

Mathematik : Wissenschaft im Wandel der Geschichte

Autor(en): **Breger, Herbert**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Wechselwirkung : Technik Naturwissenschaft Gesellschaft**

Band (Jahr): **4 (1982)**

Heft 15

PDF erstellt am: **20.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-653303>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Herbert Breger

Mathematik:

Wissenschaft im Wandel der Geschichte

Die Mathematik beansprucht eine Wissenschaft zu sein, die – losgelöst von geschichtlicher Entwicklung – endgültige Aussagen macht. Dagegen lassen sich jedoch historische, aber auch wissenschaftstheoretische und innermathematische Argumente anführen.

Kein Philosophie-Studium ist denkbar ohne die Lektüre von Descartes, Kant und Hegel; kein Soziologie-Studium ohne die Lektüre von Marx, Durkheim und Weber. Man wird aber kaum einen Mathematiker finden, der im Laufe seines Studiums Newton, Euler oder Gauß gelesen hätte. Es gibt wohl keine Wissenschaft, die ihrem eigenen Selbstverständnis nach der geschichtlichen Betrachtungsweise ferner stünde als die Mathematik. Sie beansprucht, eine Wissenschaft zu sein, in der die Individualität des Mathematikers und das historisch Spezifische seines Beitrags im fertigen Aufbau der Mathematik verschwinden kann. Unausgesprochen steht oft die Vorstellung dahinter, daß es sozusagen einen Himmel der mathematischen Ideen gibt, der von den Mathematikern schrittweise entdeckt wird, ebenso wie die Seefahrer der frühen Neuzeit Amerika, Indien und Australien entdeckten. Wenn Newtons Auffassung der Differentialrechnung von einem modernen Lehrbuch abweicht, dann sei dies für die Mathematik ebenso belanglos, wie der Irrtum des Kolumbus, der Indien entdeckt zu haben glaubte, für die Geographie belanglos ist.

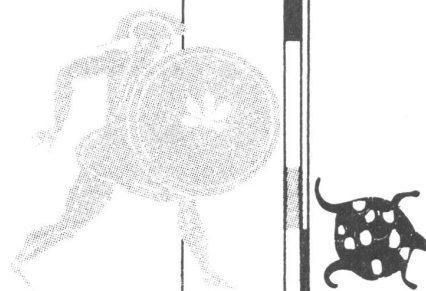
Als wichtiges Element gehört ferner zum mathematischen Selbstverständnis, daß es in der Mathematik keinen (bzw. keinen wirklich ernstzunehmenden) Streit der Schulen wie etwa in Philosophie und Sozialwissenschaften gibt; jeder solche Streit müsse sich vielmehr durch verbindliche Klärung der Voraussetzungen und schlüssige Beweise entscheiden lassen.

Die Mathematik beansprucht ja, klare und eindeutige überhistorisch gültige Kriterien für die Richtigkeit oder Falschheit eines Satzes zu haben. Wie Münchhausen behauptete, sich an seinem eigenen Schopf aus dem Sumpf ziehen zu können, so möchte die Mathematik sich einzig und allein aus ihrer eigenen inneren Systematik und mit ihren eigenen Beweismethoden begründen. Wenn viele Geistes- und Sozialwissenschaftler versuchen, ihre Wissenschaften zu mathematisieren, so ist dies nicht zu-


letzt auf die begriffliche Faszination durch das mathematische Selbstverständnis zurückzuführen. Dabei wird der Autoritätsanspruch der Mathematik in andere Wissenschaften transportiert, um deren innere Probleme scheinbar schlüssig zu entscheiden. Im folgenden sollen drei Einwände gegen das mathematische Selbstverständnis vorgebracht werden, und zwar ein wissenschaftstheoretischer, ein wissenschaftshistorischer und ein im engeren Sinn mathematischer.

