

**Zeitschrift:** Bulletin der Vereinigung Schweiz. Petroleum-Geologen und -Ingenieure

**Herausgeber:** Vereinigung Schweizerischer Petroleum-Geologen und -Ingenieure

**Band:** 36 (1969-1970)

**Heft:** 90

**Artikel:** Beispiel zur theoretischen Analyse von regionalen Grundwasserströmungen

**Autor:** Haefeli, Charles

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-196637>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## **Beispiel zur theoretischen Analyse von regionalen Grundwasserströmungen**

Mit 6 Figuren im Text

von CHARLES HAEFELI<sup>1)</sup>

### **1. Einleitung**

Regionale Grundwasserströmungen lassen sich mittels praktischen oder theoretischen Methoden studieren. Zu den ersteren wollen wir vor allem die hydrostatische, hydrochemische, geothermische sowie die Analyse des Oberflächenabflusses zählen. Die theoretische Methode arbeitet mit Modellen, wobei wir weniger an maßstäbliche Modelle des Sandkastentyps denken als an mathematische, elektrisch-analoge und Computer-Modelle. Je nach den zu lösenden Fragen und den zur Verfügung stehenden Daten wird die eine oder andere Methode gewählt oder häufig eine Kombination derselben.

Die Mathematik der Grundwasserströmungen wurde vorerst im kleineren Rahmen, d. h. im Absenkungsbereich der Bohrbrunnen entwickelt. Auf die fundamentale Arbeit von G. THIEM (1906) aufbauend, wurde die Bohrbrunnenhydraulik vor allem durch C. V. THEIS, C. E. JACOB und J. G. FERRIS immer weiter verbessert und auf den heutigen Stand gebracht. Dabei wurden für die meisten bedeutenden Probleme eine mathematische Lösung gefunden. – Erst viel später durch die Publikation von M. K. HUBBERTS klassischer Arbeit «The Theory of Ground-Water Motion» (1940, 785) wurde ebenfalls der mathematische Grundstein zur Analyse von regionalen Grundwasserströmungen gelegt. Der fundamentale Unterschied zwischen den beiden Theorien ist nicht nur der des Maßstabes und der Zeit, sondern vor allem auch der der Gestalt der Grundwasseroberfläche. Während sich die Bohrbrunnenhydraulik mit einzelnen oder überlagernden Absenkungstrichtern befasst, ist die Gestalt des regionalweiten Grundwasserspiegels, der sich weitgehend an die Topographie angleicht, viel komplizierter und häufig wellenförmig. Eines haben beide Theorien gemeinsam, beide wurden von DARCYS Grundgesetz aus entwickelt. 1962 (4375) und 1963 (75) brachten J. TÓTHS Untersuchungen neue Erkenntnisse und ergänzten HUBBERTS Arbeit. Unter Auswertung bodenphysikalischer Daten gelang es R. A. FREEZE und P. A. WITHERSPOON (1966, 641; 1967, 623; 1968, 581) in den letzten Jahren, eine in der Praxis anwendbare mathematische Methode zur Analyse von regionalen Grundwasserströmungen zu entwickeln.

### **2. Das hydraulische Potential**

Grundwasserströmungen werden von thermischen Einflüssen abgesehen vor allem durch die Gestalt des Grundwasserspiegels kontrolliert und sind von den geologischen Verhältnissen abhängig. Von der Form der Grundwasseroberfläche hängt die Verteilung des hydraulischen Druckes im Grundwasserkörper ab. Anderseits wird die Strömung

<sup>1)</sup> Dept. of EMR, Inland Waters, Hydrologic Science Div., Ottawa/Canada.

ebenfalls von der Durchlässigkeit der verschiedenen Schichten bestimmt, wobei sie sich nach dem Gesetz

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2}$$

$K$  = Durchlässigkeit

$\alpha$  = Winkel zwischen Strömungslinien und Schichtgrenze

an den Schichtgrenzen bricht. Wie weiter unten erläutert werden wird, verlaufen die Strömungslinien nur in gewissen Fällen parallel zur Grundwasseroberfläche. Um falsche Vorstellungen zu vermeiden, wäre es deshalb richtiger, bei Grundwasserkarten von projizierten Strömungslinien zu sprechen. Der Verlauf der Strömungslinien richtet sich nach dem hydraulischen Potential. Sie stehen senkrecht zu den Equipotentiallinien. Fig. 1 zeigt schematisch den Verlauf der Equipotential- und Strömungslinien in einem Grundwasserkörper von gleichförmiger Durchlässigkeit zwischen zwei wasseraufnehmenden Flüssen.

