

**Zeitschrift:** Wasser- und Energiewirtschaft = Cours d'eau et énergie  
**Herausgeber:** Schweizerischer Wasserwirtschaftsverband  
**Band:** 50 (1958)  
**Heft:** 10

**Artikel:** Fehlerfortpflanzung bei hydrographischen Berechnungen  
**Autor:** Walser, E.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-921922>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 08.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

### Kraftwerkgruppe Albula-Landwasser

Der Kleine Rat des Kantons Graubünden hat im September 1958 die von acht Gemeinden der *Elektro-Watt AG*, Zürich, zuhanden einer zu gründenden Gesellschaft erteilten Verleihungen zur Nutzung der Wasserkräfte der Albula und des Landwassers in einer viergliedrigen Kraftwerkgruppe genehmigt. Die mittlere Energieerzeugung der Werkgruppe mit den Zentralen Bergün, Filisur, Glaris-Filisur und Tiefencastel beträgt 360 GWh, wovon 106 GWh oder rund 30% auf das Winterhalbjahr entfallen, handelt es sich doch um Laufwerke. Unterhalb der Wasserfassungen wird in den genutzten Gewässerstrecken eine bestimmte Mindestwassermenge belassen. Mit dem Bau des ersten Werkes, der Landwasserstufe Glaris-Filisur, soll binnen dreier Jahre begonnen werden.

### Zusammenlegung der Forschungstätigkeit auf dem Gebiete der Wasserturbinen

Die allgemeine wirtschaftliche Entwicklung führte auch in der Schweiz zu einem empfindlichen Mangel an technischem Personal, insbesondere an hochqualifizierten Spezialisten auf dem Gebiete der Forschung und der Versuche.

Der Lösung der damit zusammenhängenden Fragen schenken sowohl offizielle Stellen als auch Fach- und Wirtschaftsverbände große Aufmerksamkeit. Neben dem Studium von Rationalisierungsmaßnahmen setzen sich

die genannten Gremien vor allem für die Förderung des Nachwuchses ein. Obschon diese Bestrebungen sehr willkommene Erfolge verzeichnen, wird es Jahre dauern, bis die Auswirkung auf dem Gebiete der Forschung zu der notwendigen Entlastung führt. Daher haben sich die Firmen *Escher Wyss AG* in Zürich und *Ateliers des Charmilles S. A.* in Genf gefragt, ob sich da nicht noch andere Maßnahmen ins Auge fassen lassen, die auf dem Gebiete der Selbsthilfe der Firmen liegen.

Auf Verlangen der Kundschaft führten die genannten Firmen schon verschiedentlich Wasserturbinen anlagen gemeinsam aus. Die dabei gemachten guten Erfahrungen legten es deshalb nahe, einen Schritt weiter zu gehen und die Tätigkeit der hydraulischen Versuchsstätten der beiden Firmen zu koordinieren. Damit läßt sich der genannte Personalmangel wenigstens auf diesem Sektor in wirksamer Weise beheben, und zwar unter voller Wahrung der Konkurrenzfreiheit und Eigenständigkeit der beiden Unternehmen.

Ein solches Vorgehen hat für die Kundschaft zudem den Vorteil, daß ihr im einzelnen Fall die Ergebnisse und Erfahrungen beider Firmen im genannten Bereich zugute kommen.

Durch diese zwischen den beiden Firmen getroffene Vereinbarung wird von jetzt an die Versuchstätigkeit auf dem Gebiete der Wasserturbinen zusammengelegt, wobei jede der beiden Firmen über die gemeinsamen Ergebnisse frei verfügen wird. Dies ändert nichts an der vollen kommerziellen Unabhängigkeit der beiden Unternehmen.

(Mitteilung vom 8. Sept. 1958.)

## HYDRAULIK UND HYDROMETRIE

### Fehlerfortpflanzung bei hydrographischen Berechnungen

Dipl. Ing. E. Walser, Chef des hydrographischen Dienstes im eidgenössischen Amt für Wasserwirtschaft

Wie in anderen, auf der Messung von Naturgrößen beruhenden Disziplinen, spielt auch in der Hydrographie die Frage der Genauigkeit eine bedeutende Rolle.

Es ist jedoch im genannten Gebiet recht schwer, sich ein Bild zu machen über Ausmaß und Charakter der Meßfehler. In der Geodäsie z. B. kann ein Winkel oder eine Höhendifferenz beliebig oft mit verschiedenen Instrumenten und durch verschiedene Beobachter gemessen werden, was zu Einsichten in die dabei auftretenden Fehler führt. Die sekundliche Abflußmenge eines natürlichen Wasserlaufes hingegen ist eine Größe, die schwieriger zu erfassen ist, allein schon weil sie zeitlich nicht konstant ist, aber auch aus anderen Gründen. Die Schwierigkeit, sich Kenntnisse über die Genauigkeit der gemessenen Werte zu verschaffen, dürfte einer der Gründe sein, weshalb in vielen hydrographischen Arbeiten keine Fehlerbetrachtung vorkommt, was sich oft nachteilig auf die Überzeugungskraft dieser Arbeiten auswirkt.

Bevor die Fehlerfortpflanzung auf die Anwendungen hydrographischer Ergebnisse behandelt wird, müßten logischerweise die Fehler des verwendeten Materials selbst, ihre Größe, Häufigkeit, Verteilung usw. untersucht werden. Diesbezügliche Studien führen indessen sehr weit; schon eine erste Beschäftigung mit dem Problem zeigt, daß es sich keineswegs nur um die einfachen Beobachtungsfehler allein handelt. Ein Tagesmittel der

Abflußmenge z. B. ist das Endprodukt einer ganzen Reihe aufeinanderfolgender Arbeitsgänge, von denen jeder selbst ein eigenes Problem hinsichtlich Fehlerquellen und Fehlerfortpflanzung darstellt. Die meisten der in Frage kommenden Fehler weisen wohl, auf große Zeiträume betrachtet, zufälligen Charakter auf, manche derselben können aber während kürzerer Zeitabschnitte systematischen Charakter annehmen. So bilden die Fehler der schlussendlich gewonnenen Resultate eine komplexe Verbindung von zufälligen und systematischen Einflüssen, über welche ohne eingehende Untersuchungen keine sicheren Annahmen getroffen werden können.

