

**Zeitschrift:** Wasser Energie Luft = Eau énergie air = Acqua energia aria  
**Herausgeber:** Schweizerischer Wasserwirtschaftsverband  
**Band:** 80 (1988)  
**Heft:** 3-4

**Artikel:** Grundwassерmodellierung  
**Autor:** Stauffer, Fritz  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-940706>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 10.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

*Programmsystem zur  
Grundwassermodellierung  
nach geostatistischen Gesichtspunkten*

Fritz Stauffer

*Warum geostatistische Methoden in der  
Grundwassermodellierung?*

Grundwassermodelle sind ein wertvolles Hilfsmittel für die Beurteilung von Eingriffen ins Grundwasser sowie für die optimale Bewirtschaftung von Grundwasservorkommen. Die mathematischen Lösungen solcher Grundwassermodele (z.B. nach der Methode der finiten Elemente) befriedigen im allgemeinen. Ein Grundwassermode ist aber so gut oder so schlecht wie die Qualität der Parameter und Randbedingungen, die eingegeben werden. Einen wichtigen Parameter stellt die Transmissivität des Grundwasserleiters dar. Als Resultat von Kleinpumpversuchen ist die Transmissivität häufig in einer Reihe von Sondierbohrungen bekannt. Diese Werte sind dann Ausgangspunkt für die Bestimmung der Parameter im Modell. Wie der Wert der Transmissivität von Ort zu Ort schwanken kann, zeigt Bild 1. Die dargestellten Daten hat Kempf [1975] für den Grundwasserleiter Lindenstaldenzelg erhoben. Die Schwankungen in den Messwerten stellen keinesfalls nur die Unsicherheit in der Bestimmungsmethode dar. Sie sind vielmehr Ausdruck einer regionalen Variabilität der Transmissivität. Wie ausgedehnte Untersuchungen [Gelhar, 1986] zeigen, weist die Variabilität im Grundwasser häufig ein stochastisches Verhalten auf. Eine Besonderheit liegt zudem darin, dass die Messwerte in der Regel nicht unabhängig sind, sondern vielmehr eine räumliche Korrelationsstruktur aufweisen. Wie sollen nun die Parameter ermittelt werden, die im Grundwassermode einzuführen sind? Im einzelnen geht es darum, die Werte der Transmissivität z.B. in den einzelnen finiten Elementen anzugeben. In den vorliegenden Ausführungen wird ein Programmsystem vorgestellt, das erlaubt, die Parameter nach geostatistischen Gesichtspunkten zu bestimmen. Das Programmsystem gestattet zudem die optimale Bestimmung der Transmissivitäten unter Berücksichtigung von Messungen des Grundwasserstands bzw. der piezometrischen Höhe.

*Programmsystem für Grundwasser-  
modellierung und Parameteroptimierung*

Bild 4 zeigt die wichtigsten Elemente des Programmsystems. Im Zentrum steht das eigentliche Grundwassermode (Programm SOFIAK). Dieses regionale Modell be-

Bild 1. Grundwasserleiter Lindenstaldenzelg (Teil) mit Grundwasserständen (Periode 1974/1975, in m) und Messstellen; schwarze Säulen: Transmissivitäten in  $\text{m}^2/\text{s}$ ; L: Lindmühlequellen.

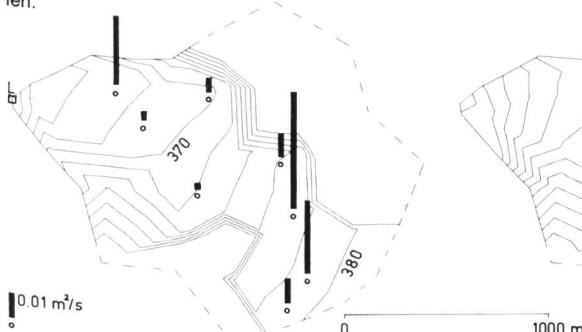


Bild 2. Berechnete Grundwasserstände (in m); Variante Kriging der Transmissivitäten.

