Zeitschrift: Wasser Energie Luft = Eau énergie air = Acqua energia aria
Herausgeber: Schweizerischer Wasserwirtschaftsverband
Band: 76 (1984)
Heft: 10

Artikel: Heisenbergs Dissertation zur Turbulenz
Autor: Gyr, Albert
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-941230

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Heisenbergs Dissertation zur Turbulenz

(60 Jahre darnach)

Albert Gyr

Einleitung

Werner Carl Heisenberg reichte seine Inaugural-Dissertation am 10. Juli 1923 an der philosophischen Fakultät II der Ludwig-Maximilian-Universität München ein. Sie war betitelt: *«Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen».* Dieser Titel ist überraschend, ist doch Heisenbergs Name untrennbar mit der Quantenmechanik verbunden, im speziellen mit der Unschärfe-Relation, deren philosophischer Inhalt das physikalische Weltbild unserer Zeit ganz wesentlich verändert hat.

Um diese Dissertation in sein Lebenswerk einordnen zu können, haben wir uns einige Lebensdaten in Erinnerung zu rufen. Werner Heisenberg wurde am 5. Dezember 1901 geboren, 1920 bestand er die Reifeprüfung, und schon zwei Jahre darnach reichte er seine Dissertation ein. Er bewältigte sein Studium nicht nur in kürzester Zeit in München, sondern verbrachte davon ein halbes Jahr in Göttingen, wo er die Physikvorlesungen von *Born* und *Franck* besuchte, Mathematik bei *Hilbert* und *Courant* hörte und Strömungsmechanik bei *Ludwig Prandtl.* Berücksichtigt man die Interessen seines Hauptlehrers, *Arnold Sommerfeld* für Kontinuumsmechanik, so wird das Thema seiner Doktorarbeit schon viel verständlicher. Zudem war *Wien* sein Lehrer in experimenteller Physik, dessen Buch (1900) das Wissen der Zeit zur Strömungsmechanik zusammenfasst.

Dennoch, viele seiner Kollegen hielten das Gebiet der Hydromechanik für überholt; zu verlockend waren die Möglichkeiten, Aussagen zu machen über die Grundstrukturen der Welt und über die Möglichkeiten des Menschen, diese Strukturen zu erkennen. So schrieb *Wolfgang Pauli* seinem Freund Heisenberg wohl ironisch, als dieser 1933 den Nobelpreis rückwirkend für 1932 verliehen bekam: «Der Vergleich mit früheren Begründungen (namentlich der an *Einstein*) und die Durchsicht der Statuten der Nobelstiftung lassen es mich als sicher annehmen, dass Du den Preis für Deine berühmte und bis heute unwiderlegte hydrodynamische Dissertation bekommen hast, denn diese hat ja den unmittelbarsten Zusammenhang mit physikalischen Experimenten, auf die die Nobelstiftung einen so grossen Wert legt.»

60 Jahre darnach sind die Fortschritte der Quantenmechanik bereits Geschichte, das Problem der turbulenten Strömung, nach *Feinmann* vielleicht das letzte grosse Problem der klassischen Mechanik, wartet aber immer noch auf eine geschlossene theoretische Beschreibung. Nicht zuletzt deshalb, weil die Apparaturen, die es braucht, um die Turbulenz experimentell genügend detailliert anzugehen, ausserhalb der finanziellen Möglichkeiten der Strömungsmechaniker liegen, im Gegensatz zum Aufwand, den heute ein Forscher auf dem Gebiet der Elementarteilchen betreiben kann. Der von *Pauli* angesprochene experimentelle Zugang ist demnach für die Kernphysik, nicht aber für die Strömungsmechanik im gewünschten Ausmass gegeben.

Was aber waren die Vorstellungen, die Heisenberg entwarf? Man findet sie in den Annalen der Physik (*Heisenberg,* 1924), wo seine Dissertation veröffentlicht ist; seine Originalarbeit wurde aber nie gedruckt, so dass auf Anfrage hin die Universität München eine Kopie auslieh, deren Formelsätze alle von Heisenberg handgeschrieben sind. Gerade diese Federstriche zeigen deutlich, mit welcher Sicherheit damals eine Theorie rasch vorangetrieben wurde. Hier soll dem Laufe dieser Arbeit gefolgt und sie soll aus der heutigen Sicht kommentiert werden. Es soll gezeigt werden, wie sehr diese Arbeit auch heute noch Gültigkeit hat und noch immer Impulse zu vermitteln vermag.