Da das hydraulische Potential die Grundlage unserer Ausführung bildet, sei etwas ausführlicher darauf eingegangen. Das Potential wird von M. K. HUBBERT (1940, 838) wie folgt definiert: «... the fluid potential is the sum of the work done against gravity and pressure and is:

$$\Phi = gz + \frac{p - p_0}{\rho} \quad (1)$$

$\Phi$  = hydraulisches Potential bei Punkt P

$g$  = Schwerebeschleunigung

$z$  = Höhe über Bezugspunkt

$p$  = hydrostatischer Druck bei Punkt P

$p_0$  = atmosphärischer Druck

$\rho$  = Dichte des Wassers

$h$  = hydraulischer Druck

The pressure at the point P is determined by the height of the liquid column above P and is given by

$$p = \rho g(h - z) + p_0 \quad (2)$$

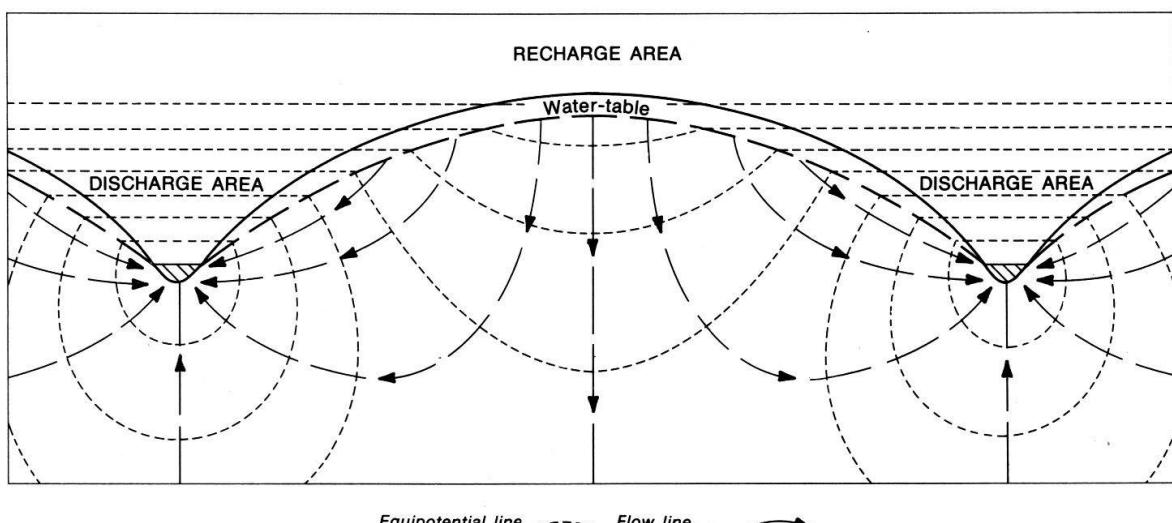


Fig. 1: Ungefährer Verlauf von Equipotential- und Strömungslinien in uniformem Grundwasserkörper zwischen zwei effluenten Flüssen (nach M. K. HUBBERT: 1940, 930).

substituting  $p$  in equation (1):

$$\Phi = gz + \frac{[pg(h - z) + p_0] - p_0}{p} = gh \quad (3)$$

Das hydraulische Potential entspricht demnach in der einfachsten Form ausgedrückt dem hydraulischen Druck multipliziert mit einer Konstanten. Und für denselben erhalten wir

$$h = \frac{p}{\rho g} + z$$

Der hydraulische Druck entlang einer Equipotentiallinie ist daher konstant. Wenn z. B. Beobachtungsrohre mit ihrem unteren offenen Ende entlang einer Equipotentiallinie gesetzt werden, so ist der Wasserspiegel in allen Beobachtungsrohren gleich hoch, unabhängig von ihrer Tiefe. Anderseits kann der Wasserspiegel in zwei verschiedenen tiefen, nebeneinander gesetzten Piezometern bis zu mehreren Metern differieren, je nach dem Unterschied zwischen den hydraulischen Potentialen an ihren offenen Enden. In einem Anreicherungsgebiet, wo die Strömungslinien im Extremfall senkrecht vom Grundwasserspiegel divergieren, d. h. die Equipotentiallinien nahezu horizontal sind, nimmt das Potential gegen die Tiefe ab; im Ausflussgebiet ist es umgekehrt. Im dazwischen liegenden Übergangsgebiet verlaufen die Equipotentiallinien mehr oder weniger senkrecht zum Grundwasserspiegel, der hydraulische Druck bleibt bei wechselnder Tiefe unverändert. In diesem Fall sind die Strömungslinien parallel zur Grundwasseroberfläche gerichtet.