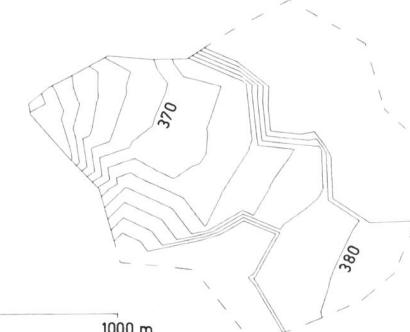
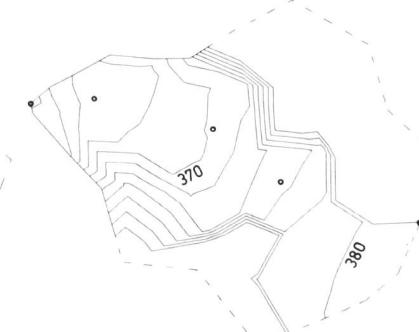


Bild 3. Berechnete Grundwasserstände (in m); Variante Optimierung der Transmissivitäten nach der «Pilot Point»-Methode; Kreise: «Pilot»-Punkte.



ruht auf der Methode der finiten Elemente. Zur statistischen Auswertung vorhandener Messwerte (Transmissivitäten, Grundwasserstände) wird das Variogramm der betreffenden Messgröße mit Hilfe des Programms VAR der betreffenden Messgröße erstellt. Ausgehend von den Messdaten erlaubt die Kriging-Methode (Programm KRIG) die Bestimmung der Transmissivitäten in den finiten Elementen sowie der Grundwasserstände in den Knotenpunkten. Eine automatische Optimierung der Transmissivitäten in den finiten Elementen unter Benutzung von Messungen des Grundwasserstands kann mit Berücksichtigung der gemessenen Transmissivitätswerte (Programm SOK) oder auch ohne eine solche (Programm SOPT) erfolgen. Fette Verbindungen zwischen den Kästen bedeuten, dass für die betreffenden Programme mit demselben Datenfile gearbeitet wird. Pfeile deuten auf einen vorgesehenen Datentransfer hin. Alle Programme sind interaktiv formuliert und laufen unter dem Betriebssystem VMS V4.5 auf dem Computersystem VAX-8650. Im folgenden wird näher auf die einzelnen Elemente des Programmsystems eingegangen. Für eine detaillierte Beschreibung sei auf Stauffer [1987] verwiesen.

*Regionales, ebenes Grundwassermode*

Das Grundwassermode gestattet die Berechnung von instationären, ebenen, regionalen Strömungen. Grundwasserströmungen können dann als ebene Strömungen behandelt werden, wenn die horizontalen Durchfluskomponenten wesentlich wichtiger sind als die vertikalen. Dies ist bei ausgedehnten Grundwasserleitern häufig der Fall. Das mathematische Modell beruht auf der Anwendung des Gesetzes von Darcy sowie der Massenerhaltungsbedingung. Es wird dabei angenommen, dass sich der Grundwasserleiter in den horizontalen Richtungen isotrop verhält. Die Integration der Grundgleichungen beruht auf der Methode der finiten Elemente unter Benutzung von Dreieckselementen. Diese haben den gesamten Lösungsbereich abzudecken. Die Ecken der Elemente bilden die Knotenpunkte. In allen finiten Elementen ist die Transmissivität, der Speicherkoefizient und die Anreicherungsrate pro Flächeneinheit anzugeben. Als Randbedingungen sind vorgeschriebene Werte des Grundwasserstandes sowie vorgeschriebene Durchflüsse durch den Rand anzugeben. Grundwasserfassungen bzw. Anreicherungsbrunnen können bei den Knotenpunkten mitberücksichtigt werden.