Zur Stabilitätsfrage

Der Strömungszustand einer Newtonschen Flüssigkeit kann kontinuumsmechanisch mit der gleichen Gleichung beschrieben werden, ob er nun laminar oder turbulent ist. Was unterscheidet dann aber diese Zustände? *Heisenberg,* der sich immer wieder mit Fragen der turbulenten Strömung beschäftigt hat, äusserte andernorts, dass das Rätsel, das uns die Natur aufgibt, viel weniger in dem chaotisch anmutenden Strömungsfeld einer turbulenten Strömung zu suchen sei, als in der Existenz der laminaren. Gehe man davon aus, dass die Flüssigkeit eine enorm hohe Zahl an Freiheitsgraden der Bewegung besitze, so sei die turbulente Strömung die natürliche, die laminare aber die rätselhafte.

Ähnliche Gedanken schwingen bereits in seiner Dissertation an, wenn er *Hopfs* Idee übernimmt, dass die kritische Reynoldssche Grenzzahl nicht jenen Zustand angibt, bei dem die Laminarbewegung anfängt, labil zu werden, sondern den, an dem zum erstenmal die turbulente Bewegung als stationärer Zustand möglich ist. Indirekt wird damit eine ganz wesentliche Frage gestellt, nämlich die, ob die turbulente Strömung überhaupt als ein Stabilitätsproblem angegangen werden kann. Die Vermutung liegt nahe, dass man dies darf, da ja die turbulente Strömung unter gegebenen Anfangs- und Randbedingungen zwar nicht im Detail, aber als mittlere Strömung einen reproduzierbaren stabilen Verlauf besitzt. *Heisenberg* geht dieses Problem in seiner allgemeinsten Form an; er untersucht die Stabilität eines beliebigen Profiles einer *turbulenten* Strömung. Seine Begründung: «Wir kennen das Grundprofil der turbulenten Strömung noch gar nicht.»

Allerdings muss er der Kompliziertheit des mathematischen Problems entsprechend die Randbedingung einschränken, da er in dieser allgemeinen Form nur zweidimensionale Strömungen untersuchen kann. Dies erlaubt ihm, die Strömung durch ein Vektorpotential

$$\psi = \varnothing(y) + \varphi(y)\exp(i[\beta t - \alpha x]) \qquad (1)$$

zu beschreiben, das aus $\varnothing(y)$ für die Grundströmung besteht und $\varphi(y)\exp(i[\beta t - \alpha x])$ für die Störung. Das Geschwindigkeitsfeld ist damit durch $u = \partial\psi/\partial y$, $v = -\partial\psi/\partial x$ gegeben und für $\varphi = 0$ gilt

$$\partial\varnothing/\partial y = u(y) = u \qquad (2)$$

Diese Grundströmung ist entweder vermöge der äusseren Kräfte wirklich stationär oder aber zeitlich langsam veränderlich gegenüber den kleinen Schwingungen der Störung. In die Stokesschen Gleichungen eingesetzt und Glieder von der Grössenordnung φ^2 vernachlässigt, ergibt die Noethersche Gleichung dieses Stabilitätsproblems, in dimensionsloser Form

$$(\varphi'' - \alpha^2\varphi)(u - \frac{\beta}{\alpha}) - \varphi u'' = i/\alpha\, Re(\varphi^{IV} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi) \qquad (3)$$

mit den dem Problem angepassten Anfangs- und Randbedingungen. Berechnet man zu gegebenen α und *Re,* $c = \beta/\alpha$, so ist das System stabil, sofern der Imaginärteil $Im(c) > 0$, labil für $Im(c) < 0$ und ungedämpft für $Im(c) = 0$. *Heisenberg* verwendete zur Lösung von Gleichung (3) seiner Zeit entsprechend Potenzreihen-Ansätze. Er wählte für dieses Problem zwei Reihen, nämlich eine in negativen Po-

tenzen von $\sqrt{\alpha\, Re}$ und eine in positiven Potenzen von α^2, ein Näherungsverfahren, das *Poincaré* für astronomische Probleme entwickelte. Ohne Heisenbergs Rechnung nachzuvollziehen, sollen einige Resultate herausgegriffen werden, die auch heute noch von grosser Bedeutung sind, obschon sie von ihm teilweise nur physikalisch begründet wurden.
Lässt man in Gleichung (3) *Re* gross werden (untersucht werden ja turbulente Strömungen), so degeneriert diese Gleichung auf