In einem Grundwasserausflussgebiet, einem Gebiet also mit einer zum Grundwasser-

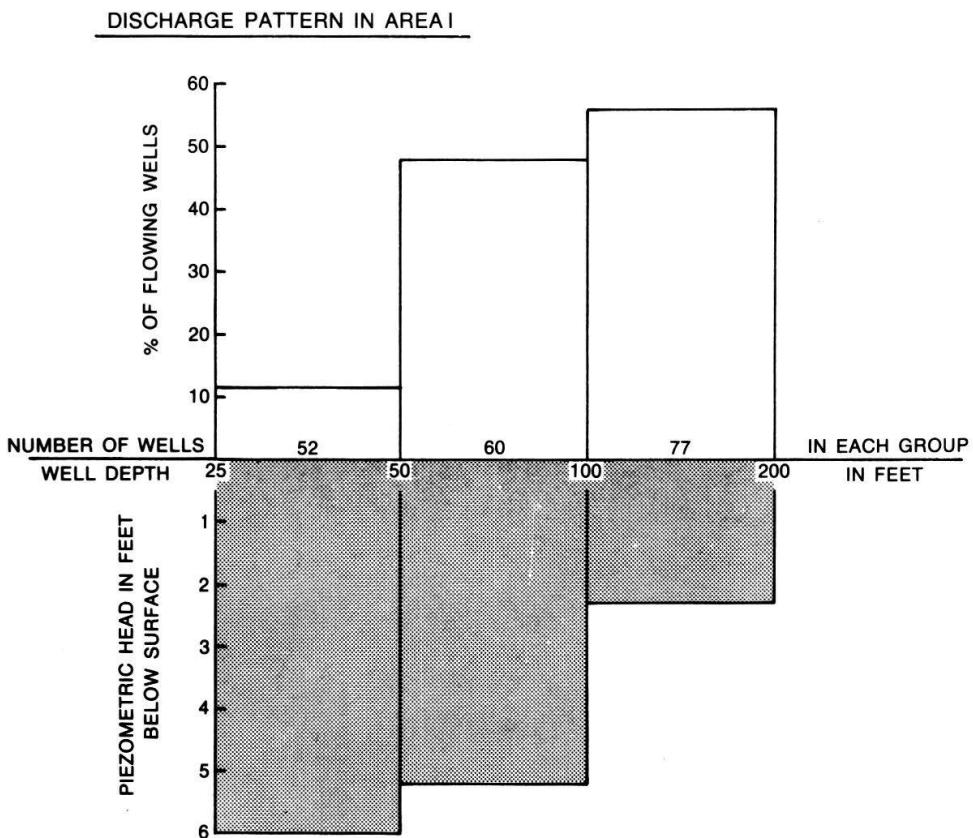


Fig. 2: Beispiel zur hydraulischen Druckverteilung in einem Ausflussgebiet südlich Lake Simcoe, Ontario, Kanada.

spiegel gerichteten Strömung, wurde die Wasserspiegelhöhe von 189 existierenden Bohrbrunnen ausgewertet. Die Tiefe der Brunnen variierte von ca. 8 bis 60 m. Fig. 2 zeigt das Resultat unserer Untersuchung. Die nach ihrer Endtiefen in drei Gruppen eingeteilten Bohrbrunnen zeigen die typische hydraulische Druckverteilung eines Ausflussgebietes. Mit zunehmender Brunnentiefe steigt der Wasserspiegel deutlich an, durchschnittlich etwa 0.25–0.30 m pro 10 m. Gleichzeitig nimmt der Prozentsatz der fliessenden Brunnen stark zu. Die quartären Ablagerungen des ca. 40 km<sup>2</sup> grossen Untersuchungsgebietes waren regionalweit gesehen ziemlich homogen. Dieses Beispiel illustriert u. a., dass bei Grundwasseruntersuchungen insbesondere auch bei Pumpversuchen der Tiefe von Brunnen und Beobachtungsrohren grosse Beachtung geschenkt werden muss.

