die Luftlinie (gerade Strecke ohne Straßenbiegung) zwischen Frauenfeld u. deinem Wohnort.
6. Ermittle die Längen der Seiten anderer Dreiecke unserer Landesaufnahme, z.B. Hörnli-Lägern-Hohentwil oder Hörnli-Nollen-Gäbris in km.
7. Der Kilometer ist $\frac{1}{10000}$ des vierten Teiles eines Meridians. Zeige letztern am Globus und erkläre diesen einfachen Zusammenhang.

*) 8. Miß mit einer Schnur diesen vierten Teil (Quadranten) und berechne, wieviel mal kleiner der Globusumfang als der wirkliche Erdumfang ist, d. h. in welchem Maßstab der Globus ausgeführt wurde.

*) Besondere Aufgabe.

II.
Grundlegende räumliche Beobachtungen und ihre Verwendung.

Wagrechte Richtung.

Glasgefäß, z. B. Wanne, Trinkglas, U-röhre, Reagenzröhrchen, gefärbtes Wasser.

Zeigt wagrechte Linien im Schulzimmer! Woher kommt die Bezeichnung wagrecht? Stützt ein Lineal in der Mitte mit dem Finger. Welche Lage nimmt es ein? Ist diese Stellung ein zuverlässiger Richtungsweiser?

Durch eine straff gespannte Schnur wird nun der Rand der Wasserfläche den Schülern sichtbar gemacht. Das Gefäß wird geneigt und eine zweite Schnur der Niveaulinie entlang gespannt. Dasselbe geschieht bei der U-röhre. Man vergleicht die Richtungen der drei Schnüre und findet: Die Oberfläche des ruhenden Wassers ist immer wagrecht. Aus dem selbstgebogenen U-rohr verfertigt man leicht eine einfache Kanalwage.

Ein nicht ganz mit Wasser gefülltes Reagenzröhrchen wird, mit dem Daumen verschlossen, wagrecht gehalten und veranschaulicht infolge des Wanderns der Luftblase die Libelle.

Entleiht Euch Wasserwage und Setzwage von den betr. Handwerkern und prüft mit ihnen die Richtungen im Schulzimmer (Fußboden, Gesimse etc.).

Für wagrecht ist auch die Bezeichnung *horizontal* gebräuchlich.

Senkrechte, auch *lotrechte* oder *vertikale* Richtung genannt. Vergleicht die Richtung mehrerer Lote miteinander, die nach anfänglichem Schwanken (Pendeln) zur Ruhe gekommen sind. Kontrolliert mit dem Senkblei die Richtung von Wänden, Pfosten, Kanten!

Warum sind Wagrechte und Senkrechte so häufig anzutreffen? (Wirkung der geheimnisvollen Kraft, welche alles zur Erde zieht.)

Schiefe Richtung. Was weder wag- noch senkrecht ist, nennen wir schief oder schräg, wie Bahnhoframpe, Dächer, Einfahrt zum Heuschober.

Die Abweichung der schiefen von der wagrechten Richtung heißt ihre Neigung, die der senkrechten von der wagrechten wird als rechter Winkel bezeichnet.

Warum werden die erwähnten Ebenen schräg erstellt? Wo entstehen noch heute annähernd wagrechte Landflächen? Nennt Beispiele ungefähr senkrechter Abhänge aus der Umgebung. Wie denkt ihr Euch deren Entstehung?

Worterklärungen und Redewendungen.

Libelle = Wasserwage von lat. libella, ursprünglich ein Gewicht. vergl. franz. la livre = Pfund.

Lot = Senkblei — früher auch ein Gewicht = $^1/_{32}$ Pfund, noch heute im St. Gallischen Rheintal in Gebrauch.

Freunde in der Not,
gehn tausend auf ein Lot!
Kein Lot gebe ich nach

} Welchen Sinn hat der Ausdruck Lot in diesen Wendungen?

Loten, Lotse — Was macht der Lotse?

Vertikal — vom lat. vertex = Gipfel.

In Vergleichen und Redewendungen spielen ältere Gewichte eine große Rolle. Es wurde Lot und Libelle erwähnt. Vergleiche weiter: kein Quintchen Verstand,
er wird nicht für 18karätig genommen;
ein Mann von echtem Schrot und Korn.

Himmelsrichtungen, Windrose.

Es wird die tägliche scheinbare Bewegung der Sonne an Hand einer Skizze besprochen, die Südrichtung als die allein bestimmbare erkannt und der kürzeste Schatten als Kennzeichen der Mittagslinie festgestellt.

Durchführung des Versuches.

Im Zimmer mit Karton und Stricknadel oder Draht; im Freien dient das Reck oder ein Stecken als Schattenstab (Gnomon). Man erinnere die Schüler daran, daß der Schattenstab wohl das älteste wissenschaftliche Werkzeug, das erste Instrument der Sternkunde ist.

Wir führen die Bestimmung der Südrichtung auf der Turnwiese durch.

*) Figur 1. Von 10 Uhr morgens an werden die Enden der Schatten eines Reckpfostens durch Pflöcke, Steine, Stecken

*) Die Figuren können bei Herrn List in Birwinken separat bezogen werden.

etc. bezeichnet und die Punkte durch Einritzen einer Linie oder Legen des Spielbandes verbunden. In der Regel wird man im Moment der Kulmination der Sonne nicht beobachten können, was kein Fehler ist. Es ergibt sich jetzt die Frage: Wie findet man den kürzesten Abstand des Pfostenfußpunktes von der Linie der Schattenenden? Die Schüler finden schnell die senkrechte heraus.

Jetzt bietet sich Gelegenheit, die Notwendigkeit und den Wert späterer geometrischer Konstruktionen zu demonstrieren. Kann sich ein Geograph oder Astronom (Ausdrücke erklären!) mit dieser Angabe begnügen? Wie könnten wir den Abstand, besser gesagt seine Richtung, genauer finden? Mit einer Schnur beschreibe ich vom Schattenstab als Mittelpunkt aus einen Kreisbogen und halbiere die auf der Pflocklinie abgeschnittene Sehne (Zusammenlegen einer Schnur). Die Mittagslinie ist durch den Halbierungspunkt und den Fuß des Schattenstabes bestimmt.

Bei der nun folgenden Darstellung der

Windrose

ist meines Erachtens folgendes zu betonen:

1. Nur die Südrichtung kann durch Beobachtung bestimmt werden. Ost - West liegt rechtwinklig zu Süd-Nord.
2. Der *rechte Winkel* zwischen der Senkrechten und der Wagrechten wird in der wagrechten oder schiefen Zeichnungs-ebene angewendet und die Bezeichnung Lot oder Senkrechte der Kürze halber auf eine beliebige andere Richtung übertragen, die mit der ersten einen rechten Winkel bildet. (Vergleiche die unklare Bezeichnung „Höhe" im Dreieck.)
3. Die sogenannte *Mittagslinie (Meridian)* ist eine Richtung, allenfalls eine gedachte Linie. Aus praktischen Gründen werden allerdings die Meridiane auf den Karten und dem Globus eingezeichnet.

Damit sind die Kapitel Linien und Winkel einigermaßen vorbereitet. Selbstverständlich könnte Abschnitt II auch in der Physik (oder Geographie) behandelt werden, wie es ja mancherorts auch geschieht.

Es gehört aber meines Erachtens in die Geometrie, weil mehrere wichtige Bezeichnungen ihm eben wegen ihrer Anschaulichkeit und Kürze entlehnt wurden. So bedeuten die holperigen Ausdrücke Kathete (gesprochen kaseita) und Hypotenuse wörtlich gar nichts anderes als Lot und Spannseite. Welche Verwirrung das an und für sich bequeme und anschauliche Wort „Höhe im Dreieck“ (wahrscheinlich von der Firsthöhe im gleichschenkligen Dachdreieck stammend) bei schwachen Schülern anrichtet, werden mir andere Geometrielehrer bestätigen können. Immer wieder taucht die Meinung auf, Höhen und überhaupt Abstände müßten senkrecht (im ursprünglichen Sinn des Ausdrucks) „gefällt“ — auch dieser Terminus ist bezeichnend! — und gemessen werden.

Bezeichnungen. Kulturgeschichtliches.

Culmination vom lat. Culmen = Gipfel

Schattenstab }
Gnomon } Gnomon hieß ursprünglich der Zeiger an der Sonnenuhr.

Die ältesten Sternwarten im ersten Jahrtausend vor Christi in China und Indien bestanden in der Hauptsache aus einem Gnomon, welches eine hohe steinerne Säule darstellte.

Horizont = Grenze (des ebenen wagrechten Gesichtsfeldes).

horizontal = wagrecht.

Meridian, Mittagslinie v. meridies Mittag, vergl. franz. midi = Süden.

III.
Die Linien.

In rührender Übereinstimmung beginnen fast alle Lehrbücher mit diesem scheinbar einfachsten Kapitel. Einige dürre Definitionen und Grundsätze, bestenfalls einige magere Beispiele leiten das Fach ein, in dem fortan die Kreide das große Wort spricht und alle Geheimnisse enthüllt. Ich kenne kein Gebiet der Geometrie, das im gleichen Maße die Verknöcherung und Erstarrung eines an und für sich so anregenden und vielseitigen Stoffes vordemonstrieren könnte.

a. Die Linien als Erzeugnis einer Bewegung.