Solche Untersuchungen fehlen aber im Gebiet der Hydrographie noch fast ganz, während in der Vermessungskunde fehlertheoretische Überlegungen eine Selbstverständlichkeit geworden sind. In der Erwartung, daß die Aufmerksamkeit der Fachkollegen auf die Bedeutung der Fehlerbetrachtung hinzuwenden und einen Anreiz für entsprechende Arbeiten zu geben, versuchen wir im Nachfolgenden an einigen Beispielen zu zeigen, wie sich Fehler der verwendeten Unterlagen auf hydrographische Berechnungen auswirken können. In Ermangelung näherer Kenntnisse über die Fehlerverteilung haben wir die einfachen Fehlerfortpflanzungsgesetze angewendet, denen die Voraussetzung zugrunde liegt, daß positive und negative Fehler von gleichem Absolutwert gleich häufig vorkommen. Wir sind uns

bewußt, daß diese Voraussetzung der «Symmetrie in Bezug auf den Fehler Null» bei den behandelten Fällen vielleicht nicht erfüllt ist. Wird einmal eine der vorliegenden analoge Arbeit auf Grund genauerer Kenntnis der Fehlerverteilung durchgeführt, dann werden die hier mitgeteilten Ergebnisse vielleicht etwas modifiziert werden müssen.

Wir nehmen an, die nachstehend betrachteten Zeitabschnitte seien so groß, daß die Laufzeiten von Abflußmengenänderungen keinen Einfluß auf die Abflußmengen-Mittelwerte haben.

Den angewendeten Fehlerfortpflanzungsgesetzen liegen die folgenden altbekannten Überlegungen zugrunde:

1. Ist eine Größe  $G$  Funktion z. B. der drei zu messenden Größen  $x, y, z$ , also  $G = f(x, y, z)$ , und werden bei der Bestimmung der letzteren die Fehler  $\Delta x, \Delta y$  und  $\Delta z$  gemacht, dann wird der auf Grund der gemessenen Werte  $x, y, z$  berechnete Wert  $G$  mit einem Fehler  $\Delta G$  behaftet sein, wobei gilt:

$$\Delta G = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \Delta z \quad (1)$$

Würde z. B. nach einer bestimmten Messung bekannt, daß die Fehler  $\Delta x, \Delta y$  und  $\Delta z$  vorgekommen sind, dann könnte der auf Grund der fehlerhaften Werte  $x, y, z$  berechnete Wert  $G$  nachträglich mittels obiger Gleichung 1 korrigiert werden. Meist ist dies nicht möglich, da die Größe der Fehler im Einzelfall nicht bekannt ist.

2. Kann angenommen werden, daß bei einem Meßverfahren bestimmte Werte von  $\Delta x, \Delta y$  und  $\Delta z$  nie überschritten werden, dann läßt sich, wenn der sehr seltene Fall einer Messung ins Auge gefaßt wird, bei der bei allen drei Größen  $x, y$  und  $z$  zugleich jene größten Fehler auftreten, mittels Gleichung 1 der größtmögliche Fehler  $\Delta G$  der Größe  $G$  berechnen.

3. Mit der Nennung des größten Fehlers (Ziffer 2) ist jedoch über die Gesamtheit der vorkommenden Fehler nur sehr wenig ausgesagt. Gauß hat deshalb den Begriff des «mittleren Fehlers»  $m$  verwendet, welcher definiert ist durch die Gleichung

$$m = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} v_i^2} \quad (2)$$

wobei  $v_i$  der tatsächliche, wahre Fehler im Falle  $i$  und  $n$  die Anzahl der vorkommenden Fälle darstellt. Die Einführung des Begriffes des «mittleren Fehlers» erlaubt nun, über das unter Ziffern 1 und 2 Gesagte hinaus noch weitere Aussagen über die Fehlerfortpflanzung zu machen. Unter der Voraussetzung nämlich, daß positive und negative Fehler von gleichem Absolutwert gleich häufig vorkommen, läßt sich aus den Gleichungen 1 und 2 eine Beziehung ableiten zwischen den mittleren Fehlern  $m_x, m_y$  und  $m_z$  der Größen  $x, y$  und  $z$  einerseits und dem mittleren Fehler  $m_g$  der Größe  $G$  andererseits.

$$m_g = \sqrt{\left[ \frac{\partial f}{\partial x} \cdot m_x \right]^2 + \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \cdot m_y \right]^2 + \left[ \frac{\partial f}{\partial z} \cdot m_z \right]^2} \quad (3)$$

Es ist zu beachten, daß damit nur ein statistischer Zusammenhang über die Gesamtheit der Fälle und nicht, wie bei Gleichung 1, ein für jeden Einzelfall geltender funktioneller Zusammenhang ausgesprochen wird. Nehmen wir z. B. an, bei einer bestimmten Messung werde die Größe  $x$  gerade mit einem Fehler gleich  $m_x$ , die Größen  $y$  und  $z$  mit Fehlern  $m_y$  und  $m_z$  gemessen; dann wäre der Fehler der Größe  $G$  dieser einen Messung nach Gleichung 1 zu berechnen; er würde nicht gleich  $m_g$  nach Gleichung 3 werden, sondern größer.

Wir bezeichnen die mittleren absoluten Fehler mit  $m$ , also z. B. den mittleren absoluten Fehler einer Abflußmenge  $Q$  mit  $m_Q$ . Dann führen wir aber auch die mittleren relativen Fehler  $p$  ein, wobei für das obige Beispiel gilt:

$$p_Q = \frac{m_Q}{Q}, \text{ oder } p_Q \cdot Q = m_Q \quad (4)$$

Der mit dem Faktor 100 multiplizierte Fehler  $p$  stellt den Fehler in Prozenten des betreffenden Wertes dar.