*Das Variogramm,  
ein Hilfsmittel zur Untersuchung  
des geostatistischen Verhaltens*

Das Variogramm einer untersuchten Größe (Transmissivität oder Grundwasserstand) ist ein Hilfsmittel, das Auskunft

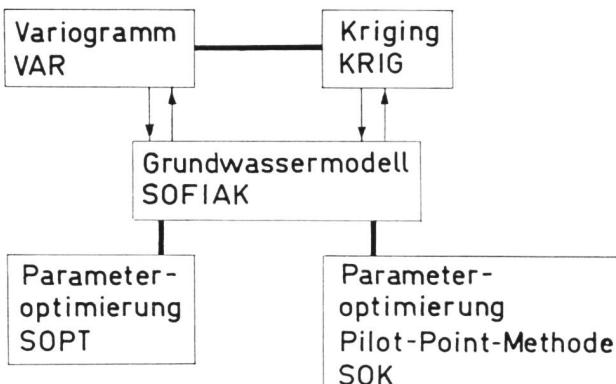


Bild 4. Programmsystem für Grundwassermodellierung; interaktiv auf Computersystem VAX-8650.

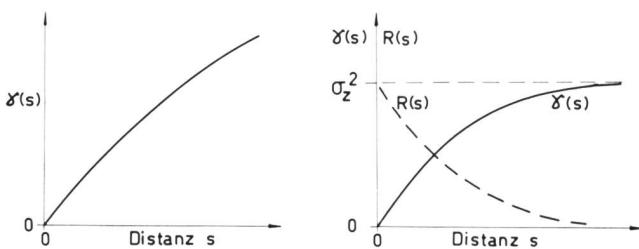


Bild 5. Schema eines Variogramms.  $\sigma_z^2$ : Varianz;  $R(s)$ : Kovarianz.

über deren geostatistisches Verhalten geben kann. Im Bild 5 ist das Variogramm schematisch dargestellt. Die Funktion  $\gamma$  stellt dabei das mittlere quadratische Inkrement der untersuchten Grösse für zwei beliebige Punkte mit der Distanz  $s$  dar. Die Funktion stellt also eine Varianz in Funktion des zunehmenden Abstandes dar. Sie ist daher ein Mass für die örtliche Variabilität der untersuchten Grösse. Im Grenzfall einer homogenen Verteilung der Grösse (konstanter Wert) ist  $\gamma$  für alle Distanzen gleich null. Umgekehrt nimmt bei zunehmender Variabilität die Funktion  $\gamma$  zu. Für kleine Distanzen ist  $\gamma$  in der Regel kleiner als für grössere Abstände. Dies bedeutet, dass nahe Punkte stärker miteinander korreliert sind als weiter entfernte. Das Variogramm gibt also auch Einblick in das Korrelationsverhalten der untersuchten Grösse. Zu Bild 5 ist zu bemerken, dass die Funktion  $\gamma$  als Spezialfall auch begrenzt sein kann und für grosse Distanzen asymptotisch einen konstanten Wert erreichen kann. Die praktische Bestimmung des Variogramms für eine Reihe von Messpunkten erfolgt für verschiedene Klassen von Abständen der Messpunkte durch paarweise Kombination der Messwerte innerhalb der Klasse. Es wird hier ein richtungsunabhängiges Verhalten vorausgesetzt. Ausgehend von den Werten für die Transmissivität gemäss Bild 1 ist in Bild 6 als Beispiel das Variogramm für den Logarithmus der Transmissivität dargestellt. Der Logarithmus der Grösse wurde deshalb gewählt, weil Transmissivitäten in der Regel statistisch lognormal verteilt sind. Ebenfalls eingezeichnet ist in Bild 6 ein passendes theoretisches Variogramm für mittlere Abstände nach einem exponentiellen Ansatz. Die Werte zeigen eine grosse Streuung, weil das Variogramm für eine kleine Anzahl von Messpunkten schlecht zu bestimmen ist. Analog zur Varianz in der klassischen Statistik ist die Unsicherheit für einen kleinen Probenumfang gross. Für eine kleine Anzahl von Messungen gelingt deshalb nur eine grobe Schätzung des Variogramms. Dass die Werte für grosse Distanzen zurückgehen, liegt einerseits in der kleinen Zahl von Wertepaaren in den betreffenden Klassen, andererseits in der Zufälligkeit der Anordnung der Messdaten.