Wo habt ihr Linien als *Spur* eines bewegten Gegenstandes entstehen sehen? Spur des Wildes, des Velos auf nasser Straße, Geleise des Wagens, Kurven des Schlittschuhfahrers im Eise, Furchen der Zähne des Rechens oder der Egge im Acker, Kratzen der Spielgrenze z. B. des Kreises, „Strahl“ der Brunnenröhre, Sonnenstrahlen in Staubwolken oder feuchter Luft, Schriftzüge der Feder, des Pinsels (Pinselschrift der Japaner).

Entweder ist der fahrende Gegenstand spitzig und „reißt“ eine Furche oder er hinterläßt eine farbige Spur. Hier ist Gelegenheit geboten, auf das unsinnige „Eingraben“ der Linien mit dem Bleistift im Freihandzeichnen hinzuweisen. Der Bleistift soll abfärben und flach geführt werden. Dagegen erwähne man die Schreibart der ältesten Kulturvölker z. B. die 10 Gebote auf Steintafeln, ehernen Gesetzestafeln der Römer; die römischen Schüler schrieben mit einem Griffel (stilus) auf Wachstafeln und geometrische Figuren wurden ihnen im Sand oder Staub vorgezeichnet.

Riß-Zeichnung *Reißfeder, Reißzeug* von ritzen
englisch write = schreiben verwandt mit ritzen

Die „Buchstaben“ wurden in Buchenstäbe geschnitten, gekerbt. Zeigt eine Kerbe! Was bedeutet: „Ich nehme ihn aufs Kerbholz“. Es wird ihm aufs Kerbholz geschrieben?“

Kreis, alte Form: *Kreiz,* von kratzen. Welchen Bedeutungswandel zeigt die Wendung: einen guten Stil schreiben?
(Stil = Griffel, jetzt = Ausdrucksweise.)

b. Geraden und Kurven. Fig 2.

Den Unterschied zwischen geraden und krummen Linien zeige ich folgendermaßen: Ein schmaler Pappestreifen (am besten mit Schlitz versehen) ist am einen Ende durchbohrt, so daß ein Schüler eine Kreide hindurchstecken kann. Nun ziehe ich mit einem Schnürchen oder Hölzchen den Streifen am andern Ende direkt nach einem vorher bezeichneten Punkt. (Tafelecke). Die Kreide beschreibt eine Gerade. Merkmal: Ich habe die Richtung nicht geändert, sondern bin auf dem kürzesten Weg auf mein Ziel losgesteuert.

Jetzt reiße ich den Streifen vom gleichen Ausgangsort zum selben Endpunkt, indem ich einen großen Umweg gehe und recht deutlich die Richtung ändere, lasse am Endpunkt den Streifen ruhen und die Endrichtung angeben. Die betr. Gerade streift die Kurve eben noch. Dasselbe wird für einige

Zwischenlagen gezeigt und von den Schülern zu zweien mit Bleistift wiederholt. Alle überzeugen sich leicht:

Ändert die fahrende Spitze — wir nennen sie und ihren Abdruck fortan Punkt — die Richtung, so entsteht eine krumme Linie. Die augenblickliche (momentane) Richtung der Bewegung wird durch eine Gerade bezeichnet, welche im entsprechenden Punkt an der Kurve streift, sie berührt. Sie heißt Tangente. Je stärker die Krümmung, desto größer der Umweg. Die Gerade ist der kürzeste Verbindungsweg zwischen 2 Punkten.

c. Die Gerade.

Wie haben wir uns Geraden ohne Lineale hergestellt? Mit der gespannten Schnur. Wo wendet man auch noch Schnüre an, um die gerade Richtung innezuhalten? (Setzschnur im Garten.)

Wie ziehen der Maler und der Zimmermann Geraden? Der Sohn eines Zimmermanns meldet sich und zeigt es.

Eine Schnur wird mit der Tafelkreide eingerieben (ev. Kohle) gespannt, gezupft. Nun schnellt sie gegen ein schwarzes Papier und hinterläßt einen schönen weißen geraden Strich, den ich mit dem Taschentuch leicht abschlagen kann. (Vorteil für den Maler.) Was bedeutet „über die Schnur hauen" heute? Was ursprünglich? Nachdem ich kurz erwähnt habe, daß 2 Punkte eine Gerade eindeutig bestimmen und zwar praktisch um so genauer, je weiter sie auseinanderliegen, daß 2 Geraden sich in einem Punkt schneiden und die Begriffe unbegrenzte Gerade, Strahl, Strecke eingeführt habe, erhebt sich die Frage: Wie legen wir größere Strecken fest, bei welchen Lineale, Schnüre, Stangen etc. gar nicht ausreichen? Wo kommen sie überhaupt vor? Straßen, Kraftleitungen, Eisenbahn, Tunnels, Verbindungen der Vermessungspunkte etc. Nach einigen erläuternden Bemerkungen, die übersichtlicher an der Wandtafel als auf dem Felde gemacht werden, begeben wir uns auf eine frisch gemähte Wiese (Turnplatz).

Eine mäßig große Strecke (60—80 m) A B wird durch 2 Stecken (Jalons besser, aber nicht notwendig, weiß gestrichene Bohnenstecken tuns auch) begrenzt. Schätzen der Entfernung A B.

Nun sollen Punkte zwischen A und B eingeschaltet werden. Ein Schüler stellt sich ungefähr in die Gerade A B und hält mit wagrecht ausgestrektem Arm den Stecken zwischen Daumen und Zeigefinger. Durch Winken mit der Hand visiert ihn ein anderer genau in die Gerade. Rufen und Schreien ist untersagt. Besser die übelste Kreidegeometrie als eine ziellose, einer Spielerei ähnliche Feldmeßübung mit einer lärmenden Schar, wobei den Fleißigen und Begabteren die Resultate oft noch abgeschrieben werden! Auf ein verabredetes Zeichen (Senken der Hand) des Visierenden läßt der Stabträger den Stecken fallen. Damit ist Punkt C zwischen A und B gelegt worden.

Einen Punkt D in der Verlängerung von A B kann ein Beobachter allein ohne Hülfe des Visierers finden.

Die einzelnen Strecken AB, AC, CB, BD werden mit einem Meßband, einer selbst verfertigten Meßschnur oder einem selbst hergestellten Meßstecken gemessen und eine Zeichnung wird in passendem selbstgefundenen Maßstab im Heft angefertigt.

d. Gedachte Linien.

Nun ist den Schülern klar zu machen, daß die wenigsten Geraden, mit welchen man praktisch arbeiten muß, vollständig sichtbar etwa als Furche etc. vor dem Beobachter liegen, ja überhaupt nicht sichtbar gemacht werden können. Es ist gerade eine wichtige Aufgabe der Geometrie, unbegangbare nicht unmittelbar zu messende Strecken trotzdem mit verhältnismäßig geringer Mühe genau nach Richtung und Größe festzustellen, z. B. Tunnelaxen, Länge des Erdhalbmessers, Breite von Meeresarmen, Abstand der Erde von Mond und Sonne.

Aber auch der gezeichneten Linie haftet infolge der Unvollkommenheit unserer Werkzeuge ein Mangel an. Unter einem Vergrößerungsglas erscheinen die feinsten Geraden immer als grobe, plumpe Striche. Eine vollkommene Gerade kann man sich denken, vorstellen, aber kaum jemals herstellen. Welche Geraden kommen dieser gedachten vollkommenen wohl am nächsten? Faltlinie im feinen Papier, Spinnfäden in den Beobachtungsinstrumenten der Feldmesser und Astronomen, ein einzelner Lichtstrahl.

e. Krumme Linien.

Bei der wohl den meisten Schülern schon geläufigen Schnurkonstruktion des Kreises ist der Unterschied von festem Punkt und wandernder Kreidespitze scharf hervorzuheben. Die Finger halten die Schnur im Mittelpunkt „fest", der laufende Punkt wird in eine bestimmte Bahn gezwungen. Die Grundeigenschaft dieser krummen Linie soll betont werden: Alle Punkte der Kreislinie sind von einem Punkte (Mittelpunkt, Zentrum) gleichweit entfernt. Natürlich wird man ein recht drastisches Gegenbeispiel zeichnen lassen, z. B. die Gerade oder eine Schneckenlinie, damit das Merkmal als solches deutlich hervortritt und nicht als zufällige Nebensache erscheint.

Kreise als Spuren treten wenig auf z. B. Festtreten des Bodens im Spiel, durch das Pferd am Göpel; früher zog man einen Kreis als Gerichtsmal, daher der Ausdruck: einen Kreis schlagen, in den Ring treten. Auch die Ellipse mag in der praktischen Schnurkonstruktion der Gärtner und Maler vorgeführt werden. Sie kommt ja ohnehin im Freihandzeichnen in der Perspektive des Kreises bald zur Anwendung.

f. Übungen zur Auswertung, Ergänzung und allseitigen Beleuchtung der gewonnenen Erkenntnisse.

Zur Geraden:

1. Tragt die gemessenen Strecken in passendem Maßstab in euer Heft ein.
2. Ebenso den vorgezeichneten Kreis, nachdem die Schnurlänge = r gemessen worden ist.
3. Übt euch im Schätzen von Strecken und vergleicht die Schätzung mit dem Ergebnis der Messung nach folgender Anordnung:

Streckenbezeichnung	geschätzt	gemessen	Fehler in Teil. der wirkl. Lg.
Höhe des Schulzimmers	4 m	$3^1/_2$	$^1/_7$
Länge der Bank	2 m	2.30	0.30 = $^1/_8$
Breite und Länge des Schulhauses .	.	.	.
„ „ „ des Spielplatzes .	.	.	.
Aadorf-Eschlikon	.	.	.