### 1. Summe der Abflußmengen mehrerer Stationen

Bild 1 zeigt als Beispiel einen Fall, der auftreten kann, wenn oberhalb einer Vereinigung zweier Flüsse an einem derselben für irgendwelche wasserwirtschaftliche Zwecke eine Entnahme besteht und das entnommene Wasser nach erfolgter Nutzung in den vereinigten Fluss zurückgegeben wird. Spezielle Interessen an der Wasserführung der betreffenden einzelnen Gewässerstrecken können zur Erstellung der drei eingezeichneten Wassermessstationen geführt haben, an denen für einen bestimmten Zeitabschnitt die mittleren sekundlichen Abflußmengen  $Q_1, Q_2$  und  $Q_3$  bestimmt wurden. Es ist dann naheliegend, die Abflußmenge  $Q_s$  der Flussstrecke unterhalb der Wasserrückgabe zu berechnen. Es gilt, wenn wir den allgemeinen Fall mit  $n$  Stationen betrachten:

$$Q_s = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n$$

Wenn wir die entsprechenden Stationsnummern als Index der an den einzelnen Stationen auftretenden mittleren Abflußmengenfehler  $p$  und  $m$  verwenden, so ergibt sich auf Grund von Gleichung 3 für den mittleren absoluten Fehler  $m_s$  der Abflußmengensumme  $Q_s$

$$m_s = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_n^2}$$

und unter Anwendung von Gleichung 4

$$p_s \cdot Q_s = \sqrt{p_1^2 \cdot Q_1^2 + p_2^2 \cdot Q_2^2 + \dots + p_n^2 \cdot Q_n^2}$$

oder für den mittleren relativen Fehler:

$$p_s = \sqrt{p_1^2 \cdot \left( \frac{Q_1}{Q_s} \right)^2 + p_2^2 \cdot \left( \frac{Q_2}{Q_s} \right)^2 + \dots + p_n^2 \cdot \left( \frac{Q_n}{Q_s} \right)^2} \quad (5)$$

Dieser Gleichung kann Verschiedenes entnommen werden, wobei wir auch hier dem aus der Vermessungskunde Bekannten folgen:

a) Nehmen wir an, der größte relative Fehler der Abflußmengen  $Q_1$  bis  $Q_n$  trete an der Station  $i$  auf, also  $p_i$  sei größer als  $p_1, p_2 \dots$  usw. bis  $p_n$ . Die Gleichung 5 läßt sich umformen wie folgt:

$$p_s = p_i \cdot \sqrt{\left( \frac{p_1}{p_i} \right)^2 \cdot \left( \frac{Q_1}{Q_s} \right)^2 + \left( \frac{p_2}{p_i} \right)^2 \cdot \left( \frac{Q_2}{Q_s} \right)^2 + \dots + \left( \frac{p_n}{p_i} \right)^2 \cdot \left( \frac{Q_n}{Q_s} \right)^2}$$

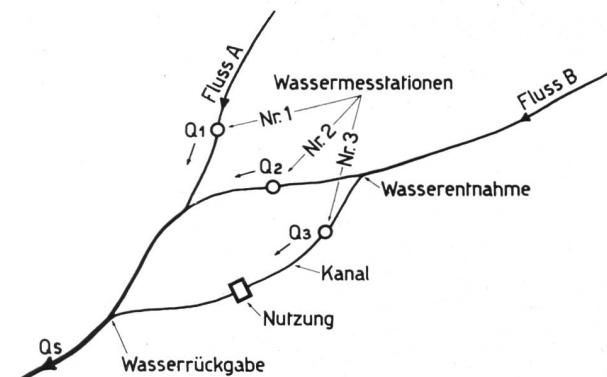


Bild 1

Die Werte  $\frac{p_1}{p_i}, \frac{p_2}{p_i}, \dots, \frac{p_n}{p_i}$  sind alle kleiner als 1,0.

Nehmen wir vorübergehend an, sie seien alle gleich 1,0, dann würde die obige Gleichung die Form annehmen:

$$p_s^* = p_i \cdot \sqrt{\left(\frac{Q_1}{Q_s}\right)^2 + \left(\frac{Q_2}{Q_s}\right)^2 + \dots + \left(\frac{Q_n}{Q_s}\right)^2}$$

wobei  $p_s^*$  sicher größer als  $p_s$  wäre.

Die Werte  $\frac{Q_1}{Q_s}, \frac{Q_2}{Q_s}, \dots, \frac{Q_n}{Q_s}$  sind alle kleiner als 1,0; ihre Summe ist gleich 1,0. Die Summe ihrer Quadrate ist somit kleiner als 1,0, was heißt, daß  $p_s^*$  kleiner ist als  $p_i$ . Es gilt also:

$$p_s < p_s^* < p_i \text{ oder } p_s < p_i, \text{ was heißt:}$$

Wird eine Abflümmenge als Summe einzelner gemessener Teilabflümmengen berechnet, so ist der mittlere relative Fehler der Summe stets kleiner als der größte der den einzelnen Summanden (Teilabflümmengen) zukommenden mittleren relativen Fehler.

b) Nehmen wir an, die Teilabflümmengen seien unter sich ungefähr gleich, so daß näherungsweise gesetzt werden kann:

$$\frac{Q_1}{Q_s} = \frac{Q_2}{Q_s} = \dots = \frac{Q_n}{Q_s} = \frac{1}{n}, \text{ dann wird aus Gleichung 5}$$

$$p_s = \frac{1}{n} \cdot \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2}$$

Je größer die Zahl der Teilstationen, um so kleiner der Fehler der Summe. Unter den Fehlern der Teilwassermengen wirkt sich der größte am stärksten auf den Fehler des Resultates aus. (Anwendung bei volumetrischen Messungen durch Auflösen eines Überfalls in mehrere Strahlen, die einzeln gemessen werden.)

c) Nehmen wir an, alle Teilabflümmengen werden mit demselben mittleren relativen Fehler  $p_t$  bestimmt, so ergibt sich

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n = p_t \text{ und somit aus Gleichung 5:}$$

$$p_s = p_t \cdot \sqrt{\left(\frac{Q_1}{Q_s}\right)^2 + \left(\frac{Q_2}{Q_s}\right)^2 + \dots + \left(\frac{Q_n}{Q_s}\right)^2}$$