$$(\varphi'' - \alpha^2\varphi)(u - c) - \varphi u'' = 0 \qquad (4)$$

Die Lösbarkeit von Gleichung (4) ist von *Rayleigh* ausführlich untersucht worden. Je nachdem diese Gleichung eine Lösung mit reellem *c* besitzt oder nicht, spricht man von einer «schwingungsfähigen» oder von einer «nicht schwingungsfähigen» Grundströmung. Diese viel einfachere Untersuchung ist deshalb so entscheidend, weil Heisenberg die gut belegte Vermutung äussert, dass das Profil *u* dann, und nur dann, unter Einfluss der Reibung labile oder ungedämpfte Schwingungen zulässt, wenn es zu den schwingungsfähigen Grundströmungen gehört.
Die Gleichung (3) besitzt vier Lösungen. Zwei sind Grenzschichtintegrale. Sie sind unabhängig von α^2 und enthalten den Einfluss der Zähigkeit. Die zwei übrigen Lösungen sind diejenigen des nicht viskosen Falles, durch (4) beschrieben; in ihnen tritt α^2 auf.
Dieses Gleichungsverhalten entspricht physikalisch dem Strömungsfeld, wie es durch die Prandtlsche Grenzschichttheorie beschrieben wird. Dabei kann aber gerade die Heisenbergsche Reihenentwicklung eine Angabe zur Dicke dieser Schicht machen, in der die Geschwindigkeit zur Wand hin sehr rasch abnimmt. Sie wird in bezug auf eine Stabilitätsbetrachtung von der Grössenordnung $(\alpha Re)^{-1/2}$, was bedeutet, dass jede Störwelle bei einer gegebenen Reynoldszahl eine andere Wandschicht als Grenzschicht erlebt. Es stellt sich zumindest für die Behandlung von Stabilitätsproblemen die Frage, ob anstelle von *Re* nicht die Grösse αRe verwendet werden soll.
Die turbulente Strömung wird aufgefasst als eine bestimmte Grundströmung mit überlagerten ungedämpften Schwingungen. Das Turbulenzproblem besteht dann darin, zu erklären, wie es die Strömung zuwege bringt, diesen Zustand zu stabilisieren. Heisenberg zeigt nun, dass gerade diese Frage durch Stabilitätsbetrachtungen allein nicht lösbar ist; entscheiden kann sie nur, ob ein solcher Zustand möglich ist. Getestet hat er seine Methode an der ebenen *Poiseuille*-Strömung, von der etliche Autoren behaupteten, sie wäre stets stabil – Heisenberg erkennt, dass auch diese Grundströmung unstabil ist, was zu erheblichen Auseinandersetzungen führte.
Die Experimente sprachen gegen Heisenberg. Es entstand ein eigentlicher Wettbewerb, den laminaren Zustand durch Unterdrücken der äusseren Störungen nach immer höheren Reynoldszahlen hin zu verschieben. Gerade diesen Widerspruch konnte Heisenberg aufgrund seiner Theorie aber sehr elegant erklären, wobei er einen Hinweis von *Prandtl* aufnahm, den er in dieser Frage konsultierte. Darnach würden die erwähnten Versuche (zum Beispiel *Ekmann,* 1910) nur eine Art Anlaufeffekt wiedergegeben. Je kleiner die äusseren Störungen sind, desto länger dauert es, bis die Bewegung merklich beeinflusst wird. Heisenbergs Theorie zeigt nun, dass bei hohen Reynoldszahlen die Anfachung von der Grössenordnung $(\alpha Re)^{-1/2}$ ist. Damit ist es möglich, den Zeitpunkt, bei dem die Turbulenz ausgebildet ist, immer weiter hinauszuschieben; im Experiment dergestalt, dass die betreffende Flüssigkeitsmenge, deren Stabilität man untersuchen will, die Testanlage bereits wieder verlassen hat, bevor die Labilität in Erscheinung tritt. Leider vermisst man diese Erklärung auch heute noch in den meisten Lehrbüchern, die noch immer die erwähnten Experimente als Beweis dafür wiedergeben, dass die *Poiseuille*-Strömung eine sehr grosse, wenn nicht absolute Stabilität besitze.
Heisenbergs asymptotische Methode blieb gerade wegen dieses experimentellen Resultats nicht unwidersprochen. Seine Kritiker stützten sich darauf, dass die Gleichung (3) sehr komplex ist und deshalb von Heisenberg nicht alle Schlüsse streng durchgeführt werden konnten.
Trotzdem erwies sie sich letztlich als brauchbar, wie *Lin* (1944) zeigte und *Thomas* (1953) durch direkte numerische Integration bestätigte.
Die Widersprüchlichkeit stammt aber vor allem daher, dass die Bedeutung der Viskosität für die Stabilität unverstanden bleibt. Einerseits hat sie einen dämpfenden Einfluss, andererseits ist sie selbst Auslöser von Instabilitäten. Dies bewirkt, dass erst nach Überschreiten einer gewissen Reynoldszahl die Strömung instabil wird, dass aber der Bereich jener Störungen, die dem System Energie zu entziehen vermögen, oberhalb gewisser *Re*-Zahlen wieder abnimmt. Diese Doppelrolle der Viskosität mathematisch richtig zu erfassen ist denn auch eines der schwierigsten Probleme, das sich als roter Faden durch alle Darstellungsversuche der Turbulenz hindurchzieht. Es ist deshalb attraktiv, zu versuchen, das Problem durch Analogieschlüsse anzugehen, die man durch Lösungen einfacherer Sachverhalte gewinnt. Ansätze dieser Art beruhen etwa auf der Analogie der Entwicklung eines passiven Skalarfeldes $\theta(\underline{x}, t)$ oder eines quellenfreien Vektorfeldes $B(\underline{x}, t)$ und der Bewegungsgleichung der turbulenten Strömung, *Moffatt* (1981). Insbesondere anhand des passiven Skalarfeldes lässt sich der Einfluss der Viskosität anschaulich darstellen, was hier skizziert werden soll.
Die Entwicklung eines passiven Skalarfeldes in einem Strömungsfeld *u* kann durch die Diffusionsgleichung mit der Diffusivität κ beschrieben werden:

$$\frac{\delta\theta}{\delta t} + \underline{u} \cdot \nabla\theta = \kappa \nabla^2 \theta \qquad (5)$$

κ wird hier in Analogie zu einer effektiven Viskosität gesetzt. Für $\kappa \to 0$ erhält man das Taylorsche Asymptoten-Gesetz, das die Dispersion in einem turbulenten Feld in Lagrangescher Darstellung beschreibt.

$$\langle \underline{x}^2 \rangle \sim 2\, D_m t \qquad (6)$$

$\underline{x} = \underline{x}(\underline{a}, t)$ ist der Lagrange-Positionsvektor, wobei $\underline{a}$ der Vektor der Anfangsposition ist.
Gleichung (6) gibt die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Teilchens an, wenn dessen Mittelwert für eine verschwindende mittlere Geschwindigkeit $x = 0$ ist. D_m ist dann durch eine einfache Korrelationsfunktion gegeben:

$$D_m = \frac{1}{3} \int_0^\infty \underline{v}(\underline{a}, t) \cdot v(\underline{a}, t + \tau)\, d\tau, \quad \text{mit } \underline{v} = \frac{\partial x(\underline{a}, t)}{\partial t} \qquad (7)$$

Dies bedeutet, dass ein inhomogenes θ-Feld ständig und immer intensiver durchmischt wird (Bild 1). Allerdings führt dies mit $\kappa = 0$ zu einem immer stärkeren Anwachsen der mittleren Gradienten der skalaren Grösse; $\langle(\nabla\theta)^2\rangle$ wächst unbegrenzt.

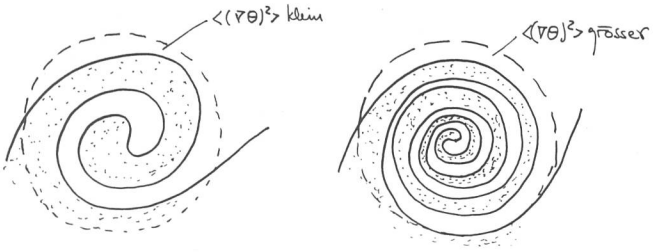

Bild 1. Schematische Darstellung einer nicht viskosen turbulenten Durchmischung.

Es braucht somit die Viskosität, um diese «Katastrophe» zu vermeiden. Ändert sich nun aber auch D_m drastisch? Wie *Saffman* (1962) zeigte, trifft dies nicht zu. Die effektive Diffusivität nimmt den Wert

$$D_e = D_m + \kappa - c R_\lambda \kappa \tag{8}$$

an mit $c \approx 1$; $R_\lambda = u_0 \lambda / \upsilon; \lambda = (15\ u_0^2 / <u^2>)^{1/2}$: der Längsmassstab der Dissipation.