Der Begriff der mathematischen Strenge

Grundlegend für jede wissenschaftstheoretische Erörterung über Mathematik ist der Begriff der mathematischen Strenge. Jeder Mathematiker ist überzeugt, daß er zumindest auf seinem Spezialgebiet relativ schnell entscheiden kann, ob ein ihm vorgelegter Beweis streng ist oder nicht. Dennoch ist es schwierig, ja praktisch unmöglich, allgemeine Kriterien aufzustellen. Natürlich, ein strenger Beweis darf nur logisch zulässige Folgerungen aus explizit formulierten Voraussetzungen ziehen; diese Voraussetzungen können entweder früher bewiesene Sätze oder Axiome (deren Widerspruchsfreiheit erwartet wird) sein. Doch die Präzisierung dessen, was logisch zulässig ist, und erst recht der Versuch, die Widerspruchsfreiheit von Axiomensystemen zu beweisen, haben die Mathematik in arge Schwierigkeiten verstrickt (vgl. dazu weiter unten in diesem Artikel). Vollends verwirrend wird die Lage, wenn wir uns – scherzhaft formulierte, aber durchaus ernst gemeinte – Äußerungen prominenter Mathematiker vor Augen führen: Nach Whittaker kann Euklid – der jahrhundertlang als Muster mathematischer Strenge gegolten hatte – wissenschaftlich nicht ernst genommen werden, und nach Russell ist Booles „Laws of Thought“ (1854) das erste Buch, das je über Mathematik geschrieben wurde. Demnach wären also viele Beweise von Descartes und Leibniz, von Newton und Euler, von Lagrange und Gauß nur stümperhafte Versuche, die keinen Anspruch auf mathematische Strenge erheben dürfen? Obwohl doch diese Beweise von Zeitgenossen und vielen späteren Mathematikern als Glanzeleistungen mathematischen Denkens gefeiert worden sind? Die Probleme mit dem Begriff der mathematischen Strenge lassen sich nur lösen, wenn man annimmt, daß dieser Begriff



de la regarder au Soled, la reflexion duquel n'abolit au contraire
 mais quand la goutte noire est en cet endroit on ne voit plus la
 reflexion des fenestres ou des nuées éclairées, mais seule un tressort
 point du soled qui n'a presque point de brillant, alors cette goutte me paroit
 transparente rose de peau claire et ce qui est alentour me paroit plus
 obscur. Si A est la goutte au dessus de la petite bouteille de
 Saxon, le reste de la Comete me paroit moins
 clair et me fait connoître sa grandeur, ce qui est
 surprenant, cest que les autres liqueurs noires ne sont
 point transparentes, cette matiere est gluante car elle se
 despartoit roide noire se touchent et se mélangent en un roc le vif argent



Vous sçavez qu'il y a de ces verres noirs est si grand qu'il coupe tout l'horizon et la reflexion
 des fenestres de la Chambre ou l'on est, on ne s'en apperoit plus, a cause de la
 transparence, j'ay oublié a vous dire que si -2 par -6 est egal a $+2$ par $+6$, cest a
 dire il faut que -2 soit a $+6$ comme $+6$ a -6 ce qui me semble absurde.
 Il y a icy un gentilhomme Saxon nommé Monsieur Tschirnhaus qui est tres
 habile en toutes sciences, et qui est de vos amis, il m'a promis de vous faire
 voir sa machine, ce sera dans 2 ou 3 mois. je suis
 de vous demander des observations Monsieur
 des lecul seule pendant deux mois

Votre tres humble et
 tres obéissant serviteur
 Mariotte

Brief des Physikers Mariotte an Leibniz vom 23.4.1679: „Ich habe vergessen, Ihnen mitzuteilen, daß, wenn -2 mal -6 gleich $+2$ mal $+6$, das heißt 12 ist, sich dann -2 zu $+2$ verhalten muß wie -6 zu $+6$, und das erscheint mir absurd.“ (Handschrift aus der Niedersächsischen Landesbibliothek Hannover)

selbst historischen Wandlungen unterworfen ist: Was von den Mathematikern einer Epoche als strenger Beweis akzeptiert wird, kann in einer anderen Epoche als lückenhafter oder falscher Beweis abgelehnt werden.¹ Werfen wir beispielsweise einen Blick auf die Geschichte der Differentialrechnung!