### Kriging, Interpolation nach geostatistischen Gesichtspunkten

Kriging [de Marsily, 1984] ist eine Methode zur räumlichen Interpolation einer Grösse nach geostatistischen Gesichtspunkten. Der Ausdruck Kriging geht auf den Geologen D. G. Krige zurück, der 1951 eine statistische Methode zur Ermittlung von Schätzwerten in Minen entwickelte. Ausgehend von den Daten der Transmissivität oder des Grundwasserstandes an diskreten Messstellen erlaubt die Kriging-Methode die Bestimmung der Werte in den finiten Elementen bzw. an den Knotenpunkten. Ausgangsdaten sind die Messpunkte mit Koordinaten, Messwert sowie Varianz. Weiter wird das theoretische Variogramm der betrachteten Grösse benötigt. Das Variogramm wird entweder aus den vorhandenen Messdaten selbst ermittelt, oder aus der Auswertung anderer, ähnlich gelagerter Grundwasserleiter übernommen. Die Kriging-Prozedur erlaubt die Bestimmung eines Schätzwertes an einer beliebigen Stelle oder eines geschätzten Mittelwertes über eine Fläche (z.B. finites Element). Alle Messwerte tragen grundsätzlich zum Schätzwert bei, jedoch im allgemeinen Fall mit unterschiedlichem Gewicht. Gefordert wird eine minimale Varianz für den Schätzwert unter der Nebenbedingung, dass die Summe der Kriging-Gewichte gleich eins ist. Die Forderung führt auf ein lineares Gleichungssystem für die Bestimmung der Kriging-Gewichte. Kriging erlaubt außerdem eine Angabe der Varianz und damit der Güte des Schätzwerts. In Bild 2 ist das Resultat einer Modellrechnung für den Grundwasserleiter Lindenstaldenzig dargestellt, bei der die Transmissivitätswerte in den finiten Elementen auf der Grundlage der Messdaten gemäss Bild 1 durch das Kriging-Verfahren ermittelt wurden.

### Automatische Optimierung der Transmissivitäten

Die automatische Optimierung der Transmissivitäten ist die Lösung des sogenannten inversen Problems, d.h. der Bestimmung von Transmissivitäten bei bekannten Grundwasserständen. Ausgangspunkt sind die Messwerte des Grundwasserstandes. Die Optimierungsmethode bestimmt die Transmissivitätswerte in den einzelnen finiten Elementen. Sie beruht auf dem oben beschriebenen Grundwassermodell, wobei man sich auf stationäre Strömungen beschränkt. Zielgrösse ist das Minimum der Summe der gewichteten Quadrate der Abweichungen zwischen gerechneten und gemessenen Grundwasserständen. Die Gewichte werden dabei indirekt proportional zur Varianz des betreffenden Werts angesetzt. Gemessene Transmissivitätswerte werden in der Prozedur nicht berücksichtigt. Sie können allenfalls zur Kontrolle herangezogen werden. Die Optimierung erfolgt iterativ unter Anwendung der «Adjoint State»-Methode [Neuman, 1980] sowie der Methode der konjugierten Gradienten. Die Prozedur ist im Programm SOPT realisiert. Es muss an dieser Stelle auf die Problematik der Parameteroptimierung hingewiesen werden.

### Problematik der Parameteroptimierung

Eine eindeutige Lösung des inversen Problems ist nicht immer möglich. Ein Beispiel dafür ist ein Grundwasserleiter, bei dem zwar viele Messungen des Grundwasserstandes einschliesslich der Verhältnisse am Rand vorliegen, jedoch keine Angaben über die Zufluss- und Anreicherungsverhältnisse. Das Ergebnis ist mehrdeutig. Beliebig viele Transmissivitätsverteilungen erfüllen die Bedingungen des mathematischen Modells. Das Problem ist schlecht gestellt.