Fig. 3 zeigt ein mehrfach überhöhtes geologisches Querprofil durch ein Flusstal. Zur Untersuchung der Grundwasserströmungen wurden in verschiedenen Abständen vom Fluss Piezometernester, d. h. Gruppen von Beobachtungsrohren von verschiedener Länge gesetzt, um den hydraulischen Druck in verschiedenen Tiefen zu messen. Daraus resultierte ein Bild, wie es für effluente Ströme typisch ist. Die Übereinstimmung mit dem theoretischen Modell von M. K. HUBBERT (Fig. 1) ist im oberen Teil auffallend. In der unteren Hälfte macht sich die höhere Permeabilität der tieferen Bearpaw Formation geltend, es entsteht ein «Underflow», eine Strömung, die nur noch beschränkt von der Gestalt der Grundwasseroberfläche abhängig ist. Untersucht man Gebiete, die sich über zwanzig oder mehr Kilometer ausdehnen, so kommt dieser Unterströmung, die sich hauptsächlich nach der Grossmorphologie und den geologischen Hauptstrukturen richtet, vermehrte Bedeutung zu.

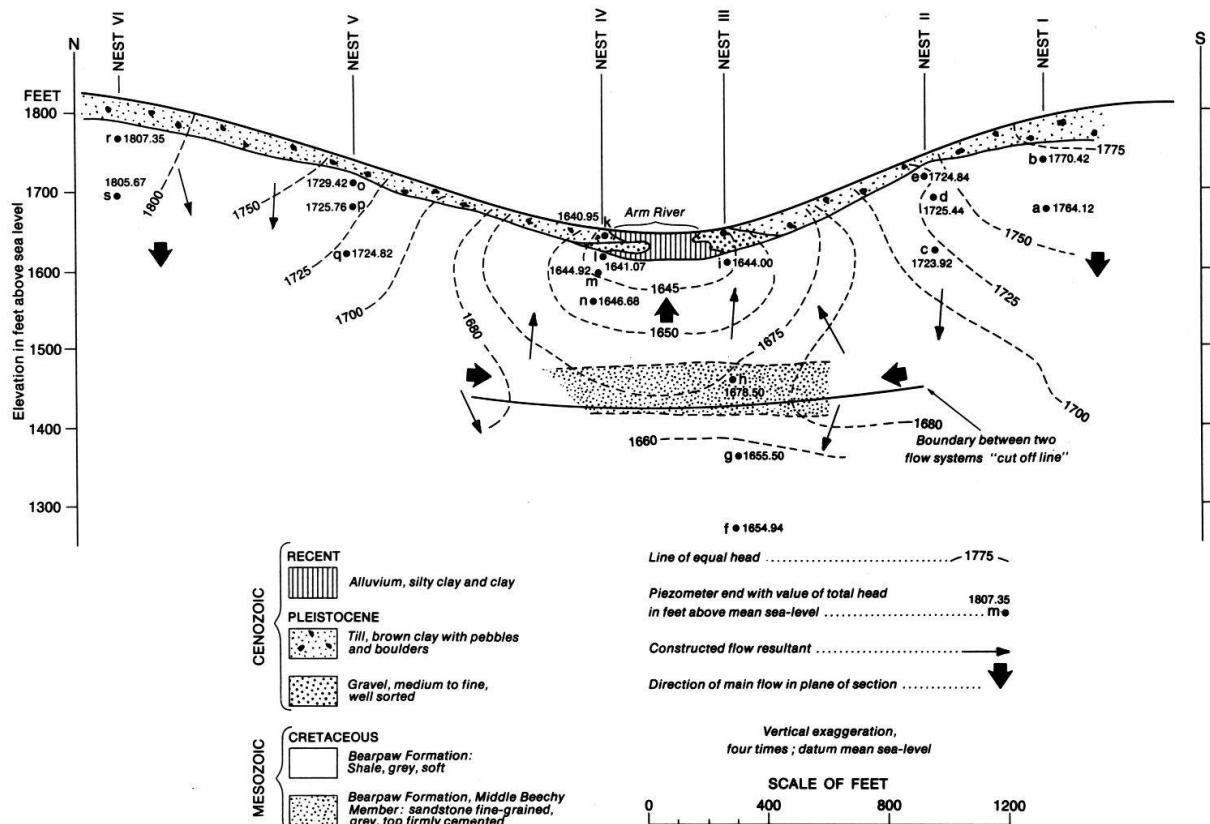


Fig. 3: Grundwasserströmung in einem Flusstalquerschnitt (nach P. MEYBOOM: 1966, 132).

