Zeitschrift: Wechselwirkung : Technik Naturwissenschaft Gesellschaft

Herausgeber: Wechselwirkung

Band: 4 (1982)

Heft: 15

Artikel: Mathematische Modelle

Autor: [s.n.]

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-653241

Dieter Hieke, Wiland Schmale

Mathematische Modelle

Das Verständnis dessen, was mathematische Modellbildung kann und welche Voraussetzungen darin versteckt sind, scheint ein wirksames Mittel zu sein, die Konsequenzen der zunehmenden Benutzung mathematischer Modelle in weiten Bereichen unseres Lebens beurteilen zu können.
Die Autoren des Artikels zeigen an einfachen Beispielen typische Merkmale mathematischer Modellbildung auf.

„Modell" und „mathematisches Modell"

Auf die Frage „Was denkst du bei dem Wort ‚Modell'?" könnte man sich viele verschiedene Antworten vorstellen: das neueste Automodell, ein Fotomodell, das Modell einer Malerin, architektonische Modelle, Modellflugzeuge, Flugzeugmodelle, Atommodelle, Modellkleider . . .
Ein Modell kann versuchen, Wirklichkeit nachzuahmen, also ein Abbild von etwas zu sein; es kann aber auch Prototyp zur Herstellung von Kopien sein.
Ein mathematisches Modell ist eine Sammlung von Definitionen, Gliederungen, Formeln, Rechenverfahren, die Auskunft geben sollen etwa über die Bewegungen einer Kanonenkugel, über die Rentabilität eines Tomatengewächshauses, Belastbarkeit einer Brücke, über das Verhalten eines Maschinensystems, über den Stoffwechsel eines Menschen, über das Verhalten von Wählern, über das Wachstum einer Fischbevölkerung, über die Weltwirtschaft, über die Schadstoffe in der Umgebung eines AKW etc. etc. –
Hier ist das Modell zunächst immer die mathematische Nachahmung von etwas.
Modelle zu bauen übt eine große Faszination aus; man erschafft sich einen Teil der Welt neu in Holz oder in Gedanken. Doch während sich etwa der Modellflugzeugbastler mit dem Modell zufrieden geben muß, zielt die mathematische Modellierung darauf, das Original in Besitz zu nehmen.

Wie die Kanonen mathematisch modellierbar wurden . . .

Ganz frühe Kanonen waren keine sehr zuverlässigen Geräte. Es war schwer vorherzusagen, wo eine abgeschossene Kugel aufschlagen würde. Jede einzelne Kanone hatte ihre Eigenarten, die von den Kanonieren aufgespürt werden mußten, damit sie überhaupt zielen konnten.
Mit dem naturwissenschaftlich geprägten Blick von heute ist es natürlich leicht, sofort einige Fehlerquellen zu lokalisieren: Ungenauigkeit der Schießpulverzusammensetzung und -dosierung und Unkenntnis über deren genauen Effekt; mangelnde Präzision bei Kanone und Kugel; Unkenntnis über das Flugverhalten und besonders die Flugbahn der Geschosse etc. Zu Beginn des Zeitalters der Kanonen dürfte das Abschießen einer Kanonenkugel wohl eher als etwas Geheimnisvolles angesehen worden sein, bei dem man gut daran tut, sich zu bekreuzigen oder mit dem Teufel zu verbünden.
Schon sehr früh wurden abstrakte Betrachtungen über Ballistik aufgestellt. Die im 16. Jahrhundert aufkommende Naturwissenschaft entwickelte dann erste mathematische Modelle für die ideale Flugbahn; und es gelang auch, die Reibung als Ursache für Abweichungen von der idealen Flugbahn zu thematisieren. Aber alle diese Überlegungen hatten keine unmittelbaren Auswirkungen auf die Kanonen„kunst". Denn die Kanonen waren zum Experimentieren für die Wissenschaftler damals ungeeignet. Es hätten auch die Meßgeräte gefehlt, um etwa die Austrittsgeschwindigkeit genau zu ermitteln oder um die notwendigen geometrischen Abmessungen des Rohres zu garantieren.
Trotzdem entwickelte sich – an Kriegen war ja kein Mangel – die Technik des Kanonenbaus weiter. Es dauerte jedoch bis ins 19. Jahrhundert, ehe es die Mittel gab, präzise genormte Maschinen wie z.B. Kanonen und – was die Normierung ja voraussetzt – entsprechende Präzisionsmeßgeräte herzustellen.
Obwohl sich Naturwissenschaftler und Mathematiker bis dahin immer wieder auch mit ballistischen Fragestellungen beschäftigt hatten und insbesondere die Mathematik sich wesentlich weiter entwickelt hatte, gab es erst jetzt die Möglichkeit der Verzahnung zwischen mathematischem Modell der Flugbahn einer Kanonenkugel durch die Luft einerseits und dem Kanonenbau andererseits. Man kann heute die Abschußbedingungen (Winkel, Geschwindigkeit o.ä.), die das mathematische Modell fordert, technisch realisieren und umgekehrt für gegebene Abschußbedingungen die resultierende Geschoßbahn ausreichend genau berechnen.
Die Kanone ist zu einem Massenprodukt geworden, dessen normierte Funktionen in Werbeprospekten angegeben oder geheimgehalten werden können. Sie kann nun von angelernten „Hilfsarbeitern" bedient oder schließlich automatisch betrieben werden.