Gemäß dem oben unter a) Ausgeführten ist der Wurzelwert obiger Gleichung immer kleiner als 1,0. Er nimmt

den kleinsten Wert an, wenn gleichzeitig die oben unter b) gemachte Voraussetzung zutrifft. Dann wird:

$$p_s = p_t \cdot \sqrt{n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot p_t$$

## 2. Abfluß aus einem Differenzgebiet zwischen zwei Wassermeßstationen

Im oberen Teil des Einzugsgebietes  $E_u$  der Wassermeßstation  $U$  befindet sich eine zweite Wassermeßstation  $O$ , deren Einzugsgebiet  $E_o$  also einen Teil des Gebietes  $E_u$  bildet (Bild 2). An den beiden Stationen sind während eines bestimmten Zeitabschnittes die mittleren sekundlichen Abflümmengen  $Q_u$  und  $Q_o$  bestimmt worden. Die Differenz  $Q_d$  zwischen diesen Werten stellt die aus dem Differenzgebiet

$$E_d = E_u - E_o$$

stammende Abflümmenge dar. Es ist oft von Interesse, neben den durch die Meßstationen unmittelbar erfaßten Verhältnissen des Gesamtgebietes  $E_u$  und des oberen Teilgebietes  $E_o$  auch das Regime der Abflümmengen aus dem unteren Teilgebiet  $E_d$  separat zu studieren. Die entsprechenden Abflümmengen werden dabei in einfacher Weise wie folgt berechnet:

$$Q_d = Q_u - Q_o$$

Die Theorie der Fehlerfortpflanzung ergibt für den mittleren absoluten Fehler  $m_d$  der Differenz  $Q_d$  (Gleichung 3):

$$m_d = \sqrt{m_u^2 + m_o^2}$$

Hiebei bedeuten  $m_u$  und  $m_o$  die mittleren absoluten Fehler der gemessenen Abflümmengen  $Q_u$  und  $Q_o$ .

Für den entsprechenden relativen Fehler  $p_d$  erhalten wir unter Berücksichtigung der Gleichung 4

$$p_d = \frac{1}{Q_d} \cdot \sqrt{p_u^2 \cdot Q_u^2 + p_o^2 \cdot Q_o^2} \quad \text{oder}$$

$$p_d = \sqrt{p_u^2 \cdot \left(\frac{Q_u}{Q_d}\right)^2 + p_o^2 \cdot \left(\frac{Q_o}{Q_d}\right)^2} \quad \text{⑥}$$

Die obige Gleichung scheint äußerlich sehr ähnlich der Gleichung 5, die nähere Betrachtung führt jedoch zu

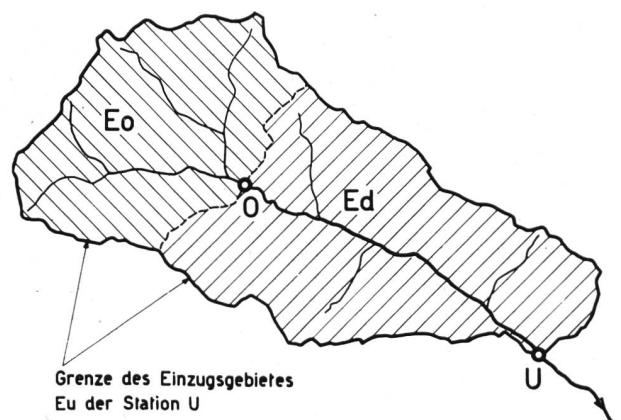


Bild 2

grundverschiedenen Schlußfolgerungen. Der Ausdruck  $\frac{Q_u}{Q_d}$  ist nämlich immer größer als 1,0; der Ausdruck  $\frac{Q_o}{Q_d}$  kann, wenn  $Q_o$  mehr als die Hälfte von  $Q_u$  ausmacht, ebenfalls größer als 1,0 werden. Daraus folgt, daß der mittlere relative Fehler der Differenzabflußmenge immer größer ist als derjenige der an der unteren Station gemessenen Abflußmenge; er kann bei kleinen Werten der Differenzabflußmenge sehr große Werte annehmen und nähert sich, wenn sich die letztere gegen Null hin bewegt, dem Wert Unendlich.

Dies mahnt zur Vorsicht in der Interpretation von errechneten Abflußwerten aus Differenzgebieten. Trotzdem möchte und kann man oft nicht auf die Einsichten verzichten, welche die Betrachtung solcher Werte, sofern ihre Fehler noch in zulässigen Grenzen bleiben, vermitteln. Wir wollen deshalb das Fehlergesetz für diesen Fall noch näher studieren, wobei wir annehmen, daß an beiden Wassermessstationen der gleiche mittlere relative Fehler  $p_m$  auftrete, also

$$p_u = p_o = p_m$$

Dann geht Gleichung 6 über in

$$p_d = \sqrt{p_m^2 \cdot \left(\frac{Q_u}{Q_d}\right)^2 + p_m^2 \cdot \left(\frac{Q_o}{Q_d}\right)^2} = p_m \cdot \sqrt{\left(\frac{Q_u}{Q_d}\right)^2 + \left(\frac{Q_o}{Q_d}\right)^2}$$

Setzen wir

$$\frac{Q_o}{Q_u} = x, \text{ womit } Q_o = x \cdot Q_u \text{ und } Q_u = \frac{Q_o}{x} \text{ wird, ferner}$$

$$Q_d = Q_u - Q_o = Q_u (1 - x),$$

dann erhalten wir

$$p_d = p_m \cdot \sqrt{\left[\frac{1}{(1-x)}\right]^2 + \left[\frac{x}{(1-x)}\right]^2}$$

$$p_d = p_m \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}}{(1-x)}$$

$x$  kann Werte zwischen 0,0 und 1,0 annehmen. Die folgende Tabelle gibt an, um wieviel mal größer als der mittlere relative Fehler der gemessenen Werte ( $p_m$ ) derjenige der Differenzabflußmenge ( $p_d$ ) für verschiedene Werte von  $x$  wird:

$x$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$p_d$	1,12	1,28	1,49	1,79	2,24	2,91	4,07	6,40	13,45
$p_m$									

Wird für die Differenzabflußmenge ein mittlerer relativer Fehler toleriert, der das Anderthalbfache desjenigen der gemessenen Abflußmengen ausmacht, dann darf die an der oberen Station gemessene Abflußmenge nicht mehr als 30 % der an der unteren gemessenen betragen; toleriert man den doppelten Fehler, nicht mehr als 44 %, beim 3fachen Fehler nicht mehr als 61 % und beim 4fachen nicht mehr als 69 %.