Newton (und die sich an ihm orientierende Schule englischer Mathematiker im 18. Jahrhundert) führte seine Beweise mit Hilfe der Vorstellung bewegter Punkte. Vom Standpunkt der heutigen Mathematik aus, die nur Beweise mittels des Grenzwert-Begriffs akzeptiert, lag Newtons Mathematik also eine unmathematische Vorstellung, der physikalische Bewegungsbegriff, zugrunde. Leibniz begründete die Differentialrechnung mit Hilfe der These, daß jede Gleichheit eine unendlich kleine Ungleichheit sei. Daß hier der für die Mathematik so wichtige Unterschied zwischen gleich und ungleich tendenziell verwischt wird, ist ausgesprochen schockierend für den heutigen Mathematiker. Tatsächlich wird der heutige Mathematiker dazu neigen, Leibniz mißzuverstehen, indem er wie folgt argumentiert: Nach Leibniz gilt nicht nur die triviale Aussage $x = x$, sondern außerdem auch $x = x + dx$, wobei dx unendlich klein ist. Subtrahiert man nun die beiden Gleichungen, so ergibt sich $dx = 0$; es gibt also gar keine unendlich kleinen Größen, und der Leibnizsche Versuch der Begründung der Differentialrechnung fällt in sich zusammen. Diese Argumentation trifft aber Leibniz' Überlegung nicht, denn Leibniz meint so etwas wie ein dynamisches Gleichheitszeichen (das ebenso die Gleichheit wie die unendlich kleine Ungleichheit aussagen kann), und die angeführte Argumentation setzt das übliche statische Gleichheitszeichen voraus. Der richtige Umgang mit einem solchen dynamischen Gleichheitszeichen mag lange Übung und ein tiefes mathematisches Verständnis erfordern, aber wie jeder Mathematik-Student im ersten Semester weiß, ist auch der richtige Umgang mit dem modernen Grenzwertbegriff nicht gerade im Handumdrehen zu lernen. Jedenfalls wurde Leibniz durch seine Methode zu keinem einzigen Satz geführt, der im Sinne der heutigen Mathematik falsch wäre.

Ein dritter Weg zur Grundlegung der Differentialrechnung wurde von Euler beschritten. Euler erklärte ausdrücklich, daß die Differentiale dx , dy nicht unendlich klein, sondern schlicht und einfach Null seien. Das hinderte ihn aber nicht, Brüche

aus Differentialen (also Ausdrücke der Form $\frac{a}{b}$) zuzulassen und ihnen einen bestimmten Wert zuzuschreiben. Obwohl sich also Euler des gräßlichen Vergehens schuldig gemacht hat, durch Null zu dividieren, wußte er doch seine Methode so zu handhaben, daß seine Ergebnisse im Sinne der heutigen Mathematik richtig sind.

Die Strenge eines Beweises ist mithin nichts Endgültiges, sondern selbst erst Resultat eines längeren historischen Prozesses, und nichts spricht für die Annahme, daß dieser Prozeß im 20. Jahrhundert zum Stillstand gekommen ist. Man geht davon aus, daß die mathematische Strenge in ständigem Wachstum begriffen sei: Wenngleich absolute Strenge nie erreichbar ist, so werden doch die Beweise immer „strenger“. Zwar können für richtig gehaltene Beweise eines Tages doch für lückenhaft und ergänzungsbedürftig erklärt werden, aber das Niveau der Beweisstrenge befindet sich in kontinuierlichem Ansteigen. So ist die angeschlagene Vorstellung des kontinuierlichen Fortschritts der Mathematik, in der es niemals einen Schritt zurück geben kann, auf höherer Ebene doch wieder gerettet. Neuerdings² freilich ist auch diese Vorstellung in Zweifel gezogen worden: Es lassen sich für ein und dasselbe mathematische Gebiet oder Problem (z.B. Konvergenz stetiger Funktionen) unterschiedliche mathematische Theorieansätze entwickeln, deren Grundbegriffe sich wechselseitig ausschließen, die aber dennoch jeweils in sich schlüssig aufgebaut sind. Zu diesen unterschiedlichen Theorien gehören dann auch unterschiedliche Kriterien, wann ein Beweis „streng“ ist.