. . . und wie es Tomaten heute schon sind!

Nicht die Geschichte der Tomaten, sondern der vorläufige Endzustand ihrer fabrikmäßigen Produktion in Gewächshäusern soll uns als fiktives weiteres „Modell" dienen, um Voraussetzungen mathematischer Modellierung zu studieren. Wir behaupten, daß ein Tomatengewächshaus wesentliche Merkmale mit einer modernen Kanone gemein hat. Wir brauchen nur einige Voraussetzungen fabrikmäßiger Tomatenproduktionen aufzulisten:

– Das Vorhaben massenhafter Produktion möglichst gleichartiger Tomaten in einer einzigen zentralen Anlage muß erst einmal akzeptiert sein, durchgesetzt werden und ein Motiv haben.
– Die technischen Möglichkeiten zur Produktion und Kontrolle (Messung) normierter Gewächshäuser müssen hinsichtlich Erde, Klima, Dung, Pflanzen etc. ausreichen. Mit anderen Worten: Die Betrachtung des gesamten Gewächshauses als wiederholbares Experiment mit wohldefinierten Anfangsbedingungen und genau meßbarem Verlauf muß möglich sein.
– Erst damit wird ein Gewächshaus zum möglichen Gegenstand mathematischer Modellierung. Einzelne Meßergebnisse würden mit Hilfe von Gleichungen oder Funktionen reproduziert; andere, noch nicht gemessene Eigenschaften könnten dann vorausberechnet werden und könnten zu einem „Umbau" des Gewächshauses führen. So bestünde ein wechselseitiger Anpassungsprozeß zwischen dem mathematischen Modell und den Prototypen eines Gewächshauses.

Dies könnte in einem einfachen fiktiven Fall so aussehen:

$$\left[\begin{array}{ll}\text{Vitamine} & \text{Tomaten-}\\ \text{Aromastoffe/} & \text{; gew./Pflanze}\\ \text{Gramm} & \end{array}\right]$$

ist eine Funktion von

$$\left[\begin{array}{llll}\text{Temperatur;} & \text{Luftfeuch-} & \text{; Sauerstoff-} & \text{; Dünger ;}\\ & \text{tigkeit} & \text{gehalt} & \\ & \text{... ; Säuregehalt} & \text{; Energie-} & \text{; ...}\\ & \text{des Bodens} & \text{kosten} & \end{array}\right]$$

Man kann in der Regel nur ganz wenige Konstellationen der rechts aufgeführten Parameter in Experimenten ausprobieren. Das mathematische Modell muß für ungetestete Ausgangsbedingungen Prognosen liefern.