### 3. Simulation von Equipotentiallinien

Das von R. A. FREEZE und P. A. WITHERSPOON (1966, 641) entwickelte theoretische Modell berechnet das hydraulische Potentialfeld in einem beliebigen Grundwasserkörper. Zur Entwicklung derselben wurden zwei verschiedene mathematische Wege eingeschlagen, einen analytischen und einen Entwicklungsfähigeren numerischen. Beide führen über die Gleichung von LAPLACE, die die räumliche Verteilung des hydraulischen Druckes in einem isotropen-homogenen Medium beschreibt:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad \begin{aligned} h &= \text{hydraulischer Druck} \\ x, y, z &= \text{Koordinaten} \end{aligned}$$

Während die analytische Methode auf zwei Dimensionen beschränkt ist und nur in geologisch homogenen oder horizontal geschichteten Formationen angewandt werden kann, bestehen für die numerische Lösungsart keine derartigen Restriktionen. D. h. das hydraulische Potentialfeld kann in jedem geologischen Profil simuliert werden, sogar dreidimensional, wenn es die Kapazität des Computers erlaubt. Der Einfachheit halber wurde bis dahin fast ausschliesslich mit Querschnitten gearbeitet, die parallel aneinander gereiht ebenfalls ein räumliches Bild ergeben. Auf die ziemlich ausgedehnte Mathematik, die zur Entwicklung des Computerprogramms führte, sei hier nicht eingegangen, sondern auf die Publikation von R. A. FREEZE und P. A. WITHERSPOON verwiesen. – Immerhin sei das Prinzip des Untersuchungsverfahrens kurz erläutert. Über das zu untersuchende geologische Profil wird ein Netz mit konstanten Knotenabständen in horizontaler und vertikaler Richtung gelegt. Die Anzahl der Knotenpunkte wird durch die Kapazität des Computers bestimmt. In unserem Fall betrug sie ca. maximal 3000. Für jeden dieser Knotenpunkte wird mittels eines Systems von Differential-Gleichungen, die die Gleichung von LAPLACE ersetzen und mit Hilfe der «Over-Relaxation»-Technik das hydraulische Potential per Computer berechnet. Ein angeschlossenes Subroutineprogramm extrapoliert daraus die Lage der Equipotentiallinien, die per Computer-Plotter graphisch als Punktreihe dargestellt werden können (vgl. Fig. 4).

Folgende hydrogeologische Daten müssen zur Berechnung des Potentialfeldes bekannt sein:

- a) Die Lage des Wasserspiegels; ist dieser unbekannt, so kann bei nicht zu starkem Relief und unter gewissen räumlichen Voraussetzungen die topographische Oberfläche genommen werden.
- b) Das geologische Profil.
- c) Die horizontale und vertikale Permeabilität der verschiedenen Formationen. Dabei müssen wir offen gestehen, dass insbesondere die vertikale Durchlässigkeit häufig nicht bekannt ist. In solchen Fällen müssen Erfahrungswerte eingesetzt werden.

Die Genauigkeit des errechneten hydraulischen Potentials hängt von den obigen Input-Parametern ab. Gilt es, ein qualitatives Problem zu lösen, so erhält man mit wenigen Daten und guten Schätzungswerten ausgezeichnete Ergebnisse. Bei quantitativen Aufgaben gilt es, die Genauigkeit richtig einzuschätzen. Ein Vorteil dazu besteht darin, dass alle physikalischen Größen beliebig verändert und Extremverhältnisse mit wenig Aufwand simuliert werden können.