### 3. Berechnung spezifischer Abflußmengen unter Eliminierung der Retention eines Sees

#### a) Allgemeines

Im Einzugsgebiet  $E$  einer Wassermessstation  $S$  befindet sich ein natürliches oder künstliches Seebecken von der Oberfläche  $F$  (Bild 3). Es soll für einen bestimmten Zeitabschnitt  $T$  die spezifische Abflußmenge des Gebietes  $E$ , also die pro Zeit — und pro Flächen-

einheit zum Abfluß gelangte Menge  $q$ , berechnet werden.

Mit wechselndem Wasserstand des Sees wird auch der Wert  $F$ , bei künstlichen Seen zuweilen beträchtlich, variieren. Wir definieren  $F$  für das Folgende als diejenige Seeoberfläche, die als eine mittlere dem Zeitabschnitt  $T$  und somit auch der zwischen Anfangs- und Endpunkt dieses letzteren bestehenden Wasserspiegel-differenz  $H$  entspricht. Die mittlere im gleichen Zeitabschnitt an der Station  $S$  gemessene sekundliche Abflußmenge betrage  $Q_s$ . Ist während dieser Zeit der Wasserspiegel im See gesunken ( $H$  negativ), so stammt ein Teil  $Q_R$  der Abflußmenge  $Q_s$  aus dem Seeinhalt (wir vernachlässigen die Verdunstung) und der Berechnung der spezifischen Abflußmenge  $q$  ist offensichtlich nur der Rest  $Q_G$  zugrunde zu legen. Umgekehrt wird bei Seefüllung ( $H$  positiv) nur ein Teil des im Gebiet zum Abfluß gelangten Wassers  $Q_G$  von der Meßstation erfaßt, zur Berechnung der spezifischen Abflußmenge ist dem an der Station gemessenen ( $Q_s$ ) noch ein Posten  $Q_R$  hinzuzufügen, welcher der vom See zurückgehaltenen Menge entspricht.

$$Q_G = Q_s + Q_R$$

$$q = \frac{Q_s + Q_R}{E} \quad (7)$$

(Die so definierte spezifische Abflußmenge gilt für das Gebiet  $E$  als Ganzes, also einschließlich der Seeoberfläche. Würde die spezifische Abflußmenge nur für das Festland allein gesucht, so wären auch noch Niederschlag und Verdunstung auf der Seeoberfläche in die Rechnung einzubeziehen. Das Regime der Durchflußmengen in der Flußstrecke unterhalb des Sees ist nicht durch spezifische, sondern durch die absoluten Abflußmengen ( $m^3/s$ ) zu charakterisieren; es sagt, weil durch Größenverhältnisse, Füllungsgrad usw. des Sees beeinflußt, nichts Näheres über den Abfluß im Gebiet aus.) Es interessiert nun der mittlere relative Fehler von  $q$ , den wir mit  $p_q$  bezeichnen. Nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz ergibt sich:

$$m_q = \frac{1}{E} \cdot \sqrt{m_s^2 + m_R^2} \quad (8)$$

$$p_q = \frac{m_q}{q} = \frac{1 \cdot E}{E \cdot Q_G} \cdot \sqrt{m_s^2 + m_R^2} = \frac{1}{Q_G} \cdot \sqrt{m_s^2 + m_R^2} \quad (9)$$

$m_s$  und  $m_R$  sind die mittleren absoluten Fehler der an der Station gemessenen und der der Seeretention entsprechenden Abflußmengen. Wie im Vorangegangenen,

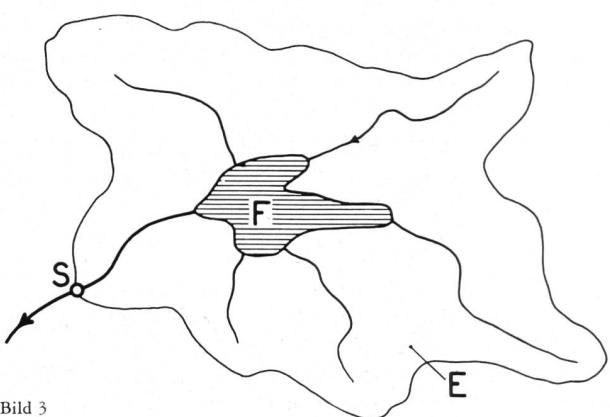


Bild 3

errechnen wir den Wert  $m_s$  aus dem mittleren relativen Fehler  $p_s$ :

$$m_s = p_s \cdot Q_s \quad (10)$$

In bezug auf  $m_R$  müssen wir etwas weiter ausholen. Es ist

$$Q_R = \frac{F \cdot H}{T} \quad (11)$$

Für die Bestimmung des Wertes  $Q_R$  sind vor allem die Fehler des Wertes  $H$  von Bedeutung; wir wollen uns hier nicht weiter mit dem Einfluß allfälliger Fehler der Werte  $F$  und  $T$  beschäftigen.

$$m_R = \frac{F}{T} \cdot m_H \quad (12)$$

Der Wert  $H$  stellt die Differenz zweier Wasserspiegelhöhen dar. Wenn die Bestimmung stets auf Grund ein und desselben Pegels erfolgt und der letztere als stabil und seine Teilung als fehlerfrei betrachtet werden dürfen, dann spielen nur die Ablesefehler am Pegel bzw. die Fehler der Limnigraphenaufzeichnungen eine Rolle. Ist der mittlere absolute Fehler einer einzelnen Wasserstandsbestimmung  $m_w$ , dann ist der mittlere absolute Fehler der Differenz  $H$  zweier Bestimmungen laut Fehlerfortpflanzungsgesetz (Gleichung 3)

$$m_H = \sqrt{2 \cdot m_w} \quad (13)$$

Erlaubt die Erfahrung begründete Annahmen über die Werte  $p_s$  und  $m_w$  zu treffen, dann kann mit Hilfe der Gleichungen 9, 12 und 13 der Fehler  $p_q$  berechnet werden.