Dieses Modell bezieht sich sinnvollerweise auf eine ganze Anbauperiode: Es will zwei Ertragsparameter am Ende einer Periode vorhersagen. Man könnte auch versuchen, den Prozeßablauf während einer Anbauperiode zu modellieren. Ein solches Modell könnte dann vielleicht so aussehen:

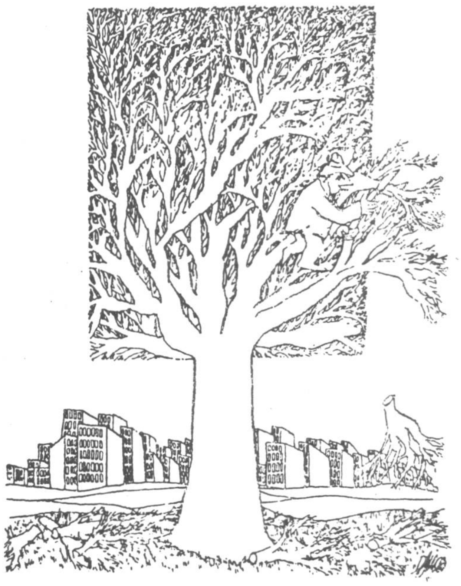
$$\left[\begin{array}{lll}\text{Vitamine} & & \text{Tomatengew./}\\ \text{Aromastoffe/} & ; & \text{Pflanze}\\ \text{Gramm am Tag k} & & \text{am Tag k}\end{array}\right]$$

ist eine Funktion von

$$\left[\begin{array}{lllll}\text{Vitamine} & \text{Tomatengew./} & \text{dasselbe} & \text{Tempera-} & \\ \text{Aromastoffe/} & \text{; Pflanze} & \text{; am Tag} & \text{; tur am} & \text{; ...}\\ \text{Gramm am} & \text{am Tag k-1} & \text{k-2} & \text{Tag} & \\ \text{Tag k-1} & & & \text{k-1} & \end{array}\right]$$

Auch hier bestünde das typische Modellierungsproblem darin, aufgrund möglichst weniger Experimente eine möglichst einfache Funktion zu finden, die die gemessenen Werte ungefähr wiedergibt. Diese benutzt man dann zum Berechnen nicht gemessener Werte. Hat sich ein Modell bewährt, d.h.: haben sich einige Prognosen in neuerlichen Experimenten ungefähr bestätigt, so wird dieses Modell bis auf weiteres benutzt.

Solche Modelle sind sehr gefragt, da man sie zur „Optimierung" verwenden will; das ist die rein mathematisch-technische Suche nach einer hinsichtlich Ertrag oder Gewinn optimalen Festlegung der beeinflußbaren Parameter. Dabei kommt es darauf an, daß das mathematische Modell nicht zu kompliziert ist, da dann der notwendige Rechenaufwand zu groß würde.