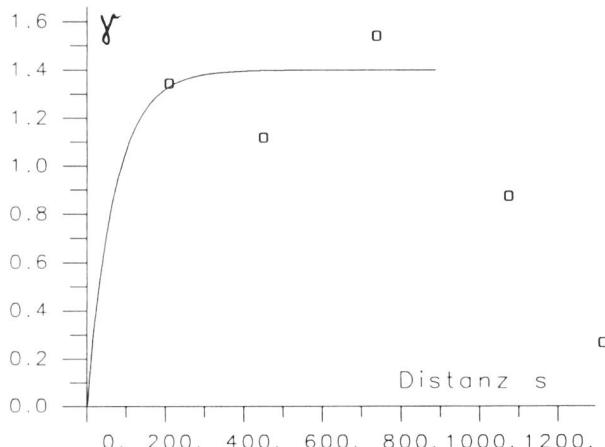


Bild 6. Variogramm des Logarithmus der Transmissivitäten; Kreise: Daten Lindenstaldenzelg; ausgezogen: theoretisches exponentielles Variogramm.

Das Beispiel entspricht dem trivialen Fall des eindimensionalen Darcy-Experiments, bei dem zwar genaue Messungen des Drucks, aber keine Durchflussmessungen durchgeführt wurden! Die Situation verbessert sich, wenn zusätzlich Anreicherungsraten und/oder Zu- bzw. Wegflüsse bekannt sind. Je nach dem Grad dieser Angaben (wenig bis genügend) steigt auch die Bestimmbarkeit der Transmissivitäten. Aus der unbestimmbaren Situation wird eine schlecht bestimmbare oder, bei günstigen Verhältnissen, ein gut bestimmbare. Aus diesem Grund werden immer wieder unbefriedigende Ergebnisse bei der inversen Bestimmung der Transmissivitäten erhalten. Ein weiterer Grund liegt darin, dass die Grundwasserstände wenig empfindlich auf Änderungen in den Transmissivitätswerten reagieren. Eine deutliche Verbesserung der Lage wird dadurch erzielt, dass die Werte von gemessenen Transmissivitäten in das Bestimmungsverfahren miteinbezogen werden. Für den Grundwasserleiter Lindenstaldenzelg wurden mit dem oben beschriebenen Optimierungsverfahren befriedigende Resultate erzielt. Bei diesem Grundwasserleiter tritt praktisch der gesamte Grundwasserstrom in einer Gruppe von Quellen (siehe Bild 1) zutage, über deren Ergiebigkeit langjährige Messungen vorliegen [Kempf, 1975]. Damit ist der Durchfluss durch den Rand des Gebietes recht gut bekannt, was sich im Optimierungsverfahren günstig auswirkt.

### Optimierung der Transmissivitäten nach dem «Pilot Point»-Verfahren

Das «Pilot Point»-Verfahren [de Marsily, 1984] erlaubt die Bestimmung der Transmissivitäten unter Berücksichtigung gemessener Werte der Transmissivität sowie des Grundwasserstands nach geostatistischen Gesichtspunkten. Die Idee besteht darin, dass eine Anzahl von «Pilot»-Punkten zwischen die Messstellen gestreut werden, bei welchen die (lokale) Transmissivität optimiert wird. Die Transmissivitäten in den finiten Elementen werden bei jedem Optimierungsschritt durch Kriging aufgrund der Transmissivitäten in den Messpunkten sowie an den «Pilot»-Punkten neu bestimmt. Die Lage der «Pilot»-Punkte wird man dort wählen, wo wenig Messpunkte vorhanden sind. Im übrigen ist die Zielgröße wiederum das Minimum der Summe der gewichteten Quadrate der Abweichungen zwischen gerechneten und gemessenen (bzw. interpolierten) Grundwasserständen. Die Prozedur ist für stationäre Strömungen im Programm SOK realisiert. Die Anwendung des «Pilot Point»-Verfahrens auf den Grundwasserleiter Lindenstaldenzelg ist in Bild 3 zusammen mit der Lage der gewählten «Pilot»-Punkte gezeigt. Der Abschlussfehler, der erreicht wird, ist abhängig von der Anzahl und der Lage der «Pilot»-Punkte.