Offensichtlich spielt hierbei das Verhältnis zwischen den einzelnen Abflußanteilen bzw. das Verhältnis von  $Q_s$  zu  $Q_G$  eine Rolle, wohl auch das Verhältnis von  $m_w$  zu  $H$ . Um diese Einflüsse besser sichtbar zu machen, formen wir um:

$$p_q = \frac{1}{Q_G} \cdot \sqrt{p_s^2 \cdot Q_s^2 + \frac{F^2}{T^2} \cdot 2 \cdot m_w^2} \quad (14)$$

$$\frac{F}{T} = \frac{Q_R}{H}$$

$$p_q = \frac{1}{Q_G} \cdot \sqrt{p_s^2 \cdot Q_s^2 + \frac{Q_R^2}{H^2} \cdot 2 \cdot m_w^2} \quad (15)$$

Wir setzen  $Q_s = Q_G \cdot x$

$$Q_R = Q_G - Q_s = Q_G (1 - x),$$

dann wird mit Berücksichtigung der Gleichung 15

$$p_q = \sqrt{p_s^2 \cdot x^2 + (1 - x)^2 \cdot \frac{m_w^2 H^2}{Q_G^2}}$$

Der Ausdruck  $\frac{m_H}{H}$  kann analog den Definitionen bei den Abflußmengen als der mittlere relative Fehler des Wertes  $H$  bezeichnet werden:

$$\frac{m_H}{H} = p_H$$

Dabei ist zu beachten, daß  $p_H$  bei kleinen Werten von  $H$  groß werden kann, nicht wie bei der Abflußmengenbestimmung, bei der im allgemeinen bei kleinen Abflußmengen auch kleine Absolutwerte der Fehler auftreten.

Die weitere Umformung ergibt:

$$p_q = \sqrt{p_s^2 \cdot x^2 + (1 - x)^2 \cdot p_H^2}$$

Wir führen nun das Verhältnis der beiden relativen Fehler  $p_s$  und  $p_H$  ein

$$r = \frac{p_H}{p_s} \quad (16)$$

$$p_q = p_s \cdot \sqrt{x^2 + r^2 (1 - x)^2}$$

oder

$$\frac{p_q}{p_s} = \sqrt{x^2 + r^2 (1 - x)^2}$$

Ist der Wert  $H$  groß, was insbesondere bei Stauteen vorkommen kann, dann nimmt  $p_H$  sehr kleine Werte an, die oft vernachlässigt werden können. Im Grenzfall ist  $r = 0,0$ , dann wird

$$p_q = x \cdot p_s$$

In Bild 4 sind die Werte  $\frac{p_q}{p_s}$  in Funktion von  $x$  für verschiedene Werte  $r$  graphisch dargestellt, wobei für die beiden erstgenannten Variablen der logarithmische Maßstab angewendet wurde.

Der Fall  $x = 1,0$  entspricht konstantem Seespiegel. Den Werten  $x > 1,0$  entspricht Aufbrauch des Seeinhaltes;  $Q_G$  muß durch Differenzbildung zweier gemessener Werte berechnet werden; die fehlertechnisch ungünstige Wirkung dieser Operation, die unter Ziffer 2 vorstehend behandelt wurde, kommt auch im Diagramm zum Ausdruck: Selbst für den Fall vernachlässigbarer Fehler des negativen Retentionspostens nimmt der Fehler des Resultates proportional zu  $x$  zu; er wird noch weiter vergrößert, wenn  $p_H$  nicht mehr zu vernachlässigen ist. Im Falle der Akkumulierung ( $x < 1,0$ ) wird das Resultat als Summe zweier auf Messung beruhender Werte gebildet (Ziffer 1). Der günstigen Wirkung dieser Operation wirkt aber der Umstand entgegen, daß Fehler und Einfluß des Retentionspostens groß werden können.

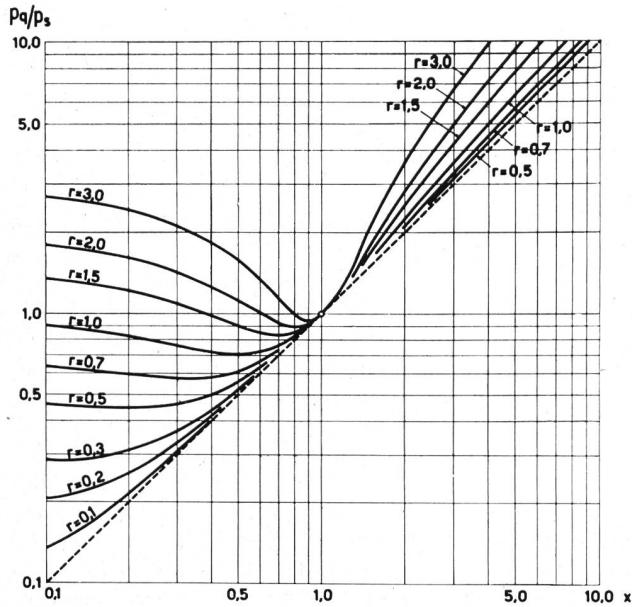


Bild 4

## b) Spezialisierung für bestimmte Gebiete

Hat man häufig spezifische Abflußmengen für ein und dasselbe Gebiet zu berechnen, so empfiehlt sich die Entwicklung von speziellen Formeln und Diagrammen, die dann einzig für das betrachtete Gebiet gültig sind. Ausgehend von den Formeln 7 und 11 erhält man:

$$q = \frac{Q_s + Q_R}{E} = \frac{Q_s}{E} + \frac{Q_R}{E} = \frac{Q_s}{E} + \frac{F \cdot H}{E \cdot T} \quad (17)$$