Implikationen mathematischer Modellbildung

– Ziel jeder Modellierung ist Beherrschung, Kontrolle, Verwertung. Wofür Modelle entwickelt werden und welche Parameter berücksichtigt werden, wird von Interessen gelenkt. Besonders deutlich wird dies bei Konjunkturmodellen, die je nach politischer Absicht ausfallen, aber auch bei Verhaltensmodellen der mathematischen Psychologie oder mathematischen Modellen der Kriminologie.
– Nur quantitative Aspekte lassen sich mathematisch erfassen. Welche Quantitäten eines Phänomens „abgelesen" werden können, hängt allein von den verfügbaren Meßmethoden oder Meßgeräten und somit vom Zustand der betroffenen Wissenschaften oder der Technik ab. Welche Quantitäten abgelesen werden, wird durch die Interessen der Modellierer und ihrer Auftraggeber bestimmt. Diese Art der Reduzierung von Wirklichkeit wird dadurch ergänzt, daß nur bestimmte Teilbereiche eines Gesamtzusammenhangs isoliert betrachtet werden. So haben für einen Ballistiker Fragen wie „Wer oder was ist der Zielpunkt in meinen Berechnungen?" oder „Warum werden überhaupt Kriege geführt?" keinen direkten Bezug zu seiner Rechenarbeit. Oder andersherum: Ein Wettspiel zwischen Kindern und eine Panzerschlacht kann mathematisch dasselbe sein.
– Jedes Meßverfahren bedeutet einen Eingriff in die zu messenden Zusammenhänge; Wirklichkeit wird so zurechtgeformt, daß überhaupt ein Meßverfahren angewendet werden kann.
  Da die so „erpreßten" Ergebnisse zur Grundlage eines mathematischen Modells gehören, ist zu sehen, daß schon im Ansatz das mathematische Modell kein wechselwirkungsfreies Abbild der Realität ist.
– Man versucht, im mathematischen Modell die gemessenen Zahlenwerte durch einen möglichst einfachen Funktions- oder Gleichungstyp wiederzugeben. Nicht gemessene Werte werden so im wesentlichen durch Interpolation und Extrapolation bestimmt.
– Das Messen der Parameter kann erst dann zu einem Modell

führen, wenn angenommen wird, daß das gemessene Phänomen sich wiederholen kann. Modellieren setzt die Möglichkeit wiederholbarer Experimente mit genau festlegbaren Ausgangswerten der Parameter voraus. Denn das mathematische Modell liefert bei denselben Ausgangswerten immer dieselben Ergebnisse. Auch das raffinierteste Modell ist daher stets ohne geschichtliche Einmaligkeit, also geschichtslos. Dieser Gesichtspunkt ist bei mathematischen Modellen von Maschinen bedeutungslos. Eine Maschine soll ja bei jeder Inbetriebnahme identisch funktionieren. Bei mathematischen Modellen in den Sozialwissenschaften macht aber gerade die Geschichte häufig einen Strich durch die Rechnung.

- Da mathematische Modelle den Charakter der Wiederholbarkeit, Reproduzierbarkeit, Voraussagbarkeit haben, ist in ihnen die Möglichkeit angelegt, die modellierten Abläufe zu automatisieren. Hier können wieder „Kanone und Tomate" als Beispiel dienen. (Die hieran anschließenden Probleme von Automation, Taylorisierung von Kopfarbeit usw. sind schon in anderen WW-Artikeln angesprochen worden.)
- Viele Modelle müssen ohne Experimente aufgestellt werden, da Experimente zu lange dauern würden, zu teuer wären oder an ein und derselben Stelle nie wiederholt werden könnten. In diese Kategorie fallen AKW-Modelle, Modelle der Auswirkungen von Katastrophen, Modelle von noch nicht produzierten, prinzipiell neuen (Groß-)technologien. Alle diese Modelle sind prinzipiell fragwürdig.

Reinbert Behrtens

Zur Kritik mathematischer Modelle

Mathematische Modelle werden in der ökonomischen, politischen und militärischen Planung benutzt. Sie spielen ihre Rolle in den Naturwissenschaften, in der Technik und in der Medizin. Sie sind nicht nur ein Werkzeug, sie sind auch ein Herrschaftsinstrument. Gerade weil die Unzugänglichkeit und vorgebliche Objektivität der Mathematik dieses Instrument gegen Kritik abschirmt, ist es wichtig, Konzeptionen zur Einschätzung der Funktion und Angemessenheit mathematischer Modelle zu entwickeln. Wir wollen an dieser Stelle einige Hinweise geben.