Mit anderen Worten, das sehr schöne Resultat von *Taylor,* Gleichung (7), wonach die Diffusivität in direktem Zusammenhang mit den Geschwindigkeits-Korrelationen steht, behält seine Gültigkeit auch im Fall einer zähen Flüssigkeit. Die schwache Auswirkung der Zähigkeit auf die globalen Auswirkungen darf aber nicht darüber hinwegtäuschen, dass das Problem ohne Viskosität nicht lösbar ist. Dies zeigt auch, wie subtil dieser Einfluss in jedem Problem überprüft werden sollte.
Diese Felddarstellungen erlangten ihre heutige Bedeutung dadurch, dass Ansätze, wie sie aus der Quantenfeld-Theorie bekannt sind, sich hier besonders gut anwenden lassen – vor allem die Renormalisationsmethode. Damit erwies sich jenes Gebiet als äusserst fruchtbar für die Turbulenztheorie, an dem Heisenberg nach seiner Dissertation arbeitete.
In der Zwischenzeit hat aber auch die Stabilitätstheorie ihre zusammenfassende Gestaltung gefunden, zum Beispiel *Lin* (1967), allerdings, wie sich zeigte, ohne Heisenbergs Ideen in Frage zu stellen. Dennoch geht heute der Trend weg von einer reinen Stabilitätstheorie und hin zu einer mechanistischen Darstellung. Diese Abkehr von der statistischen Sicht ist die Folge experimenteller Resultate, die aufzeigen, dass die turbulente Strömung charakteristische Bewegungszyklen aufweist. Diese manifestieren sich in einem intermittenten Geschwindigkeitssignal oder im Auftreten von Widerstands-Erniedrigungseffekten, einem Phänomen, das rein statistisch kaum erklärt werden kann. Interessanterweise sind aber die Theorien, die diese Darstellung miteinbeziehen wollen, bis zu einem gewissen Grade durch Heisenberg antizipiert.
Landahls Wellenfokussierungs-Theorie braucht eine ähnliche Annahme wie sie zur Vereinfachung von Gleichung (4) gebraucht wurde. Aber auch die statistischen Weiterentwicklungen gehen teilweise auf Heisenberg zurück. So kann *Malkus'* Theorie (1979), wonach die Stabilitätseigenschaften auch auf die Geometrie des Geschwindigkeitsfeldes auszudehen sei, als eine direkte Weiterentwicklung von Heisenbergs allgemeiner Profilannahme angesehen werden.

Zur turbulenten Bewegung

Im zweiten Teil seiner Dissertation widmet Heisenberg sich der Charakterisierung der eigentlichen turbulenten Bewegung, zu deren Verständnis er zusammen mit *v. Weizsäcker* (1948) (*Heisenberg,* 1948) nochmals einen wesentlichen Beitrag lieferte. In seiner Dissertation hielt er aber einige Aspekte der Turbulenz fest, die leider nicht Allgemeingut wurden. Was in seiner Stabilitätstheorie bereits vorgebracht wurde, sei hier wiederholt: die kritische Reynoldszahl hat mit Stabilitätsfragen der Laminarströmung nichts zu tun. Sie ist eine charakteristische Konstante der turbulenten Bewegung. Die turbulente Strömung ist eine zweite mögliche Bewegungsform der zähen Flüssigkeiten. Heisenberg formulierte dies so: *«Das Turbulenzproblem der Hydromechanik ist ein Problem der energetischen und nicht der dynamischen Stabilität.»* Dies bedeutet, beide Bewegungsformen können nebeneinander existieren, die laminare von $Re = o - \infty$ (sie wird allerdings oberhalb eines *Re*-Wertes labil) und die turbulente für $Re > Re_{Grenze}$. Im Überlappungsbereich ist die turbulente Strömung immer energetisch stabiler als die laminare *(Noether)*, das heisst beim Übergang laminar/turbulent wird Energie freigesetzt. Unter energetisch stabilen Strömungen versteht man solche, die mit der Grundströmung im Gleichgewicht stehen; einem Gleichgewicht, das dadurch beschrieben ist, dass die Strömung weder fähig ist, dem Grundsystem mehr Energie zu entziehen, noch diesem über Dämpfungsvorgänge wieder Energie zuzuführen. Heisenberg geht das Problem mittels einer Fourierentwicklung der Stromfunktion an. Diese in die Stokessche Gleichung eingesezt und nach den quadratischen Termen abgebrochen, ergibt durch Koeffizientenvergleich die Gleichungen für die φ-Funktion. So findet er nach einiger Umrechnung ein Gleichungssystem, aus zwei Gleichungen bestehend. Die erste ist die im ersten Teil untersuchte Stabilitätsgleichung (3), die zweite ist der Impulssatz. Wie in der Stabilitätsuntersuchung bereits gefunden, kann gezeigt werden, dass nahe der Wand der Impulstransport überwiegt. Dieser ist aber deshalb so interessant, weil durch ihn ein Widerstandsgesetz formuliert werden kann, das hier auf einer Turbulenztheorie beruht. Heisenberg findet mit seiner Abschätzung das *Blasiussche* Widerstandsgesetz