Auffassungsweisen mathematischer Objekte

Wer je mathematische Texte früherer Jahrhunderte liest, ist irritiert: Die Texte sind vertraut und sind gleichzeitig doch sehr fern; sie scheinen über denselben mathematischen Bereich zu handeln wie ein modernes Lehrbuch und doch von anderen Dingen zu sprechen. Man kann sich angewöhnen, das Gelesene sofort in die Begriffs- und Gedankenwelt der heutigen Mathematik zu übersetzen. Aber wie bei jeder Übersetzung etwas verloren geht, so läßt auch diese Übersetzung gerade das Spezifische der alten mathematischen Texte verschwinden. Das Gefühl der Irritiertheit vermag aber gerade die Erkenntnis der Mathematik früherer Epochen (und damit das Verständnis von

Mathematik überhaupt) zu fördern. Tatsächlich hat sich nämlich die Auffassungsweise mathematischer Sätze und Objekte immer wieder gewandelt. Ein ganz einfaches Beispiel dafür ist der Wandel von der geometrischen zur algebraischen Auffassungsweise: Für die Griechen und in der frühen Neuzeit war nur das wahrhaft mathematisch, was in geometrischer Bezeichnungsweise formuliert war; heute hat dagegen die Algebra (im weitesten Sinne) den Vorrang.

Ein weiteres Beispiel ist das Problem, eine Zahl zu finden, die mit sich selbst multipliziert 2 ergibt.³ Es ist leicht zu beweisen – und schon Aristoteles kannte diesen Beweis –, daß es keinen Bruch $\frac{p}{q}$, wobei p und q ganze Zahlen sind, mit dieser Eigenschaft gibt. Was bedeutet dieser Beweis? Für Aristoteles war es selbstverständlich, daß damit bewiesen ist: Es gibt keine Zahl, deren Produkt mit sich selbst 2 ist. Für den heutigen Mathematiker ist es selbstverständlich, daß der Beweis zeigt, daß $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist. Wer hat recht? Man kann diese Frage offenbar nicht durch einen Beweis zwingend beantworten, vielmehr setzt die Beantwortung eine Entscheidung voraus: die Entscheidung, ob man per Beschluß neue, nur gedachte Objekte einführen will, die die gesuchte Eigenschaft haben und die man auch „Zahlen“ nennt, oder ob man diesen Beschluß für mit dem Wesen der Mathematik (als einer Wissenschaft mit idealem Wirklichkeitsbezug) unvereinbar hält. Bei dieser Entscheidung stoßen also verschiedene Auffassungen vom Wesen der Mathematik und dem Wesen mathematischer Objekte aufeinander. Man kann sagen, daß die moderne Auffassung zweckmäßig ist, aber Zweckmäßigkeitsgründe haben offenbar nicht den Charakter eines zwingenden Beweises.

Als letztes Beispiel seien die unterschiedlichen Auffassungen über die in der Geometrie zulässigen Kurven genannt. Die Antike hatte nur die Kegelschnitte als legitime Untersuchungsobjekte betrachtet, weil nur diese sich mit Zirkel und Lineal – und das hieß: exakt – konstruieren lassen. Descartes erklärte auch solche Konstruktionen für exakt, die mit mehreren aufeinander sich bewegenden Linealen durchgeführt werden konnten; er kam daher dazu, alle algebraischen Kurven in der Geometrie zuzulassen (algebraische Kurven sind Kurven, die sich durch Polynome beschreiben lassen, also z. B. $y^2 = x^3 + 2xy - 5$). Die transzendenten Kurven (z. B. $y = \sin x$, $y = \log x$, $y = a^x$) schloß er dagegen aus der Mathematik aus. Es muß betont werden, daß Descartes durchaus transzendente Kurven kannte und mit ihnen umzugehen wußte. Dennoch gehörten diese Kurven, weil sie nicht exakt konstruiert werden können, seiner Ansicht nach in die Mechanik und nicht in die Mathematik. Wir können heute transzendente Kurven ebensowenig exakt konstruieren wie Descartes, aber wir haben das Descartessche Kriterium der Exaktheit abgeschwächt und fassen transzendente Kurven durchaus als mathematisch legitime Objekte auf.