4. Vergleicht 2 Strecken, indem ihr annähernd ihr Verhältnis in ganzen Zahlen anzugeben sucht, z. B. Länge der Bank zur Wandhöhe wie 2 : 4 oder 1 : 2, d. h. die Wandhöhe ist ca. 2 mal größer als die Banklänge.
5. Teilt eine gegebene Strecke von Auge in 3 gleiche Teile.
6. Ebenso in 5 Teile.
7. Bilde die Summe von 2 und mehr Strecken durch Messen und Addieren oder Antragen mit dem Zirkel. Drücke diese Aufgabe in knappster Form aus, etwa
$$x = a + b, \quad y = a + b + c.$$
8. Suche durch probeweises Halbieren mit dem Zirkel die Mitte einer Strecke und bestimme dann
$$x = \frac{a + b,}{2} \quad x = \frac{a + b + c}{3}$$
9. Bestimme durch Abtragen die Differenz zweier Strecken
$$x = a - b.$$
*) 10. Die Endpunkte der Strecke A B sind durch einen mäßig hohen Grat (Wallmoräne bei Aadorf) getrennt, so daß man nicht von A nach B sehen kann. Wie kann die Richtung A B festgestellt werden? Wo kommt das praktisch vor? Wenn die Axe eines Tunnels durch einen nicht zu hohen Hügel gefunden werden soll.

Lösung. (Figur 3.)

Fixiere auf dem Hügel einen Punkt C, von welchem aus beide Endstäbe A und B sichtbar sind und bestimme einen weitern Punkt D in der Verlängerung von A C. Verschiebe C solange, bis D in die Richtung C B fällt. Ist das bei Punkt Co der Fall, so gibt die Richtung A Co auch diejenige von A B an.

11. Zeichne die großen Antiquabuchstaben, welche gebrochene Linien darstellen. Gib ebenso die gemischten Linien unter den Buchstaben an.

Zur krummen Linie

Eine Kurve entsteht auch durch gewaltsames Biegen eines geraden Stabes oder durch Verdrängen der Punkte einer geraden Reihe infolge eines Anstoßes.

12. Wie verfertigt der Schmied den Radreifen? Halbmesser heißt auch Radius = wörtlich Speiche. Woher stammt diese Bezeichnung?

Spirale und Schneckenlinie.

13. Welche Schmucklinie stellt der Schlosser durch Biegen von Eisenstäben her? Zeichne einige dieser Linien ins Heft. Vielleicht sind Muster im Gitter der Schulhaustüre, im Treppengeländer zu finden.

14. Ziehe eine Sekante durch eine derart gezeichnete Kurve und laß durch Drehung um einen Schnittpunkt aus ihr die Tangente hervorgehen. Geometrische Erzeugung der Tangente im Gegensatz zur vorher erwähnten mechanischen (secare = schneiden, tangere = berühren).

Fig. 4. 15. *Wellenlinie.* (Mit der Redisfeder.) Entstehung! Zieht in den Wendepunkten, den „Tälern" und „Bergen" die Tangenten. Schmuckform!

Fig. 5 16. *Hängelinie,* auch *Kettenlinie* genannt: Heftet ein Papier an die Wand, hängt eine Kette (Uhrkette oder Halskette) an 2 Punkten auf und zeichnet die Kurve möglichst genau nach. Wo treten solche Hängelinien im Großen auf? Hängebrücken, Telephondrähte, Guirlanden.

Fig. 6. 17. *Rollkurve (Radlinie).*

Merkt euch durch ein Zeichen einen bestimmten Punkt des Umfanges eines Rädchens, laßt es auf einer Leiste rollen und notiert den Weg des bezeichneten Punktes auf der Wandtafel oder im Heft.

Fig. 7. 19. *Sternlinie als Randkurve ihrer Tangenten.*

Eine an eine senkrechte Wand gelehnte Leiter (oder ein Brett, ein Stab) rutscht langsam auf dem glatten, wagrechten Boden, bis sie schließlich wagrecht zu liegen kommt. Zeichne die verschiedenen Lagen der gleitenden Strecke und ergänze die Kurve durch Wiederholung der Konstruktion in den 3 andern Quadranten zur vierspitzigen Sternkurve.

Fig. 8. 19. Zwei Schüler helfen sich gegenseitig bei der Fadenkonstruktion der Ellipse. Übergang der Ellipse zum Kreis.

20. Faßt das Wesentliche über die Linien selber in einem kurzen Aufsatz zusammen, indem ihr das nach eurer Meinung Wichtigste hervorhebt u. mit Skizzen erläutert.

Künstlerische Verwendung.

21. Stellet sämtliche euch bekannten in Ornamenten vorkommenden Linienarten zusammen und scheidet sie in gerade, krumme, gebrochene und gemischte Linien.

Urteilt nach eurem Gefühl, welche schmückenden Linien den Eindruck der Ruhe und Stetigkeit hervorrufen. (Kreis, Quadrat, Rechteck, parallele Geraden.)

Nennt Zierlinien, die lebhaft, fast unruhig scheinen, ja sogar vorwärts stürmen. (Mäanderband, Wellenlinie, überschlagende Welle etc.)

Aus der Sprachkunde und Kulturgeschichte.

Linie, *Lineal* } von lat. linea, ursprüngl. = Schnur.

Linea, *Linnen*, *Leinwand* } von linum = Flachs.

Strecke Was bedeuten: Zur Strecke bringen, schnurstraks?

Beim *Kreis* sind einige Bezeichnungen schon erklärt worden.

Kreis Wie wird das Spielmal schnell hergestellt? (Kratzen.)

Einen *Kreis schlagen* vergl.: einen Weg einschlagen (ursprünglich ins Dickicht).

Zirkel von circulus = Kreis, Verkleinerungsform von circus. Welche Form hat ein Zirkus?

Umfang, *Umstand*, *circonstance* } um = ringsum, lat. circum = ringsum.

nach den *Umständen* entscheiden:

Der Richter urteilte früher nach den „Umständen“, d. h. nach den Beisitzern, die ihn damals im Kreise umstanden.

Punkt punctum = gestochen.

Was ist der Sinn von: damit punktum, punkt 12 Uhr?

Zentrum griech. kentron = Stachel.

Tangente Vergl. die bot. Bezeichnung für die Balsamine: Impatiens noli tangere (rühr mich nicht an, ich leid's nicht!)

Archimedes zum hereinstürmenden Soldaten: „Noli *tangere circulos* meos!“ — Komm mir nicht an meine Kreise!

Wo waren demnach die Kreise gezeichnet?

IV.
Einige praktische Winke.

a. Die Beschäftigung der Klassen an ungeteilten Schulen.

Obwohl in meinen Vorschlägen eigentliche Feldmeßübungen eine sehr bescheidene Rolle spielen, wird es doch einige Male nötig sein, eine Klasse ins Freie zu führen. Für den betreffenden Lehrer entsteht die Schwierigkeit: Wie beschäftige ich die andern beiden Klassen? Angenommen die I. Klasse übe das Abstecken von Geraden wie es eben besprochen worden ist. Dann können die Knaben von II. und III. eine Staffelmessung, Dreiecksflächenberechnung, kurze Koordinatenaufnahmen oder vorher Übungen mit dem Winkelspiegel ausführen, eventuell kommt die selbständige Herstellung von Meßstangen, Meßschnüren und Kreuzscheiben in Betracht. Mit diesem Inventar wird es ja an den meisten Schulen dürftig genug bestellt sein.

Daß man mit nur einer Geometriestunde in der Regel etwas Ersprießliches erreiche, halte ich für unwahrscheinlich und denke mir den Geometrieunterricht, mindestens im Sommer, auf eine Doppelstunde konzentriert. Auch das Freihandzeichnen bietet Beschäftigungsstoff in Fülle. Ich setze allerdings voraus, daß diesem Fach ein systematischer Lehrgang zugrunde gelegt werde. Haben die Schüler im Sommer der ersten Klasse das durchaus nicht leichte Baumzeichnen (mit Kohle), im Winter die Perspektive des Rechtecks einigermaßen geübt, so werden sich im Landschaftszeichnen für die Knaben von II. und III. leicht nicht zu schwierige Motive finden lassen, wie z.B. Wald- und Obstbäume, (bei voller Beleuchtung) Brücken, Häuser, Straßenzüge, Kirchtürme, Dachpartien.

Wird der Unterricht im Schulzimmer erteilt, so bieten die Abschnitte: Linien und Winkel mit ihren zirka 45 Aufgaben gewiß eine ansehnliche Zahl von Übungen, die eher für die II. und III. Klasse passen, als für I., oder gemeinsam in allen 3 Klassen behandelt werden können. Was in Chemie möglich ist, läßt sich in Geometrie noch besser durchführen.

b. Literatur.

Wer mit Reformvorschlägen für ein Fach aufrückt, ist immer — er mag noch so maßvoll vorgehen — der Versuchung ausgesetzt, die schon bestehenden Lehrmittel und Methoden in scharfer Kritik zu zerzausen. Man nimmt in bestem Treuen und ehrlichem Eifer die eigenen Ideen um so wichtiger, je weniger man bei Fremden Anleihen aufgenommen hat. Niemand wird also eine Kritik der gebräuchlichen Geometriebücher von mir erwarten. Der eben genannten Verlockung habe auch ich übrigens nicht ganz widerstehen können, und die Sünde, die ich vorhin geißelte, im Verlaufe meiner Ausführungen mehrmals begangen.