### 4. Beispiel und Anwendung

Räumlich gesehen, sind der Anwendung des Verfahrens kaum Grenzen gesetzt. Es können Strömungsverhältnisse in jedem Maßstab simuliert werden. Als Beispiel dazu sehen wir in Fig. 4 eine einfache Darstellung, wie sie vom Computer-Zeichner geliefert

## LAKE

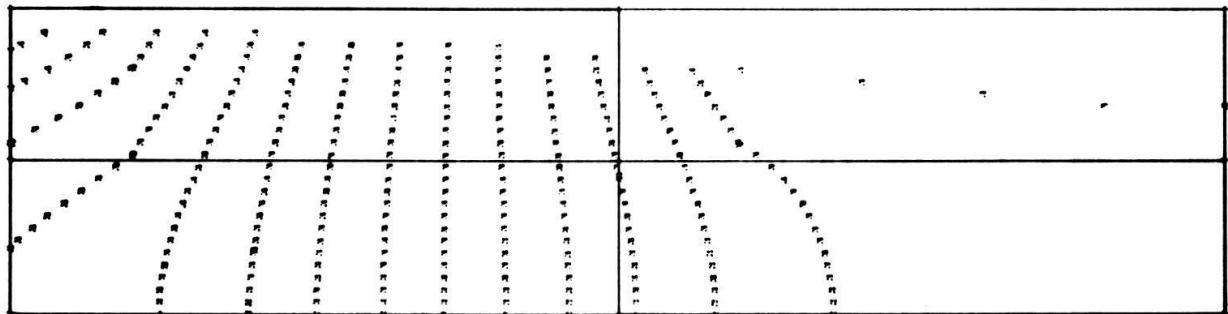


Fig. 4: Verkleinerter Computer-Plot zeigt den Verlauf der Equipotentiallinien in einem an einen See anstossenden Grundwasserkörper.

wird. Es stellt die Verteilung der Potentiallinien in einem an einen See grenzenden homogenen Grundwasserkörper dar, dessen horizontale Permeabilität  $K_h = 100 \text{ US gpd} / \text{ft}^2$  ( $1 \text{ US gallon per day} / \text{foot}^2 = 4.72 \times 10^{-5} \text{ cm/sec}$ ) und vertikale  $K_v = 2 \text{ US gpd} / \text{ft}^2$  ist. Die Länge des Ausschnittes ist ca. 100 m, das Profil ist nicht überhöht, die Neigung des Grundwasserspiegels beträgt 5 %, diejenige des Seebodens 10 %, das Gefälle zwischen den Equipotentiallinien ist 0,2 m.

Als Gegenstück dazu zeigt Fig. 5 ein zehnmal überhöhtes, 60 Meilen langes Profil mit fünf verschiedenen geologischen Formationen. Die Durchlässigkeiten, die einfachheitsshalber um Faktor 10 variieren, sind in US gpd/ft<sup>2</sup>, die anderen Einheiten in Fuss (ft) angegeben. Im Gebiet der Oakridges Moräne, die die Wasserscheide für das Oberflächenwasser bildet, befindet sich das Hauptanreicherungsgebiet. Da die oberste Schicht mit  $K_h = 0.01$  und  $K_v = 0.0001$  sehr wenig durchlässig ist, wirkt sich die Gestalt des Wasserspiegels nur noch sehr beschränkt auf die darunterliegenden Schichten aus. Dadurch wird in diesen ein «Underflow», der der oberen Grundwasserströmung südlich vom Lake Simcoe entgegengesetzt gerichtet ist, verursacht. Trotz der über 100 m hohen Wasserscheide existiert demnach ein direkter Grundwasserzufluss vom Lake Simcoe in den Lake Ontario, wo der Grundwasseraustritt durch den Verlauf der Equipotentiallinien deutlich zum Ausdruck kommt. – Werden die Permeabilitäten der zwei obersten Formationen etwas geändert,  $K_h$  beider Schichten um 10 verkleinert, so ändern sich die Grundwasserströmungen beträchtlich (Fig. 6). Die Wasserscheide für die tieferen Formationen kommt nun etwa vier Meilen nördlich von der obersten zu liegen. – Die in Fig. 5 und 6 angenommenen Permeabilitäten für die obersten zwei Schichten sind in Wirklichkeit höher, es war jedoch unsere Absicht, verschiedene Verhältnisse und deren Auswirkung auf die Grundwasserströmungen zwischen den beiden Seebecken zu untersuchen.