Wenn die Zahl erhöht wird, kann eine bessere Übereinstimmung erreicht werden. Gleichzeitig sinkt aber die Bedeutung der Messwerte im Optimierungsverfahren.

### Zusammenfassung

Es wird ein Programmsystem für die GrundwassermodeLLierung vorgestellt, das erlaubt, geostatistische Gesichtspunkte bei der Bestimmung der Transmissivitäten im Modell miteinzubeziehen. Im Zentrum steht ein regionales GrundwassermodeLL auf der Grundlage der Methode der finiten Elemente. Zur geostatistischen Analyse vorhandener Messdaten (Transmissivitäten, Grundwasserstände) an diskreten Messstellen dient das Variogramm. Die Kriging-Methode erlaubt die Bestimmung der Transmissivitätswerte in den finiten Elementen sowie der Grundwasserstände in den Knotenpunkten auf der Grundlage der Messdaten. Eine automatische Optimierung der Transmissivitätswerte in den finiten Elementen unter Benutzung von Messungen des Grundwasserstands (Parameteroptimierung) kann mit Berücksichtigung der gemessenen Transmissivitätswerte («Pilot Point»-Methode) oder auch ohne eine solche erfolgen. Es wird dabei auf die Problematik der Parameteroptimierung eingegangen.

### Literatur

de Marsily G.: Spatial variability of properties in porous media: A stochastic approach. In: Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media, NATO ASI Series E Nr. 82, 721–769, 1984.

Gelhar L. W.: Stochastic subsurface hydrology from theory to applications. Water Res. Res. 22 (9) 135S–145S, 1986.

Kempf T.: Grundwasseruntersuchungen in der Lindenstaldenzelg. Bericht Geologisches Büro H. Jäckli (unveröffentlicht), Zürich, 1975.

Neuman S. P.: A statistical approach to the inverse problem of aquifer hydrology, 3. Improved solution method and added perspective. Water Res. Res. 16 (2) 331–346, 1980.

Stauffer F.: GrundwassermodeLLierung unter Anwendung geostatistischer Methoden. Bericht R 25–87, IHW ETH Zürich, Mai 1987.

Adresse des Verfassers: Fritz Stauffer, Institut für Hydromechanik und Wasserwirtschaft, ETH Hönggerberg, CH-8093 Zürich.

### Drainagefilter

#### für das Seewasserwerk Prieuré der Städtischen Werke Genf

Die städtischen Wasserwerke von Genf erweitern das vor 28 Jahren erstellte Seewasserwerk Prieuré. Die Nominalleistung der Anlage von 10800 m<sup>3</sup>/h wird beibehalten. Erweitert wird das Aufbereitungsverfahren gemäß dem von Sulzer entwickelten «Bieler-Modell», nach dem in der Schweiz bereits 18 Seewasserwerke gebaut bzw. umgebaut wurden. Die verfahrenstechnische Erweiterung wird in 2 Etappen ausgeführt und enthält nach der Modellvorstellung:

- Vorchlorierung evtl. -ozonisierung
- Flockung

1. Drainagerohre
2. SpülLuft
3. Spülwasser bzw. Filtrat
4. Verteilschicht
5. Filtermassen
6. Schlammwasserklappe

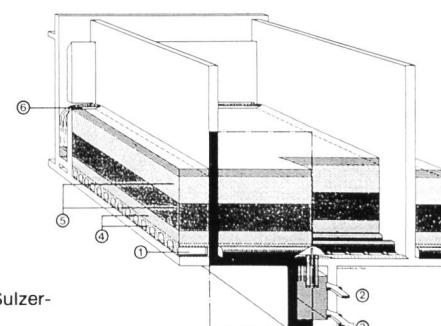


Bild 1. Aufbau der Sulzer-Drainagefilter