Der Ausdruck  $\frac{F}{E}$  stellt das Verhältnis der Seeoberfläche zur Oberfläche des gesamten Einzugsgebietes dar, wir setzen

$$s = \frac{F}{E} \quad (18) \quad \text{wobei } s \text{ immer } < 1,0 \text{ ist.}$$

Werden beide Seiten der Gleichung 17 mit T multipliziert, so erhält man

$$T \cdot q = \frac{Q_s \cdot T}{E} + s \cdot H$$

Der Ausdruck  $T \cdot q$  ist nichts anderes als die Abflußhöhe, die wir mit A bezeichnen; der Ausdruck  $\frac{Q_s \cdot T}{E}$  stellt eine scheinbare Abflußhöhe  $A^*$  dar, die man beim Einsetzen der Durchflußmenge  $Q_s$  der Station S (ohne Eliminierung der Seeretention) erhält

$$A^* = \frac{Q_s \cdot T}{E}$$

$$A = A^* + s \cdot H \quad (19)$$

führt wurde, welcher Wert bei H gleich Null unendlich wird, sofern nicht gleichzeitig auch  $m_H$  Null wird. Bild 4 darf also in der Gegend von  $x = 1,0$  nicht ohne weiteres zur Fehlerberechnung für konkrete Fälle verwendet werden; es dient aber recht gut, um die Einflüsse der anderen Faktoren sichtbar zu machen.

Demgegenüber wird Gleichung 20 den Verhältnissen für beinahe oder ganz gleichen Seestand am Anfang und am Ende des Zeitabschnittes gerecht. Die Aussage nämlich, der Seespiegel sei gleich hoch, beruht auf zweimaliger Wasserstandsbestimmung, von denen jede mit einem mittleren Fehler  $m_w$  behaftet ist. Statt gleich hoch zu sein, kann der Seespiegel am Ende des Zeitabschnittes doch um einen kleinen Betrag höher oder tiefer liegen als am Anfang, nämlich in durchschnittlich zwei von drei Fällen um einen Wert zwischen Null und  $\sqrt{2} \cdot m_w$  und in einem von drei Fällen um einen den Betrag  $\sqrt{2} \cdot m_w$  übersteigenden Wert. Aus dieser Unsicherheit resultiert ein additiver Beitrag zum Wert  $p_s$ , was zum Ausdruck kommt, wenn man in Gleichung 20 für H den Wert Null einsetzt.

Wird andererseits der Abfluß aus dem Gebiet, also der Wert A, sehr klein, so stammt fast die ganze Abflußmenge  $Q_s$  aus dem See. Dann nähert sich der relative Fehler  $p_q$  dem Wert  $\infty$ . Er ist somit nicht mehr geeignet für eine übersichtliche Darstellung; man muß in diesen Fällen den mittleren absoluten Fehler  $m_q$  betrachten. Derselbe ist nach Gleichungen 8, 12 und 13

$$m_q = \frac{1}{E} \cdot \sqrt{p_s^2 \cdot Q_s^2 + \frac{F^2}{T^2} \cdot 2 \cdot m_w^2} \quad (20)$$

$$m_q = \sqrt{p_s^2 \cdot \frac{Q_s^2}{E^2} + 2 \cdot s^2 \cdot \frac{1}{T^2} \cdot m_w^2} = \frac{1}{T} \cdot \sqrt{p_s^2 \cdot A^{*2} + 2 \cdot s^2 \cdot m_w^2} \quad (21)$$

$m_q$  ist Funktion von  $A^*$ ; die übrigen Werte können für ein bestimmtes Gebiet und gleichbleibende Zeitabschnitte als fest gelten. Für  $A = 0$ , also  $q = 0$ , nimmt  $m_q$  einen endlichen Wert an.

Wir knüpfen nun an Gleichung 14 an und setzen ein:

$$Q_G = q \cdot E$$

$$Q_s = q \cdot E - \frac{F \cdot H}{T}, \text{ dann erhalten wir:}$$

unter Mitberücksichtigung der Gleichung 19 und nach einigen Umformungen

$$p_q = \frac{1}{A} \cdot \sqrt{p_s^2 \cdot (A - s \cdot H)^2 + 2 \cdot s^2 \cdot m_w^2} \quad (20)$$

Für ein bestimmtes Gebiet mit vorhandenen Meßeinrichtungen und nur wenig veränderlicher Seeoberfläche können die Werte  $p_s$ , s und  $m_w$  als Konstante betrachtet werden.  $p_q$  ist dann Funktion nur von A und H.

Wird in Gleichung 20 für H der Wert Null eingesetzt, was dem Fall gleichen Seestandes am Anfang und am Ende des betrachteten Zeitabschnittes entspricht, dann ergibt sich ein Fehler  $p_q$ , der nicht gleich  $p_s$  ist, sondern um einen vom Wert  $m_w$  abhängigen Betrag größer. Dies scheint im Gegensatz zu stehen zum vorher unter a) erwähnten Fall  $x = 1,0$ , wo  $p_q$  gleich  $p_s$  würde. Der Grund dieses scheinbaren Widerspruches liegt darin, daß im Abschnitt a) der Fehler  $p_H$  einge-