$$c_f \alpha (\mathrm{Re})^{1/4} \tag{9}$$

das Blasius experimentell ermittelte und von dem *v. Karman* gezeigt hat, dass es einem wandnahen Geschwindigkeitsprofil von der Form

$$w \alpha y^{1/7}; y \alpha w^7 \tag{10}$$

entspricht, und zwar für Strömungen, die unabhängig von der Kanalbreite sind.
Die Grössenordnungsbetrachtung in der Heisenbergschen Darstellung liefert aber noch mehr: mit ihr lässt sich unabhängig von der Wandbeschaffenheit eine obere Grenze für das Widerstandsgesetz angeben:

$$\tau \alpha u^2 \tag{11}$$

Er vermutet, dass das Gesetz

$$\tau \alpha u^{7/4} \tag{12}$$

nur für glatte Wände gilt, für die das Gesetz (10) hergeleitet wurde, für rauhe Wände sich aber immer stärker dem quadratischen Gesetz nähert, und zwar weil für rauhe Wände die Störungsamplitude von *Re* unabhängig und von der Grösse der Wandstörungen sein sollte.
Bis heute hat es in dieser Beziehung nichts Besseres gegeben; eine umfassende Theorie des Wandwiderstandes ist

Bild 2. Unbeschwerte Urlaubstage am Bodensee: der 32jährige Werner Heisenberg (aus dem Buch «Werner Heisenberg, Atomphysiker und Philosoph» erschienen 1976 im Verlag Fränkische Gesellschaftsdruckerei GmbH, Würzburg)

immer noch ausstehend. Es existieren nur Beschreibungen für einzelne Strömungsbereiche und vorgegebene Randbedingungen. Der funktionale Zusammenhang zwischen dem Reibungsfaktor und der Reynoldszahl sowie der Rauhigkeit des Gerinnes wird deshalb auch heute noch nicht analytisch bestimmt, sondern aus dem mit empirischen Daten erstellten Diagramm herausgelesen, *Moody* (1944).

Wie sich zeigte, kann das Geschwindigkeitsprofil wandnah in guter Näherung als Potentialgesetz angenommen werden. Wie sieht es aber ausserhalb dieser Wandzone aus? Auch dieses Problem findet sich in dieser Dissertation behandelt. Die mathematische Aufgabe ist äusserst anspruchsvoll und lässt sich verhältnismässig leicht nur im Fall einer ebenen *Couette*-Strömung lösen. In diesem Strömungsfeld findet Heisenberg ein Grundprofil u für die turbulente Strömung, das über die ganze Kanalbreite im wesentlichen linear verläuft, allerdings viel flacher als im laminaren Zustand. An die Wand schmiegt es sich mit $y^{1/7}$ an.

Für die ebene *Poiseuille*-Strömung findet er ein Profil, das ebenfalls näherungsweise über die ganze Kanalbreite linear ist, in der Mitte jedoch einen scharfen Knick besitzt; an den Wänden schmiegt es sich aber wie zuvor wiederum mit $y^{1/7}$ an. Eine Knickstelle ist natürlich-physikalisch nicht erlaubt und zeigt somit auch die Grenze dieser Methode. Erklärt werden kann dies durch die turbulente Impulsübertragung in der Kanalmitte, die aus Symmetriegründen verschwindet. Hieraus folgt, da der Gradient der gesamten Impulsübertragung über die Kanalbreite konstant ist, dass der Gradient der laminaren Impulsübertragung u'' dort sehr gross sein muss.