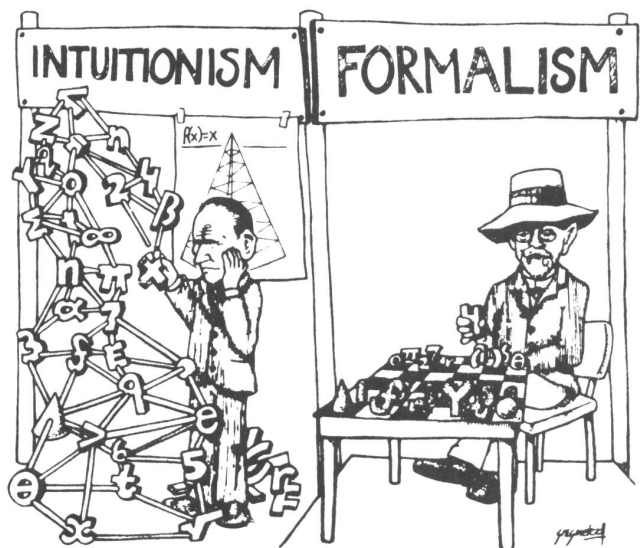
Es gab also historisch unterschiedliche Auffassungen über die Mathematik, über ihre Objekte und über die zulässigen Konstruktionsmethoden. Natürlich kann man die Mathematik früherer Epochen so interpretieren, daß sie mit der heutigen Mathematik vereinbar ist, ja als Spezialfall der heutigen Mathematik erscheint, aber es handelt sich dabei eben doch um ein Zurechtstutzen vom heutigen Standpunkt aus. Der Versuch, die Mathematik früherer Epochen als bloßen Spezialfall der heutigen Mathematik darzustellen, basiert im Grunde auf einem zirkulären Argument: Weil die Mathematik angeblich nur geradlinig Fortschritte macht, sind alle Auffassungsweisen früherer Epochen, die von der heutigen Auffassungsweise abweichen, unwichtig und unreif. Es zählt nur das, was sich in die heutige Mathematik einfügen läßt. Aber eben durch diese Uminterpretation und diese Einfügung entsteht ja allererst das anfangs vorausgesetzte täuschende Bild eines geradlinigen, eindimensionalen mathematischen Fortschritts.

Mathematische Grundlagendiskussion

Der dritte Einwand gegen das mathematische Selbstverständnis ergibt sich aus der Grundlagendiskussion in der Mathematik des 20. Jahrhunderts. Hier hat sich besonders deutlich gezeigt, daß der Mathematik das Kunststück des Münchhausen, sich am eigenen Schopfe aus dem Sumpf zu ziehen, nicht gelingt: Es gibt keine unbestrittene Grundlegung der Mathematik, vielmehr müssen bei der Grundlegung Annahmen gemacht werden, die selber nicht mehr beweisbar und damit im Meinungsstreit sind. Die Grundlagendiskussion hatte sich um 1900 an den Antinomien der Mengenlehre entzündet; schlagend hatte sich an diesen Antinomien gezeigt, daß selbst harmlos scheinende Begriffe (wie z. B. die Menge aller Mengen) widersprüchlich sein können. Die als widersprüchlich erkannten Begriffe zu eliminieren und im übrigen einfach weiterzumachen wäre offenbar nur ein der Mathematik unwürdiges Flickwerk gewesen; zumindest anfangs waren sich alle Teilnehmer der Grundlagendiskussion darin einig, daß eine prinzipielle Lösung gefunden werden muß, die hinreichende Sicherheit vor dem Auftreten neuer Antinomien bietet. Den radikalsten Lösungsvorschlag machten die „intuitionistischen“ Mathematiker: Sie lehnten erstens das Unendliche als fertige, abgeschlossene Gesamtheit, das „Aktual-Unendliche“, ab und erklärten nur das „Potential-Unendliche“, d. h. die Möglichkeit, zu jeder Zahl 1 hinzuzuzählen, für mathematisch zulässig. Zweitens lehnten sie den ehrwürdigen logischen Grundsatz „tertium non datur“ in der Anwendung auf unendliche Mengen ab. Der Grundsatz besagt, daß entweder eine Aussage oder ihre Verneinung richtig ist, eine dritte Möglichkeit gibt es nicht. In einer Gruppe von 100 Personen finde ich entweder niemanden, der Peter heißt, oder es gibt (mindestens) eine Person dieses Namens, tertium non datur. So selbstverständlich dieser Grundsatz für endliche Mengen ist, so wenig selbstverständlich ist er für unendliche Mengen. Während ich mir nämlich bei der Gruppe von 100 Personen nacheinander alle vornehmen kann, um festzustellen, ob jemand Peter heißt, ist ein entsprechendes Verfahren bei unendlichen Mengen nicht möglich. Eine unendliche Menge ist sozusagen ein großes schwarzes Loch, in dem man das Gesuchte vielleicht nicht findet.