## Beispiel:

Es sind für das Einzugsgebiet der Tresa bei Ponte Tresa die spezifischen Monatsabflußmengen zu berechnen, unter Eliminierung der Retention des Laganersees. Die Monatsmittel der Durchflußmengen bei Ponte Tresa seien mit einem mittleren Fehler von 0,5 % bestimmt worden; der mittlere Fehler einer Wasserstandsbestimmung betrage 5 mm

$$\begin{aligned} E &= 615 \text{ km}^2 \\ F &= 48,8 \text{ km}^2 \\ s &= \frac{48,8}{615} = 0,0793, s^2 = 0,00629 \\ T &(\text{mittlerer Monat}) = 2,63 \cdot 10^6 \text{ s} \\ p_s &= 0,005, p_s^2 = 25 \cdot 10^{-6} \\ m_w &= 0,005 \text{ m}, m_w^2 = 25 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Auf Grund von Gleichung 20 ergibt sich:

$$p_q = \frac{1}{200_A} \sqrt{(A - 0,0793 \cdot H)^2 + 0,0126}$$

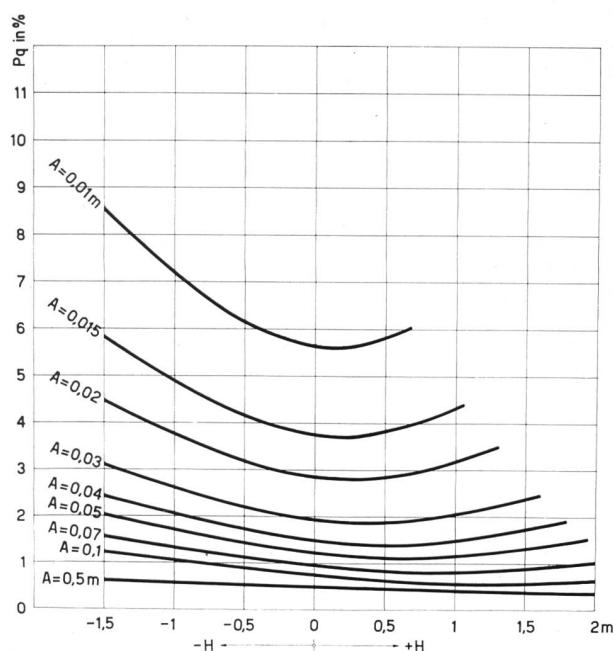


Bild 5

In Bild 5 sind die Werte  $p_q$  für den Bereich, der beim Lüganersee etwa vorkommen kann, graphisch dargestellt. Es zeigt sich, daß die Berechnung der spezifischen

Abflußmengen bei kleinen Abflüssen im Einzugsgebiet kritisch wird.

Was im Vorstehenden vorgebracht worden ist, sind einige Anwendungen einfachster Fehlerfortpflanzungsgesetze auf hydrographische Rechnungen. Verglichen mit dem, was die Vermessungskunde in bezug auf Fehlerbetrachtung entwickelt hat, mag es recht elementar wirken. Dennoch schien es uns nicht überflüssig, einmal darauf hinzuweisen, wie sich in der Hydrographie die Fehlergesetze auswirken und zu was für aufschlußreichen Resultaten man beim Anstellen der Fehlerbetrachtungen gelangt.

Gerade im genannten Fachgebiet ist man häufig versucht, die oft mühsam gewonnenen Meßergebnisse nach möglichst vielen Richtungen hin zu interpretieren. Wird indessen an die betreffenden Berechnungen der ernüchternde Maßstab der Fehlerbetrachtung angelegt, so muß manches unausgesprochen bleiben, was auf den ersten Blick zu scheinbar wirkungsvollen Darlegungen verlockt hatte. Erst die Fehlerbetrachtung gibt die Legitimation ab für die Vornahme bestimmter Rechenoperationen und für die weitere Interpretation von deren Resultaten.

Solche Art der Selbstkritik ist eine unabdingbare Forderung wahrer Wissenschaftlichkeit. Das Ansehen der Hydrographie als Wissenschaft könnte nur gewinnen, wenn Fehlerbetrachtungen in vermehrtem Maße in ihr Eingang finden würden.

## MITTEILUNGEN AUS DEN VERBÄNDEN

### Westdeutscher Wasserwirtschaftsverband

Dieser bedeutende Regionalverband tagte vom 28. bis 30. Juli 1958 in Hamburg; die Tagung umfaßte die ordentliche Mitgliederversammlung mit ganztägiger Vortragsveranstaltung und Besichtigungsfahrten an den folgenden zwei Tagen.

An der Jahresversammlung trat Prof. Dr. Oberste-Brink als Vorsitzender des Verbandes zurück; als Nachfolger wurde Baudirektor a. D. Dr. E. h. A. Ramshorn, Essen, gewählt. Dr. Ramshorn führte bis zur Jahresversammlung die Verbandsgeschäfte und

wurde nun in diesem Amte durch Dr. Ing. E. Knop, Baudirektor der Emschergenossenschaft und des Lippeverbandes ersetzt.

Nach den an die stark besuchte Mitgliederversammlung anschließenden Begrüßungsansprachen wurden sieben interessante und aufschlußreiche Kurzvorträge gehalten, die sich mit verschiedenen Problemen des Tagungsortes befaßten: «Wasser sichert Leben und Gesundheit» von Prof. Dr. H. Harmsen, «Geschichtliche Entwicklung der Wasserwirtschaft in Hamburg, ihre heutige Organisation und die Abwasserfrage

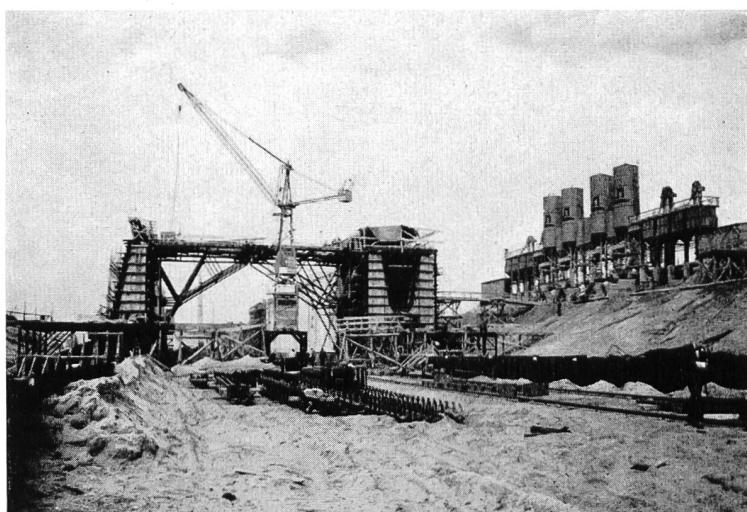


Bild 1 Bau der großen Schiffschleuse bei der Elbe-Staustufe Geesthacht