So betone ich denn nur kurz, daß m. E. ein ziemlich veraltetes Geometrielehrmittel in der Hand des Schülers immer noch ersprießlicher sei, als ein Geometrieunterricht ohne jeden Leitfaden. Gublers Büchlein kann auch ich nicht ganz entbehren, so vieles in ihm mir nicht recht paßt. Ein Lehrbuch muß eben auf gar viel Wünsche und Verhältnisse Rücksicht nehmen. Von Lehrmitteln, deren Verfasser sich beim Feldmesser, Ingenieur, Zimmermann, Maurer, Mechaniker, Förster, Maler etc. umgesehen haben, was im praktischen Leben etwa von der Geometrie verwendet werde und wo Stoff zu sinnvolleren Übungen zu holen wäre, nenne ich einige, wobei ich ohne eigentliche Kritik zu üben, meinen persönlichen Eindruck wiedergebe. Keines hat mich ganz befriedigt, so wenig ja auch meine Anregungen ungeteilte Zustimmung finden werden.

1. Vorpahl und Pietzker:

Lebensvolle Raumlehre für Volksschulen. *Schülerheft.* Verlag Beltz, Langensalza.

Eine hübsche reichhaltige Aufgabensammlung im Sinne der Arbeitsschule. (80 Rp.)

2. Rudolf Schill:

Geometrische Anschauungslehre I. II. Wien, Franz Deutike.

Viel zu einseitig auf Feldmessen zugeschnitten, sonst recht anregend.

3. H. Kempinsky:

Lebensvolle Raumlehre. Verlag Dürr, Leipzig.

Nur für den Lehrer. Sonderbarerweise von einem Germanisten verfaßt und doch ein vortreffliches Geometriewerk. Bringt sprachkundliche Anmerkungen und eine reiche Auswahl von vorzüglichen Beispielen zusammenhängender, raumkundlicher Betrachtungen.

Leider etwas weitläufig und unübersichtlich. Der Preis (10 Fr.) ist im Vergleich zum gediegenen Inhalt äußerst bescheiden. Gegner der Arbeitsschule.

4. Erziehliche Handarbeit.

Eine Einführung in ihre Techniken. Verlag Sollor, Reichenberg. (Preis 12 Fr.)

Nur eine bescheidene Partie dieses herrlichen Werkes ist der Geometrie gewidmet. Wer seinen Geometrieunterricht im Sinne der Arbeitsschule orientieren will, was nicht eigentlich der Zweck meiner Anregungen ist, findet in diesem schönen, gut illustrierten Buch vortreffliche Wegleitung. Fällt den unbedingten Anhängern und Verteidigern der heute üblichen Volksschulgeometrie — und die Sekundarschule soll doch eine Volksschule und keine Gelehrtenschule sein! — nicht auf, wie sehr die Verfasser der genannten Lehrmittel den Nachdruck auf *Anschauung* und *Leben* verlegen? Dabei kommen sie aus ganz verschiedenen Lagern und wollen beileibe nicht eine Gewerbeschulgeometrie vermitteln, sondern den wissenschaftlichen Fond, z. B. die Beweisführung geometrischer Sätze beibehalten, allerdings nur so weit, als es dem geistigen Stand der Schüler angemessen ist und von Geistesbildung (Einsicht, Ordnung, Klärung) die Rede sein kann. Auch ich bin im Bestreben, den Gegensatz zwischen dem üblichen, überlieferten und einem fruchtbareren, zeitgemäßen Geometrieunterricht zu betonen, um den Ausdruck Leben trotz allen Suchens nicht herumgekommen.

c. Material.

Das Reißbrett hat m. E. in der Sekundarschule seine Rolle ausgespielt. Für die Lehrlinge bestehen ja obligatorische Gewerbeschulen mit Vorbereitungs-Kursen im Zeichnen. Für das sogenannte technische Zeichnen bietet der Stundenplan keinen Raum mehr. Die Redisfeder kann zur Not die Reißfeder bei genügender Übung ersetzen. Nötiger sind Kreisteilungen zum Aufkleben bei den außerordentlich vielseitigen Übungen mit Winkeln.

Ganze Kreisteilungen, die zudem zerschnitten werden können und bedeutend billiger als die Transporteure sind, liefert

Hermann Springer, Leipzig, Hohestraße 4.

Vom Buchbinder läßt man sich aus Kartonabfällen Rechtecke schneiden. Eine einzige Kreuzscheibe taugt nicht viel. Aus 2 senkrecht gekreuzten Latten und 4 Nägeln konstruiert man sich unschwer mehrere billige und für Schulzwecke durchaus genügende. Mit Hilfe des Buchbinders ist auch ein leidlicher, aber etwas empfindlicher Winkelspiegel zu verfertigen.

Für den mir allerdings unwahrscheinlichen Fall, daß ein Geometrielehrer in den einfachsten Feldmeßübungen unbewandert sei, empfehle ich, sich die wenigen Verfahren von einem Geometer zeigen zu lassen.

V.

Die Winkel.

a. Der Winkel ist eine erstarrte Drehung, ein Richtungsunterschied.

Material: Kreisteilung, Pappe, Stricknadel. Musterklammer oder Drahtöse.

Zeige durch eine Skizze, welche Drehung du beim Kommando: Rechts um, Rechts um kehrt ausführst. Nenne andere Drehungen! Was ändert sich bei der Drehung? Die Richtung. Den still stehenden Drehpunkt nennt man Scheitel; die Geraden, welche die ursprüngliche und die neue Richtung angeben, heißen die Schenkel des Winkels, der den Betrag der vollzogenen Drehung darstellt.

Die Winkelentstehung- und Messung wird am besten an der Winkeluhr gezeigt. (Fig. 9.)

Einfaches Modell einer Uhr mit Stundenzeiger und Stundeneinteilung oder Kreisteilung. Als Nullpunkt dient die Stellung des Zeigers (Stricknadel) um 12 Uhr. Mit Leichtigkeit können die Stundenzahlen mit den Winkeln 30°, 60° usw. verglichen werden. Den Schülern wird ohne weiteres klar, daß die Größe der Schenkel auf den Winkel keinen Einfluß besitzt. Sie haben ja an großen und kleinen Zifferblättern — das merken sie jetzt — schon lange Winkel abgelesen, sie nur anders benannt.

Spitze und stumpfe Winkel erläutere man am Querschnitt eines scharf geschliffenen und stumpfen Messers. (Fig. 9.) Zum Messen und Übertragen (transporter) von Winkeln dient der Transporteur.

Flächenwinkel geben den Richtungsunterschied zweier Ebenen an. Meßt Flächenwinkel am Buch (Deckel und Blätter) oder an der geöffneten Türe. (Türe und Wand.) Der Steigungswinkel einer Straße wird an einem Brett oder einer Reißschiene erläutert. Um den Flächenwinkel am regulären Tetraëder zu messen, stelle man das Karton- oder Holzmodell in Sand, sodaß eine Kante senkrecht steht und lege den Transporteur wagrecht. Daß die Ebene des Winkelmessers zur Kante des Flächenwinkels senkrecht liegen muß, um einen eindeutigen Wert für den Flächenwinkel zu erhalten, wird der Schüler bald einsehen, jedenfalls besser als aus allgemein gehaltenen Definitionen an Hand von Tafelzeichnungen. (Vorbereitung auf Kristallwinkelbestimmung.)

b. Darstellung, Messung und Vergleichung wichtiger Winkel.

Außer den in jedem Lehrbuch angeführten unentbehrlichen Aufgaben seien noch Übungen erwähnt, die zum Teil für die I. Klasse passen, zum Teil besser in der II. und III. als Repetition und Vertiefung behandelt werden. Sie werden von den Schülern nach meinen Erfahrungen mit großem Eifer ausgeführt, bringen in unglaubliche Verschwommenheit die nötige Klarheit, erfordern aber zum Teil viel Zeit.

1. Sucht Winkel von 30°, 45°, 60°, 90° an euren Equerren.
   Tragt in einem Kreise seinen Halbmesser als Sehne 6 mal ab und zieht Radien nach den Sehnenendpunkten. Wie groß sind die Winkel am Zentrum? Wie groß in den gleichseitigen Dreiecken überhaupt?
2. Meßt die Neigungswinkel der Schreibflächen eurer Bank mit der Wagrechten, der Wandtafel gegen die Wand und vergleicht sie.
3. *Geographische Breite des Wohnortes:*
   Stellt ein Modellchen mit Hilfe eines Transporteurs und eines Fadens (Erdradius) her.
4. *Sonnenhöhemessung.* (Fig. 10.)
   Spannt von einem Punkte einer wagrechten Ebene eine Schnur nach einer Fensterecke und meßt den Winkel zwischen der Schnur und der lotrecht unter ihr liegenden Geraden der Ebene. Rohe Messung der Sonnenhöhe, d. h. eines Winkels, mit senkrecht eingespannter Kreisteilung und beweglichem dünnem Blechstreifen (Stricknadel). Beobachtet den untern Rand der Sonne mit einem durch Ruß geschwärzten Glas!!
5. Suche den Himmelswagen und den Polarstern auf und vergleiche z. B. an einem klaren Winterabend die Stellung des

Wagens um 6 Uhr mit der um 10 Uhr. Erfolgt die Drehung der Sterngruppe um den Polarstern im Uhrzeigersinn? Fertige eine Skizze der beiden Stellungen an.

Weise das Reflexionsgesetz nach (Fig. 11):

6. Laß einen Ball von einer Wand zurückprallen (Spielkugel etc.) und merke dir die Anfangs- und Endrichtung des Rollens. Miß die Winkel mit der Wand und mit dem im Aufstoßpunkt auf die Wand errichteten Lot.
7. Untersuche die Zurückwerfung des Schalles an der Wand eines einzelstehenden Hauses, das ein deutliches Echo gibt (Schützenhaus; Waldrand weniger gut).
8. Zeige die Gültigkeit des Reflexionsgesetzes für das Licht. (Kreisteilung, Gewehrspiegel oder Spiegelklötzchen, Streichholzschachtel mit geschlitztem Boden, Reißnagel).