Den Neuigkeitswert der Arbeit, so sagte Heisenberg selbst, bildete weniger die Aufstellung dieser zum grossen Teil damals bekannten Gesetzmässigkeiten, als vielmehr der Nachweis, dass die damals teilweise scheinbar sich widersprechenden Ergebnisse durch einfache Grundannahmen mathematisch beschrieben werden konnten.

Die Heisenbergsche Arbeit enthält aber einen wesentlichen Aspekt, der für zukünftige Arbeiten ganz wichtig sein könnte, was auch der Grund war, auf diese nun sechzigjährige Arbeit zurückzukommen, nämlich die Vorstellung, dass das Geschwindigkeitsprofil in direktem Zusammenhang mit einer Stabilität der Energie dieser Strömung stehe und aus ihr heraus analytisch beschreibbar sein sollte. Heisenbergs Approximationen geben den wandnahen Strömungszustand recht gut wieder, nicht aber das Strömungsinnere, was damit zusammenhängt, dass die Funktionen nicht analytisch über die ganze Kanalbreite fortsetzbar sind.

Inzwischen hat aber die *Millikansche* Darstellung (1928) die Profildarstellungen der Heisenbergschen Art verdrängt. Was *Millikan* zeigte, war, dass das Mittengesetz

$$\frac{u_m - \bar{u}}{u_*} = G(y/y_0) \tag{13}$$

mit G einer universellen Funktion ihres Argumentes, und das Wandgesetz

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = F(u_* y/\upsilon) \tag{14}$$

mit F ebenfalls einer universellen Funktion ihres Argumentes im Bereich der Überlappung logarithmische Funktionen erfordert. Ein Überlappen der beiden asymptotischen Verhalten ist aber weder logisch noch dynamisch begründbar. Es war die Beobachtung, die die Überlappung etablierte, nicht die Deduktion.

Wir wissen, dass die turbulente Strömung charakteristische Strömungsstrukturen enthält. Es ist deshalb naheliegend, sich die Frage zu stellen, ob sich die Heisenbergsche Methode nicht erweitern liesse auf Störungen mit beschränkter Zeitdauer, was einer Wellenpaket-Darstellung entspräche, womit nochmals die enge Verwandtschaft zwischen der Quantenmechanik und der Turbulenztheorie angedeutet wird. Gerade diese Zusammenhänge zwischen Quanten- und Strömungsmechanik lassen es uns verstehen, weshalb der Quantenmechaniker Heisenberg mit einer Arbeit zur Turbulenztheorie promovierte.

Literatur

W. Heisenberg (1924) Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen.

V. W. Ekmann (1910) On the change from steady to turbulent motion of liquids. Ark. Mat. Astronom. Fys. *6* (12).

W. Heisenberg (1948) Zur statistischen Theorie der Turbulenz. Zs. f. Physik *124*.

(1948) On the theory of statistical and isotropic turbulence. Proc. Roy. Soc. A *195*.

M. T. Landahl (1972) Wave mechanics of breakdown J. Fluid Mech. *56*, 775–802.

C. C. Lin (1944) On the stability of two-dimensional parallel flows. Proc. Nat. Acad. Sci. Wash. *30*, 316–323.

C. C. Lin (1967) The theory of hydrodynamic stability. Cambr. Univ. Press.

W. Malkus (1979) Turbulent velocity profiles from stability criteria. J. Fluid Mech. *90*, 401–414.

H. K. Moffatt (1981) Some developments in the theory of turbulence. J. Fluid Mech. *106*, 27–47.

L. F. Moody (1944) Friction factors of pipe flow. Trans ASME *66*, 8.

P. G. Saffman (1962) Some aspects of the effects of the molecular diffusivity in turbulent diffusion. Mécanique de la turbulence CNRS 108, Paris.

L. H. Thomas (1953) The stability of plane Poiseuille flow. Phys. Rev. *91*, 780–783.

C. F. v. Weizsäcker (1948) Das Spektrum der Turbulenz bei grossen Reynoldschen Zahlen. Zs. f. Physik, *124*.

W. Wien (1900) Lehrbuch der Hydrodynamik. Verlag S. Hirzel, Leipzig.

Adresse des Verfassers: Dr. *Albert Gyr*, Institut für Hydromechanik und Wasserwirtschaft, Eidg. Technische Hochschule Zürich, CH-8093 Zürich.