Nach Meinung des Intuitionisten Brouwer ist der Grundsatz des tertium non datur logisch gleichwertig mit dem Axiom der Lösbarkeit jedes mathematischen Problems; ein solches Axiom sei aber unzulässig, weil es mathematische Probleme geben könne, die unentscheidbar sind.

Die intuitionistische Position hat den beachtlichen Vorteil,



daß sie große Sicherheit vor dem Auftreten neuer Antinomien bietet, aber sie hat den schwerwiegenden Nachteil, daß große Teile der bisherigen Mathematik gestrichen werden müßten,⁴ weil viele Beweise den Kriterien intuitionistischer Strenge nicht genügen. Insbesondere müßte die Cantorsche Mengenlehre aufgegeben werden; in Übereinstimmung mit der großen Mehrheit der Mathematiker erklärte Hilbert 1926 trotzig: „*Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.*“⁵ Hilbert entwickelte deshalb gegen die Intuitionisten das Programm, die Widerspruchsfreiheit der Mathematik zu beweisen und damit ein für allemal die Grundlagen zu sichern. Auch Hilberts Programm kam nicht ganz ohne außer-mathematische Voraussetzungen aus, vor allem aber hat es seit 1936 keinen nennenswerten Fortschritt mehr erzielt. Hinzu kommt, daß einige überraschende Sätze von Gödel gezeigt haben, daß Hilberts Programm den ursprünglichen Zweck gar nicht erfüllen kann. So befindet sich die Grundlagendiskussion in der heutigen Mathematik in einem recht trüben Zustand: Die Debatte stagniert seit fast einem halben Jahrhundert; die Intuitionisten haben zwar einen konsequenten Lösungsvorschlag, aber die überwältigende Mehrheit der Mathematiker gegen sich; diese Mehrheit behilft sich mit einer pragmatischen Verwendung der Cantorschen Mengenlehre (bzw. modifizierter Spielarten davon) und hofft im übrigen, daß irgendwann doch noch eine akzeptable Lösung einfallen werde. Die Frage nach einer Lösung scheint irgendwo in der inner-mathematischen Arbeitsteilung, in der es Topologen, Zahlentheoretiker, Logiker, Wahrscheinlichkeitstheoretiker, Algebraiker, Funktionalanalytiker usw. gibt, verloren gegangen zu

sein. So sehr diese Arbeitsteilung ihre Berechtigung hat, so verblüffend ist es doch, daß man an fast allen Universitäten ein Studium der „exaktesten aller Wissenschaften“ absolvieren kann, ohne je etwas von den Problemen der Grundlagendebatte gehört zu haben.

Es ist schwer verständlich, wie sich das eingangs geschilderte mathematische Selbstverständnis mit der Tatsache verträgt, daß es in der Mathematik eben doch seit Jahrzehnten einen Streit konkurrierender Schulen gibt, in dem die Mehrheit überdies dem Vorwurf ausgesetzt ist, unexakte Methoden zu verwenden. Eine Entscheidung in diesem Streit ist nicht absehbar – wenn man nicht die Einflußlosigkeit der winzigen kritischen Minderheit als eine faktische Entscheidung nehmen will. Freilich wäre gerade diese Art der Entscheidung eines Problems mit dem mathematischen Selbstverständnis am allerwenigsten vereinbar.

Literatur

- 1 Vgl. James Pierpont: *Mathematical Rigor, Past and Present*. Bulletin of the American Mathematical Society 34 (1928), S. 23–53, sowie Imre Lakatos: *Beweise und Widerlegungen*, Braunschweig/Wiesbaden 1979.
- 2 Detlef Spalt: *Vom Mythos der mathematischen Vernunft*, Darmstadt 1981, hat am Beispiel der gleichmäßigen Konvergenz Argumente für einen mathematischen Pluralismus entwickelt.
- 3 Vgl. David Bloor: *Knowledge and Social Image*, London 1976, S. 108–110.
- 4 Vgl. allerdings Paul Lorenzen: *Methodisches Denken*, Frankfurt a.M. 1974, S. 104–119.
- 5 David Hilbert: *Über das Unendliche*. *Mathematische Annalen*, Bd. 95 (1925), S. 170.