Die Angaben für die Aufgaben 5—8 sind absichtlich knapp gehalten. Es ist Sache des Lehrers, den Kern der in der Übung steckenden Frage vor der Behandlung herauszuschälen und eine reizvolle Aufgabe für den Schüler, die beste Anordnung zur Messung der Winkel durch Probieren und Überlegen selbst zu finden. Weitere Aufgaben schließen sich nach der Behandlung der Winkel an Parallelen an.

c. Der Winkel im Sprachgebrauch.

Winkel von *Wink*. Welche Bewegung führt man beim Winken aus? (Beugen). Zeigt einige Arten des Winkens. (Arm, Hand, Finger, Kopf).

Lat. *angulus* = Winkel, der Ausdruck bedeutet eigentlich *Enge*,
franz. angle, verwandt mit dem deutschen *„eng"*.

Triangulum = Dreieck. Daher Triangulation = Dreiecksvermessung, Triangulationspunkt; im Volksmund hat das Lehnwort *„Dreiangel"* zwei Bedeutungen (Musikinstrument, Riß im Kleid).

Griech. *gonos* = Winkel, soll von gonii = Knie kommen.

Verwandte Ausdrücke: Diagonale (Durch den Winkel),

Goniometer = ?, orthogonal = rechtwinklig.

Schenkel zeige am menschlichen Körper wie die Schenkel Winkel bilden.

Scheitel von scheiden, vergl. Scheideweg und Scheit (Grundbedeutung: trennen).

Der Begriff der Enge, Ecke (wie in angulus) findet sich in den Wendungen: *Stiller Winkel, Winkelgasse.* Wo wohnt der *Winkeladvokat?* Was bedeutet der Ortsname *Birwinken,* der Geschlechtsname *Winkler* ursprünglich? Erkläre den Ausspruch: „Man durchschaut seine *Winkelzüge."*

d. Winkel an 2 und 3 Geraden, Parallele, Winkelsumme im Dreieck.

Dieser Abschnitt bringt die ersten Beweise. Man kann darüber streiten, ob der Satz von der Gleichheit der *Scheitelwinkel* überhaupt eines Beweises bedürfe oder nicht unmittelbarer aus der Anschauung folge. Ich möchte betonen, daß nicht der Beweis selber, sondern die Einführung des Prinzips der Beweisführung wesentlich ist. Es tritt dem Schüler die an und für sich einfache aber im praktischen Leben eigentlich nicht vorkommende Überlegung zum ersten Mal entgegen: Wenn eine Größe a sowohl b wie c zum gleichen Betrag ergänzt, so ist b = c. Diese Folgerung ist der Geometrie eigentümlich und sollte durch den Vergleich mit den Gewichten einer Wage dem Anfänger erleichtert werden. Auf ihre wiederholte Anwendung beim Beweisen ist jetzt schon aufmerksam zu machen. Der Grundsatz; Gleiches zu Gleichem gibt Gleiches ist zwar kurz und bündig, aber in seiner Allgemeinheit für den kindlichen Geist m. E. absolut nichtssagend.

Parallelen werden als gleichgerichtete Geraden erklärt. Das praktisch wichtige Parallelverschieben eventuell das umständlichere Winkelabtragen werden hierauf eingeübt.

Man unterlasse es ja nicht *Parallelen* als Geraden mit *unendlich fernem Schnittpunkt* vorzuführen, weil in den Anwendungen gerade diese Betrachtung oft wiederkehrt. Man lasse die Schüler von 2 Punkten des Zeichnungsblattes nach immer weiter entfernteren Zielen Geraden ziehen (Fensterecke, Kamin des Nachbarhauses, Fabrikkamin, Kirchturm), vergleiche die korrespondierenden Winkel und stelle bei genügend großer Distanz des Zieles vom Beobachter die Gleichheit dieser Winkel fest. Erst so wird der Schüler überzeugt sein, daß es für die Richtung nichts ausmacht ob der Beobachter von Bern oder Berlin aus nach einem Stern (Polarstern, Sonne) visiert.

Der Satz von der *Summe der Dreieckswinkel* dürfte etwas weniger trocken und abstrakt behandelt werden als es leider gewöhnlich geschieht. Nachdem die Schüler an einigen speziellen Fällen durch Nachmessen die Winkelsumme = 180° gefunden haben, wird der Lehrer betonen, daß dieser Satz einmal zur Kontrolle von Dreiecksberechnungen dient, wobei die Genauigkeit sich auf Bruchteile von Winkelminuten erstreckt; er hilft uns weiter eine Reihe von noch wichtigern Beziehungen feststellen. Genügt also ein probeweises Messen einiger noch dazu ziemlich ungenauer Spezialfälle? Nein, es ist nicht so recht überzeugend, und es sollte doch auch, sofern es überhaupt möglich ist, der tiefere Grund der überraschenden Constanz der Winkelsumme aufgedeckt werden. (Fig. 12.) Statt einer starren fertigen Figur führe ich den Beweis an einem Dreieck mit veränderlicher Spitze C. Sie liege zuerst als Punkt Co auf der Basis A B. Dann sind die $\sphericalangle$ A, B = O, $\sphericalangle$ C = 2 R. Nun werden die Seiten AC und BC zu Senkrechten aufgerichtet, die Spitze C_1 liegt unendlich fern; die Winkelsumme ist wieder 2 R. Schließlich rücke ich wieder die Spitze in eine beliebige

Lage C_2, indem die senkrechten nach innen sich drehen. Zieht man durch die Spitze C_2 die senkrechte zur Basis AB, so zeigt ein Blick auf die Figur, daß der neu entstandene Winkel AC_2B genau soviel beträgt, als die beiden rechten Winkel durch das Einwärtsneigen der Schenkel verlieren. Die Winkelsumme muß 2 R bleiben. Zum Beweis kann ergänzend ein Modell ausgeführt werden. (Musterklammern; bewegliche Nadeln oder Hölzchen als Seiten.) Sehr häufig tritt in Beweisen der Satz auf: Die Summe der spitzen Winkel im rechtwinkligen Dreieck beträgt 90^{0}. Im Interesse einer prägnanten Ausdrucksweise, wird sich die Einführung der Bezeichnung Complement empfehlen. Abgesehen von dem in allen Geometriebüchern enthaltenen Aufgabenmaterial seien noch folgende schwierigere Übungsbeispiele genannt, die Gelegenheit zu Schülerübungen bieten, aber zur gründlichen, d. h. vollkommenen klarstellenden Behandlung viel Zeit beanspruchen, wie ich selber erfahren. Dankbar und lohnend sind sie sicherlich.

e. Praktische Übungen zur Auswahl.

9. *Rechtwinkliges Dreieck.* (Fig. 13.) Fällt vom Scheitel des rechten Winkels das Lot auf die Hypotenuse und vergleicht die Teilwinkel mit den beiden spitzen Winkeln des Dreiecks. ($\sphericalangle$C'CA = C'BC. etc.) Für beide ist $\sphericalangle$ C'CB Complement.

10. *Quadrant* zur Messung von Höhenwinkeln. Verfertigt aus einem Senkblei, aufgeklebten Viertelskreise und Karton einen Quadranten (Fig. 14).

*) 11. *Polhöhe eines Ortes = seiner geogr. Breite.* (Fig. 15.) Es genügt für einfachere Messungen, die Polhöhe als Höhenwinkel (Steigungsw., Elevation) des Polarsternes zu betrachten. Die gegenseitige Lage von Beobachtungsort, Erdaxe, Äquator und Polarstern wird erläutert und die obenstehende Beziehung durch Winkelvergleichung, wie Figur andeutet, abgeleitet.

Schönes Beispiel einer Messung von Winkeln mit unzugänglichem Scheitel! Bedeutung der geogr. Breite für Geographen, Forschungsreisende, Seefahrer. (ß = geogr. Breite des Beobachters B.)

12. *Bestimmung der geogr. Breite des Wohnortes* mit dem Quadranten und Vergleichung mit der Karte.

13. Bestimmt mit Hülfe des Scheitelwinkelsatzes Flächenwinkel (Gekreuzte Stäbchen, Nadeln).

14. *Anlegegoniometer* (Fig. 16). (Wechselwinkelsatz.) Halbkreisteilung, drehbare Nadel, Kartonunterlage.

*) 15. Meßt mit diesem selbstverfertigten Goniometer Kristallwinkel an passenden Exemplaren eurer Mineraliensammlung. (Mineralienhandlung Grebel, Genf.)

Anwendungen des Reflexionsgesetzes.

16. Untersucht mit eurem Reflexionsapparätchen, welchen Einfluß die Drehung des Spiegels bei gleichbleibender Stellung der Lichtquelle auf die Richtung des reflektierten Strahles (Ausfallsstrahl) hat?

Die Schüler sind vor dem Versuch einstimmig der Meinung, einer Drehung des Spiegels um α^0 entspreche eine gleich große des reflektierten Strahles. Schönes Beispiel für die Notwendigkeit der Prüfung einer noch so plausibel scheinenden Vermutung. Wert geometr. Betrachtung, welche dieses auffallende Verhalten (der Ausfallsstrahl dreht sich um den doppelten Betrag) als Folgerung aus früherern Erkenntnissen aufklären kann.