Man kann die Kritik auf drei verschiedenen Ebenen ansetzen. Die allgemeinste wäre die Ablehnung mathematischer Rationalität überhaupt. Mathematik, so lautet in etwa das Argument, ist eindimensionales Denken, ein Mittel für Herrschaft und Manipulation, entsprungen der Logik des Warentausches und der kapitalistischen Gesellschaft. Man kann dieses Argument historisch und philosophisch ausarbeiten; dazu haben Max Weber, Lukacs und Sohn-Rethel Ansätze geliefert.

Wichtiger in unserem Zusammenhang ist die Frage, auf welche Weise denn Herrschaftsinteressen in die Mathematisierung eingehen und welches die Interessen in Einzelfällen sind. Dies wäre die zweite Ebene der Kritik. Ein mathematisches Modell bildet ein Stück Wirklichkeit in mathematischen Begriffen ab. Innerhalb der Mathematik kann gerechnet oder geschlußfolgert werden, die Ergebnisse werden dann wieder in die Wirklichkeit bzw. in eine umgangssprachliche Formulierung übertragen. Natürlich gibt es keine direkte Beziehung zwischen Mathematik und „Wirklichkeit", das, was abgebildet wird, ist immer schon vorstrukturiert. Die erste Frage nach den dahinterliegenden Interessen braucht sich um die Mathematik gar nicht zu kümmern: In der Vorstrukturierung oder in der Anwendung sind sie schon sichtbar. Wenn z.B. der zeitliche Einsatz und die Routen der Milchwagen einer Großmolkerei optimiert werden sollen, dann sind die ökonomischen Ziele in der Vorstrukturierung schon klar. Die Orte der Lieferanten, der Abnehmer und der Molkerei, die Verkehrswege, das Fassungsvermögen der Tanks müssen einbezogen werden, nicht jedoch der Wohnort des Milchwagenfahrers, der sonst immer zum Tee bei seiner Frau haltgemacht hat. Oder wenn ein Ministerium drei statistische Studien zum gleichen Thema bestellt, zwei davon unter Verschluß hält und die dritte veröffentlicht, dann zeigt die Verwendung deutlich genug, wo die Interessen hier liegen.

Näher an die Mathematik des Modells kommt eine zweite Frage. Jedes mathematische Modell idealisiert die (vorstrukturierte) Wirklichkeit. Wir müssen fragen, was bei der Idealisierung herausfällt. Nehmen wir an, der Milchwagenfahrplan sei Teil eines Programms zur Verbindung von Humanisierung und Rationalisierung. Dann wäre bei der Vorstrukturierung genau zu prüfen, was als „Humanvariable" ins Modell genommen wird und was nicht. Beim Bau des Modells kommen aber weitere Idealisierungen hinzu. Es ist zum Beispiel naheliegend, daß das Problem einer optimalen Streckenführung und eines optimalen Fahr- und Lieferplans zugleich behandelt werden. Dann ist die Streckenführung abhängig vom Weg und von der Zeit. Die als „Humanfaktor" eingebaute Teepause muß dann zeitlich festgelegt werden. Daß der Fahrer mal das Bedürfnis hat, etwas länger mit seiner Frau zu reden, weil er sich vielleicht am Vorabend mit ihr gestritten hat, kann nicht berücksichtigt werden. Das mathematische Modell müßte mit variablen Zeiten arbeiten, die Mathematik würde zu kompliziert. Dann kommt die Frage, ob Idealisierungen bei der Anwendung des Modells wieder korrigiert werden können. Unser Milchwagenfahrer hat jetzt zwar seine Teepause, aber die optimale Streckenführung hat alle Abkürzungen berücksichtigt, mit denen er hätte Zeit schinden können, er muß den Tee nach Fahrplan trinken.

Unser Beispiel zeigt einen Aspekt, den wir noch nicht berücksichtigt haben. Das mathematische Modell wird in die Wirklichkeit übertragen, es strukturiert, wenn angewandt, die Wirklichkeit. Das bedeutet immer eine Normierung. Wenn Schrauben genormt sind und Fahrpläne tatsächlich eingehal-