Das besprochene mathematische Modell ist bei den meisten regionalen Grundwasserproblemen anwendbar. Es dürften sich damit in vielen Fällen genauere Resultate erzielen lassen als mit konventionellen Methoden. Nebst einer grossen Anzahl qualitativer Probleme lassen sich damit auch verschiedene quantitative Aufgaben lösen. Wir denken da z. B. an die Ermittlung der Kapazität eines Grundwasserbeckens, an die Berechnung von Sickerverlusten bei Talsperren oder an Prognosen, die den Grundwasserhaushalt betreffen. Vor allem jedoch können damit auch Verhältnisse simuliert werden, die früher weitgehend empirisch ausprobiert werden mussten.

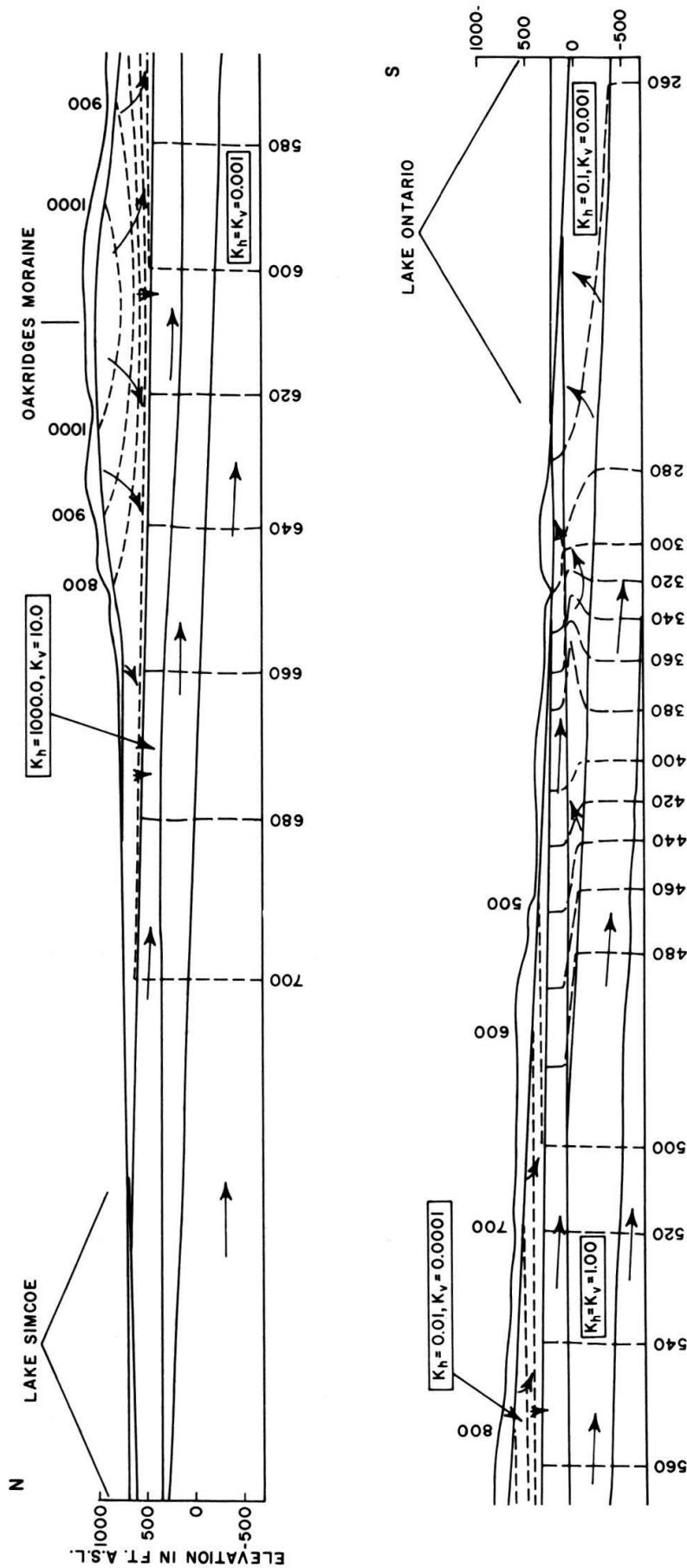


Fig. 5: Hydrogeologisches Profil zwischen Lake Simcoe und Lake Ontario, Kanada (Legende siehe Fig. 6).