*) 17. *Geometrischer Beweis des erwähnten Gesetzes.* (Fig. 17a, 17b.) Der Nachweis wird leichter ohne Benützung des Einfallslotes geführt und sei hier kurz angedeutet.

Vor der Drehung des Spiegels bilden Einfallsstrahl 1 und Ausfallsstrahl 2 mit der Spiegelebene die Winkel α^0. Nun dreht man den Spiegel um β^0. Jetzt schließen Einfallstr. 1 und Ausfallsstrahl 2' mit dem Spiegel die Winkel $(\alpha^0 + \beta^0)$ ein.

Winkel zwischen 2' u. der früheren Spiegelrichtung $= (\alpha + 2\beta)$.
Winkel zwischen 2 und der vorigen Spiegellage $= \alpha$.
Strahl 2 hat sich also nach 2' um 2β gedreht. Folgerung: Eine *Drehung des Spiegels* bewirkt eine *doppelt so große des reflektierten Strahles.*

18. Stelle zwei parallele Spiegel auf und beobachte die *Parallelverschiebung* des Lichtstrahles nach der zweimaligen Reflexion (Sextant). Erkläre die Erscheinung durch eine genaue Zeichnung (Winkel mit Zirkel abtragen).

*) 19. Drehe einen Spiegel um 45°. Was muß nach (17) eintreten? Ursprünglicher Strahl und 2 mal reflektierter Strahl stehen aufeinander senkrecht. Prinzip des Winkelspiegels (Fig. 18).

20. Übt euch mit dem Winkelspiegel im Fällen von Loten. Verfertigt nun selber einen solchen. (Der Buchbinder wird die Spiegelchen am billigsten herstellen.)

21. *Sehwinkel* (Fig. 19a). Sieh zuerst nach der oberen rechten und dann nach der unteren rechten Wandtafelecke. Dein Kamerad halte die beiden Blickrichtungen durch Stecken (Nadeln, Schnüre) fest. Sie schließen den Winkel ein, unter welchem uns der senkrechte (ev. etwas schräge) Wandtafelrand erscheint (Gesichtswinkel, Sehwinkel). Anwendung beim Vergleichen der Maße im Freihandzeichnen. Veränderung des Sehwinkels bei wachsender Größe und Entfernung des Objektes.

22. *Sehwinkel und perspektivische Verkürzung.* (19b.) Stellt einen etwa 1 m langen Stab in zirka 4 m Entfernung senkrecht auf, legt ihn darauf am selben Ort quer und in der Blickrichtung auf den wagrechten Boden und vergleicht die Sehwinkel, unter welchen der Stab in den drei Lagen euch erscheint. Wann ist er am kleinsten? Stellt eine Glastafel senkrecht vor euch und zeichnet den Stab. In welcher Lage scheint er am kürzesten? Erklärt nun, warum Baumschatten, die doch in Wirklichkeit so breit wie die Krone sind, so schmal erscheinen. (Fig. 19c.)

23. *Ellipse und Kreis.* (Fig. 20.) Erläutert durch eine Zeichnung mit Hülfe der Sehwinkelvergleichung das wichtige Gesetz:

Die *Tiefe* (scheinbare Ausdehnung in der Blickrichtung) eines und desselben wagrechten Kreises ist umso kleiner, je näher seine Ebene der Augenhöhe liegt, oder: Je näher der Kreis der Augenhöhe, desto mehr geht die Ellipse in eine Doppelstrecke über.

*) 23. (Fig. 21.) Auf welcher Linie muß ein Beobachter marschieren, damit ihm eine gegebene Strecke fortwährend unter demselben Sehwinkel erscheint?

*) 24. Betrachtet *Mondparallelaxe* und *scheinbaren Monddurchmesser* als Sehwinkel. Skizziert den Verlauf einer Mondfinsternis. (Fig. 22.)

VI.

Der Abstand eines Punktes von einer Geraden.

Da ich aus eigener Erfahrung weiß, daß schwache Schüler sich unter diesem Abstande nichts Vernünftiges vorstellen, sobald seine Richtung nicht senk- oder wagrecht ist, auch wenn sie ihn schon hundertmal mit dem Zirkel konstruiert haben, knüpfe ich an Vorstellungen an, die dem Schüler längst vertraut sind, z. B. die Distanzen Tischecke — Wand, Lampe — Decke, Baum — Straßenrand, Schulhaus — Eisenbahnlinie, Aadorf — Rhein — Untersee, Aadorf — Thur. (Fig. 23) Die Schüler finden von selber daß das eigentliche vieldeutige Wort Abstand den *kürzesten* Abstand bedeutet, daß er auf der Geraden senkrecht steht. Zum Vergleich lasse man den Abstand eines Punktes von einer krummen Linie suchen (Kreis, Ellipse, Wellenlinie). Ohne weiteres wird vom Schüler eine Strecke bezeichnet, die im Schnittpunkt mit der Kurve auf der betreffenden Tangente senkrecht steht. Es gibt natürlich mehrere solcher Lote von einem Punkte auf eine krumme Linie; aber das vom Schüler gewählte ist das kürzeste.

La perpendiculaire se pique d'être plus courte que l'oblique.

Wo liegen die Punkte, die von einer gegebenen Geraden gleichen Abstand haben? Zuerst werden die Linien vom Schüler annähernd mit dem Finger bezeichnet (Augenmaß üben!), dann konstruiert. (Straßenränder, Geleise, für Häuser und Bäume ist eine bestimmte Entfernung vom Straßenrand vorgeschrieben.) Sucht einen Punkt auf, dessen Abstände von 2 rechtwinkligen Geraden (Axen) gegeben sind! Die Festlegung eines nicht zu schwierigen Grundstückes oder einer krummen Linie (Profil eines Flusses, einer Schlucht, Teichufer, etc.) durch Koordinaten einiger markanter Punkte wird entweder vor den Augen der Schüler durchgeführt, (Koordinatenaufnahme) oder nur im Plan gezeigt, was für Anfänger das Vorteilhaftere sein wird. (Zeitersparnis).

Wer den Versuch mit dem kürzesten Schatten ausgeführt hat, kann dort in ungezwungener Weise anknüpfen. Auf jeden Fall sollte der Schüler jetzt oder später erfahren, wie man *praktisch* Abstände fällt und mißt. Mit dem beliebten Zirkel macht es nun einmal außerhalb der Schule niemand. Selbst eine noch so primitive *Kreuzscheibe* herstellen und sie benützen — das wird dem Schüler mehr einleuchten als das an und für sich notwendige und verstandesbildende aber zu einseitig gewordene wirklichkeitsfremde Konstruieren im Heft u. auf der Wandtafel.

Schließlich mag noch das Problem gestellt werden: Wo liegen die Punkte, die von einer gegebenen Geraden und einem festen Punkt gleichen Abstand haben? Zuerst werden einige durch Abschätzen der Entfernungen annähernd bestimmt bis der rohe Verlauf der Linie erkennbar ist. Dann erfolgt die mechanische Erzeugung der Parabel mit Dreieck, Schnur und Führungsgeraden (Leitlinie). (Fig. 24)

VII.
Die Gesetze der axialen Symmetrie und ihre Anwendungen.

Symmetrie bedeutet zusammenstimmen, Übereinstimmung.

Die Schüler finden selber Figuren, welche sich in 2 Hälften zerlegen lassen, die in allen Teilen übereinstimmen (Heft, Wandtafel, Türfüllungen, Ornamente, Antlitz).

Bei den einen Figuren ist dies auf eine, bei andern auf mehrere Arten möglich. Die Schüler nennen Beispiele mit nur *einer* (gleichschenkliches Dreieck, Wasserkanne, Fensterbogen, Hängelinie, Fenstervorhänge) und mit *mehreren Symmetrieaxen* (Rechteck, Wandtafel, Heft, Fenster, Ellipse, Quadrat) und zeigen die Symmetrieaxen.

Warum sind symmetrische Figuren so häufig? Infolge der Übereinstimmung der beiden Hälften wirken sie wohltuend auf das Auge und erwecken den Eindruck der Ruhe und Ordnung.

Warum werden große Portale und die Türen in vornehmen Häusern meistens als Doppelflügel ausgeführt? Sind die gewöhnlichen Türen eigentlich symmetrisch? Zeichnet einige euch bekannte Blüten und Blattformen und gebt an, ob und wieviel Symmetrieaxen sie besitzen. Nun soll untersucht werden, auf welchen geometrischen Gesetzen diese Übereinstimmung der beiden Hälften beruht. Die erste Frage wird folgende sein:

Wie entsprechen die geometrischen Elemente (Punkte, Geraden, Winkel) der einen Hälfte denjenigen der andern?

Auf ein Papier tupfe ich einen Tintenklecks A und ziehe durch ihn eine Gerade a, führe um eine beliebige Knifflinie eine *Umwendung* aus und erhalte als Abdruck den symmetr. Gegenpunkt A' und die Gegengerade a'. Aus der Deckung der beiden Felder ergibt sich ohne weiteres: (Fig. 25). Punkt und Gegenpunkt liegen auf einer Senkrechten zur Knifflinie (z. Falz) und sind gleich weit von ihr entfernt. Gerade und Gegengerade schneiden sich auf der Falzkante und bilden mit ihr gleiche Winkel.

Die Falzlinie ist Symmetrieaxe und Mittellot der Strecke A A'. Der Schnittpunkt der beiden Geraden a und a' und überhaupt jeder Punkt der Symmetrieaxe hat von 2 entsprechenden Punkten (A u. A') gleichen Abstand. Ob man diese Sätze rein geometrisch ableiten oder sie etwas allgemeiner formulieren will, bleibe dem Geschmak des einzelnen überlassen. Der Kern der Sache wird davon nicht berührt. Die zweite Frage betrifft die Lage der Symmetrieaxe zu zwei entsprechenden Punkten oder Geraden (in der Hauptsache schon durch die erste Untersuchung beantwortet). Ich falte ein zweites Papier zusammen, stelle durch ein deutliches Doppelloch ein Paar entsprechender Punkte B, B' her und schneide in beliebiger Richtung zwei einander entsprechende Geraden b und b' aus, führe mehrere Schnitte rechtwinklig zur Doppelgeraden (b, b') bis hart zur Symmetrieaxe aus und falte das Papier auseinander. Man liest leicht folgende Sätze als Bestätigung der vorigen Erkenntnisse ab, die etwas allgemeiner gefaßt lauten:

Jeder Punkt der Symmetrieaxe ist von 2 entsprechenden Geraden gleichweit entfernt.

Die Symmetrieaxe halbiert den Winkel zweier entsprechender Geraden und ist das Mittellot der Verbindungsstrecke zweier entsprechender Punkte:

Neu ergibt sich:

Jeder Punkt der Symmetrieaxe ist von zwei entsprechenden Geraden gleich weit entfernt.

Die Formulierung dieser Sätze bereitet den Schülern sprachlich Schwierigkeiten. Natürlich sollen sie nicht auswendig gelernt, sondern gegebenenfalls wieder neu gebildet werden, auch wenn es in unbeholfener Weise geschieht. Auch das betrachte ich als einen Beitrag zur sprachlichen Schulung und Erziehung zu knappem, klarem Ausdruck.

Wie sehr die Behandlung des gleichschenkligen Dreiecks, Kreises, des Umkreises und der anbeschriebenen Kreise etc. durch die Benützung der Symmetrieeigenschaften vereinfacht verden kann, braucht nicht weiter ausgeführt zu werden. Obwohl die Symmetrie schon in ältern Lehrbüchern eingehend besprochen wird, scheint sie mir immer noch nicht gebührend gewürdigt.

Selbstverständlich schließen sich an die Symmetriebetrachtung — sie darf dann noch bedeutend kürzer sein — die Konstruktionen des Mittellotes einer Strecke, des Halbierungspunktes, des Lotes auf eine Gerade, der Winkelhalbierenden an. In diesem Zusammenhang mag auch darauf hingewiesen werden, daß symmetr. Figuren verhältnismäßig leicht zu konstruieren oder von freier Hand zu zeichnen sind. (Vergleicht z. B. Ellipsen mit Spiralen.)

Nur streifen kann ich die ausgedehnte und recht dankbare Anwendung im *Scheerenschnitt* (Schwarz- und Buntpapier; einfache, Reihen- und Sternfaltung).

Noch eine schöne, interessante und dabei sehr elementare *Verwertung der Symmetrie* wird nach meiner Ansicht zu wenig beachtet, sicherlich weniger aus Unkenntnis als aus Mangel an Zeit, deutlicher gesagt infolge der Stoffüberbürdung in Geometrie.

Ich meine die Beziehungen der Symmetrie zum Auftreten *der größten und kleinsten Werte* (Maxima und Minima).

Maxima und Minima sind den Schülern nichts Fremdes. Sie nennen folgende Beispiele:

Physik.

Größter und kleinster Wert der Tagestemperatur, des Luftdruckes (Maximalthermometer, Barograph, Fieberkurve).

Der *Höhenwinkel* der Sonne ist zur Zeit ihrer Kulmination ein *Maximum.*

Die *Tagesdauer* erreicht bei der Sommer- und Wintersonnwende den *größten* resp. *kleinsten Wert.*

Geometrie.

Unter allen Verbindungslinien zwischen 2 Punkten ist die Gerade der kürzeste Weg.

Unter allen Strecken, die man von einem Punkt nach einer Geraden ziehen kann, ist das Lot ein Minimum an Länge.

Von allen Kreissehnen ist der Durchmesser die längste.

Bei der graphischen Darstellung der veränderlichen Größe in den genannten einfachen Beispielen kommt im Allgemeinen der Extremalwert auf die Symmetrieaxe zu liegen.

Die Besprechung kann etwa (nach Behandlung des Dreiecks) mit der Frage eingeleitet werden: Welches unter allen Dreiecken, die in zwei Seiten übereinstimmen, hat den größten Inhalt? (Fig. 26) Dasjenige, bei welchem die betreffenden Seiten einen rechten Winkel bilden. Am fruchtbarsten wird die Behandlung folgender Aufgabe sich erweisen:

Auf derselben Seite einer Geraden sind zwei Punkte A und B gegeben. Es soll ein Punkt X auf der Geraden gefunden werden derart, daß die Summe seiner Entfernungen von den gegebenen ein Minimum werde. (Fig. 27)

XA + XB Minimum.

Lösung: Konstruiere den symmetrischen Gegenpunkt zu einem der beiden etwa zu A und verbinde A' mit B. Der Schnittpunkt mit der Geraden ist der gesuchte Punkt X.

Daß jeder andere Punkt X_1 der Geraden eine größere Abstandsumme besitzt, kann leicht durch die Anwendung des Grundsatzes nachgewiesen werden: Die Summe zweier Dreieckseiten ist größer als die dritte Seite. Man beachte, daß XA und XB mit der Geraden gleiche Winkel bilden. Es folgt hieraus: Unter allen flächengleichen Dreiecken über derselben Basis hat das gleichschenkliche den kleinsten Umfang. Unter allen umfangsgleichen Dreiecken hat das gleichseitige den größten Inhalt (Fig. 28). An einigen Zahlenbeispielen wird man zeigen, daß wirklich symmetrische Figuren in Bezug auf die Fläche vorteilhafter sind u. z. B. die Flächen eines Quadrats und eines ihm umfangsgleichen Rechtecks vergleichen. Warum tritt das symmetrische Trapez als Querschnitt so häufig, das asymmetrische Trapez fast gar nie auf? Das Parallelogramm wird recht selten verwendet; welche Form desselben findet sich gelegentlich in Ornamenten? (Gartenanlagen, Decken, Füllungen).
Symmetrische Figuren vereinigen eben Schönheit mit Zweckmäßigkeit.

Nachdem noch gezeigt worden ist, daß man die Fläche einer Figur mit einspringenden Ecken vergrößern kann ohne den Umfang zu ändern, daß also eine Figur von gegebenem Umfang konvex sein muß, wenn die Fläche ein Maximum sein soll, ist leicht einzusehen: (Fig. 29)

Von allen umfangsgleichen Flächen hat der Kreis den größten Inhalt oder: Unter allen flächengleichen Figuren hat der Kreis den kleinsten Umfang.

Die Figur mit der höchsten Zahl von Symmetrieaxen stellt also in doppelter Hinsicht einen Extremalfall dar. Wie reizvoll solche Vergleiche die etwas trockene Flächenberechnung gestalten und Repetitionsstoff liefern können, soll das folgende Zahlenbeispiel zeigen.

Bei gleichem Umfang u = 6 m betragen die Flächen folgender regulären Figuren:

Dreieck $s = \frac{6}{3} = 2\ \mathrm{m}$

$F = 0{,}433 \cdot 2^2 = 1{,}732\ \mathrm{m}^2 = u^2 \cdot 0{,}048$

Viereck *(Quadrat)* $s = \frac{6}{4} = 1{,}5\ \mathrm{m}$

$F = 1{,}5^2 = 2{,}25\ \mathrm{m}^2 = u^2 \cdot 0{,}0625$

Sechseck $s = \frac{6}{6} = 1\ \mathrm{m}$

$F = 6 \cdot 0{,}433 \cdot 1^2 = 2{,}598\ \mathrm{m}^2 = u^2 \cdot 0{,}072$

Kreis $F = \frac{u^2}{4\pi} = 2{,}87\ \mathrm{m}^2 = u^2 \cdot 0{,}079$

Beachtet, daß die zum Vergleich herangezogenen drei Vielecke die einzigen sind, die sich ohne Lücken zusammenfügen lassen. Kreise würden unvorteilhafte einspringende Bogenlücken ergeben. Hat die Biene mit ihrem Zellensechseck richtig gewählt? (Fig. 29)

Ähnlich zu lösen ist die Schlußaufgabe: (Fig. 30)

Gegeben eine Gerade und beiderseits derselben je ein Punkt A und B. Sucht auf der Geraden einen Punkt X, daß die Differenz seiner Entfernungen von den gegebenen ein Maximum werde. (Konstruiert den Gegenpunkt A' zu A; dann schneidet die Gerade A'B den gesuchten Punkt X auf der gegebenen aus.)

VIII.

Was ist vom Wert der üblichen Konstruktions- und Rechenaufgaben zu halten?

Im alten Ruefli, den unsere Sekundarschule vor 25 Jahren benutzte, gab es sehr wenig Konstruktionsaufgaben, dagegen eine Menge Flächenberechnungen. Baumbergers Lehrbuch der Planimetrie für Mittelschulen (namentlich 1. Klasse Technikum) zeigt das umgekehrte Verhältnis. Das Gublersche Lehrmittel hält zwischen beiden Extremen die Mitte. Die Reformbestrebungen haben, soweit sie mir bekannt sind, die Konstruktionsaufgaben fast ganz ausgemerzt und nur die Berechnungen in praktischer Form beibehalten. Die Ansichten gehen also ziemlich weit auseinander; in *einer* Hinsicht unterscheiden sich also doch die Lehrmittel, was angesichts ihrer sonstigen Einförmigkeit kein Nachteil ist.