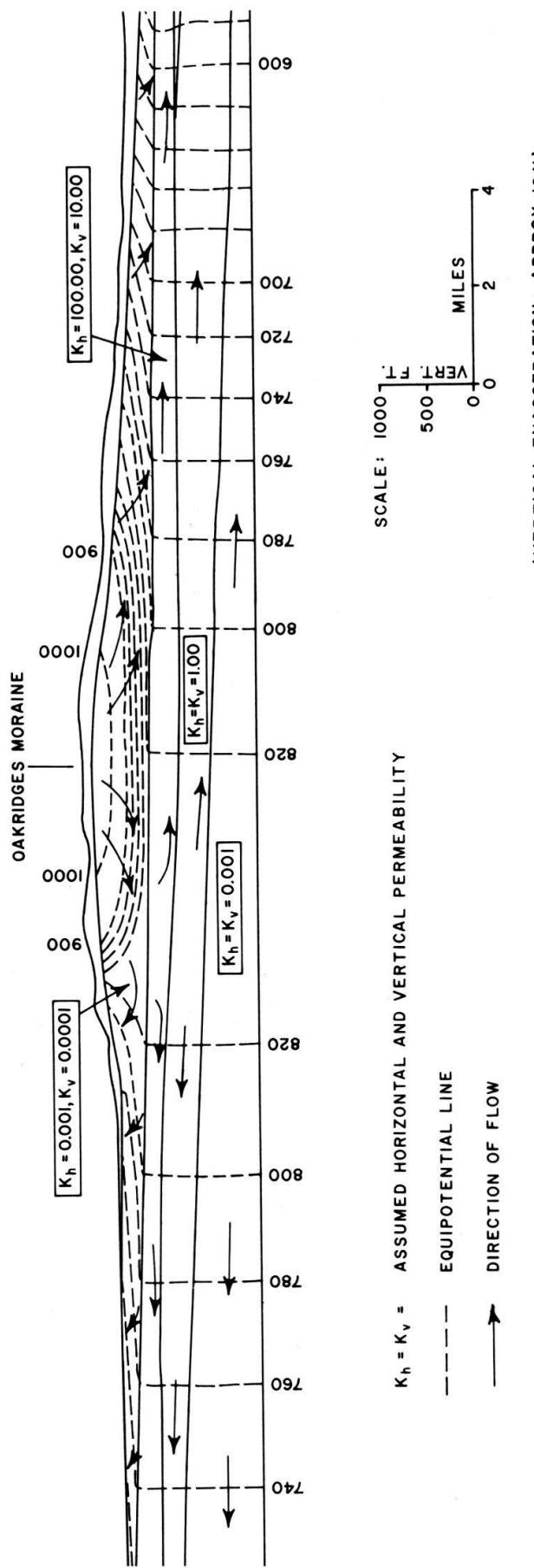


Fig. 6: Ausschnitt aus Fig. 5 mit in den obersten Schichten veränderten Durchlässigkeitswerten.

## Literatur

- FREEZE, R. A. and WITHERSPOON P. A. (1966): Theoretical analysis of regional groundwater flow I. Analytical and numerical solutions to the mathematical model. *Water Resources Research*, vol. 2, No. 4, 641.
- (1967): Theoretical analysis of regional groundwater flow II. Effect of water-table configuration and sub-surface permeability variation. *Water Resources Research* vol. 3, No. 2, 623.
- (1968): Theoretical analysis of regional groundwater flow III. Quantitative interpretations. *Water Resources Research* vol. 4, No. 3, 581.
- HAEFELI, C. (1970): Regional groundwater flow between Lake Simcoe and Lake Ontario. *Technical Bull.* No. 23, Dept. of EMR, Inland Waters Br., Ottawa, Canada.
- HUBBERT, M. K. (1940): Theory of groundwater motion. *Journ. of Geol.*, vol. 48, No. 8, 785.
- MEYBOOM P. (1967): Estimates of groundwater recharge on the prairies. *Water Resources of Canada*, Royal Soc. of Canada Symposium, 128.
- TODD, D. K. (1959): *Groundwater hydrology*. John Wiley and Sons, New York.
- TÓTH, J. (1962): A theory of groundwater motion in small drainage basins in Central Alberta. *Journ. Geophys. Research*, 67, 4375.
- (1963): A theoretical analysis of groundwater flow in small drainage basins. *National Res. Council Canada, Proc. Hydrol. Symp. 3: Groundwater*, 75.