Eine gerechte Würdigung des Bildungswertes und des praktischen Nutzens der Konstruktionsaufgaben ist tatsächlich schwierig.

Einerseits muß man zugestehen, daß planimetrische Rätsel— so kann man sie wohl auch nennen - (Verdoppelung des Würfels, Quadratur des Kreises, Probleme des Apollonius, Castillon, Malfatti etc.) die hervorragendsten Mathematiker zu erfolgreichen Untersuchungen angespornt und so die geometrische Forschung entschieden gefördert haben. Es wird kaum bestritten werden können, daß geometrische Sätze erst durch ihre Verwendung in Aufgaben in den sicheren Besitz des Schülers übergeführt werden. Als Mittel zur Selbstbetätigung der Schüler und als Kennzeichen, wieweit der behandelte Stoff selbständig verarbeitet werde, sind sie nach meiner Ansicht unentbehrlich.

Anderseits stehe ich auf Grund meiner Erfahrungen (Klausuren) auf einem sehr kritischen Standpunkt.

Gewiß werden aufgeweckte, mathematisch begabte Knaben immer viel Ansporn und Befriedigung im Lösen dieser Rätsel finden. Wie viel sind es aber? Man mache sich doch keine Illusionen darüber, daß die überwiegende Mehrheit der mäßig begabten mit diesen Aufgaben recht wenig anzufangen weiß, sobald nur eigene selbständige Lösungen gefordert werden, von den schwächsten Köpfen gar nicht zu reden.

Man wird die Ursachen nicht allzuweit suchen müssen.

Das mathematische, insbesondere hier das geometrische Denken umfaßt eben durchaus nicht alle Anlagen des Verstandes, sondern stellt eine bestimmte Richtung desselben dar. Es sei nur an Goethe erinnert, der bei all seiner Vielseitigkeit für Mathematik weder die geringste Anlage noch Neigung besaß. Der Vergleich mit den alten Sprachen drängt sich mir förmlich auf, wenn ich weiter eine Minderschätzung der zu abstrakten, rein logischen Disziplinen konstatiere. Liebig wurde aus der Lateinschule entlassen, weil er doch nie „Befriedigendes leisten würde und zur Not zu einem Apothekergehülfen tauge". Das mahnt uns Lehrer, immer wieder an überlieferte Methoden die kritische Sonde anzusetzen.

Der Durchschnittsschüler sagt sich ferner nicht mit Unrecht: Was fange ich mit diesen „schwierigen" Dingen nach der Schule an? Wozu das eigentlich? Er sagt es natürlich nicht dem Lehrer, aber er denkt so.

Es soll mir nur niemand mit dem Einwand kommen, den Kindern lägen solche nüchterne Nützlichkeitserwägungen fern; sie stünden dem dargebotenen Stoff naiver gegenüber. Seit ich vor 2 Jahren einen Stenographiekurs für Freiwillige der dritten Klasse eingeführt habe, der allerdings gratis erteilt wird, melden sich jeweils sämtliche Drittklässler zur Teilnahme. Die Neuheit des Faches wird ja auch mitwirken; das ausschlaggebende Moment ist aber sicher die praktische Verwendung der erworbenen Kenntnisse. Wieviele einen Gratiskurs in Planimetrie bisheriger Art besuchen würden, möge sich der Leser selbst beantworten.

Ich befürworte also eine starke *Reduktion des Aufgabenstoffes* und benütze diesen Anlaß, auf einige Verfahren hinzuweisen, die einige Vereinfachungen in den gelegentlich schwerfälligen Konstruktionsapparat bringen sollen, wenn ich mich nicht irre.

In fast allen nicht allzuschwierigen Konstruktionsaufgaben tritt ein sog. geometrischer Ort auf. Es ist das die Bahn (Weg, Linie), welche ein Punkt beschreibt wenn er sich nach irgend einem Gesetz bewegt. Der Ausdruck Ort ist eigentlich falsch, denn es handelt sich nicht um einen festen *Punkt*, sondern um eine angebbare *Linie;* Ort bedeutet aber Punkt (vergl. erörtern = Punkt für Punkt durchgehen).

Die für Konstruktionsaufgaben wichtigsten Bahnen sind in der folgenden Übersicht in knapper Fassung zusammengestellt; (1—4) außerdem findet man noch einige als Übungsbeispiele verwendbare geometr. Örter, die nicht eigentliche Hülfsmittel zum Konstruieren darstellen (5—9).

Es bedeuten:

A, B	gegebene feste Punkte.
a, b	gegebene feste Geraden.
P	wandernder, beweglicher Punkt.
(Pa)	Abstand des Punktes P von der Geraden a.

Die römischen Ziffern verweisen auf die Abschnitte, in welchen der betreffende geometrische Ort eingeführt wurde.

Bewegungsgesetz in geometrischer Form	Bahn oder geomet. Ort } v. P.	erwähnt
1. $\overline{PA}$ constant	Kreis mit Zentrum A	III
2. (Pa) constant	Geraden parallel a	VI
3. $\overline{PA} = \overline{PB}$	Symmetrale der Strecken AB	VII
4. (Pa) = (Pb)	Winkelsymmetrale von $(a \times b)$	VII
5. $\sphericalangle$ APB constant	Kreisbogen über AB als Sehne	V
6. Summe $\overline{PA} + \overline{PB}$ const.	Ellipse mit A und B als Brennpunkten	III
7. $\overline{PA} = (Pa)$	Parabel mit A als Brennpunkt	VI
8. Verhält. $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ constant.	Apollonischer Kreis	—
9. Differenz $\overline{PA} - \overline{PB}$ constant	Hyperbel	—

In diesen Bahnen steckt eigentlich der Kern der Planimetrie; viele Einzelbetrachtungen erscheinen hier als Sonderfälle allgemeiner Gesichtspunkte.

Als Anwendung der besprochenen Methode seien noch die Konstruktionen der vierten Proportionale und des geometrischen Mittels angeführt.

Die Proportion

$$a : b = a' : b'$$

wird durch zwei gleichschenklige Dreiecke mit gemeinsamer Spitze dargestellt (Fig. 31).

$\triangle BAA_1$, $a = BA = BA_1$, $a' = BA' = BA_1'$

$\triangle B'A'A_1'$, $b = AA_1$, $b' = A'A_1'$.

Die geometrische Lösung der Proportion

$$a : b = a' : x$$

wird nun leicht zu finden sein, wenn man zuerst die Symmetrieaxe konstruiert.

Das kleinere Dreieck BAA_1 können wir uns in die Ecke A' hineingeschoben denken.

Wird $a = b' = x$, so rückt Punkt A nach A_1'.

Die Proportion lautet nun

$$x : b = a' : x, \quad x^2 = a' \, b \quad \text{(Fig. 32.)}$$

Die Lösung ergibt sich aus der Zeichnung, wobei noch die Bestimmung des Punktes A' durch zwei geometrische Bahnen (Kreis mit Radius a' und Mittellot der Strecke b) zu beachten ist. (Fig. 33.)

Schließlich muß ich noch einmal die Frage aufwerfen: Sind wir mit dem Konstruieren auf dem rechten Wege? Konstruieren bedeutet doch eigentlich aufschichten, zusammensetzen. In unserer papiernen Schule ist daraus ein logisch dürres Aufsuchen irgend eines Punktes oder einer Strecke geworden, dessen Notwendigkeit bis zu einem gewissen Grad durchaus nicht bestritten werden soll; trotzdem müssen wir aus dieser Erstarrung herauszukommen suchen. Viele Wege führen zum Ziel; der Individualität des Lehrers möchte ich am allerwenigsten Fesseln angelegt sehen. Für mathematisch besonders begabte Knaben bieten die Aufgabensammlungen Knacknüsse in Fülle. Wer das Reißbrettzeichnen und überhaupt das genaue schöne Konstruieren nicht fahren lassen will, sei noch besonders auf die hochinteressanten (von mir aus Zeitmangel nie behandelten) Sätze über merkwürdige Punkte und Geraden aufmerksam gemacht, die zu exaktem, feinem Arbeiten von selbst anspornen. (Geraden von Gauß, Euler, Pascal, Monge; Punkte von Gergonne, Brianchon; Kreis von Feuerbach).

Ich glaube aber, daß die Entwicklung in Anlehnung an den ursprünglichen Sinn des Wortes mehr zur Handarbeit tendiert, die selbstverständlich mit geometr. Fragen in engster Verbindung stehen soll. Beispiele finden sich im Abschnitt: Winkel, mehrere. Der Aufbau eines geometrischen Körpers aus Pappe, Ton, Plastilin, Blech etc. darf nicht ganz vernachlässigt werden.

Die Rechenaufgaben, so fleißig zusammengestellt und so gut ausgewählt sie sind, leiden an chronischer Blutarmut.

Warum nicht vom Förster oder Wagner einen Griffzirkel (Meßzange), vom Mechaniker eine Schublehre mit Nonius sich leihen, die interessanten Werkzeuge besprechen, selber messen und auf Grund der selbst bestimmten Maße Flächen- und Volumenberechnungen ausführen? Und wenn der Lehrer nicht im Schlüssel die Resultate der Schüler auf Hundertstel oder gar Tausendstel kontrollieren kann? Gerade recht! Dann kommt wenigstens einige Mal das Schätzen und Überschlagsrechnen zu Ehren und die nach meiner Überzeugung für Lehrer und Schüler gleich langweiligen weil schematischen Flächen- und Volumenberechnungen, verwandeln sich in die kurzweiligsten, von den Schülern mit großem Eifer ausgeführten Arbeiten, wobei Kopf und Hand zusammenwirken.