Zeitschrift: Bulletin / Vereinigung der Schweizerischen Hochschuldozierenden = Association Suisse des Enseignant-e-s d’Université

Herausgeber: Vereinigung der Schweizerischen Hochschuldozierenden

Band: 43 (2017)

Heft: 3-4

Artikel: Zahlen, Formeln, Unverständnis - muss das so sein? : Einige subjektive Gedanken und Erfahrungen zum Lehren von Mathematik

Autor: Beutelspacher, Albrecht

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-893702

Zahlen, Formeln, Unverständnis – muss das so sein? Einige subjektive Gedanken und Erfahrungen zum Lehren von Mathematik

Albrecht Beutelspacher*

1. Status quo

Als Hochschullehrer hat man in aller Regel nicht gelernt zu lehren. Man hat Lehre erfahren, ist durch sie sozialisiert worden, hat sich seine akademischen Väter und Überväter zum Vorbild genommen und versucht – bewusst oder unbewusst, diesen vorgezeichneten Pfaden zu folgen.

In der Mathematik sieht das so aus:

Schritt 1. Der Dozent schreibt auf Grundlage seiner Erfahrung, unter Hinzuziehung einschlägiger Literatur ein Vorlesungsskript, indem er sich den Stoff noch einmal klarmacht und diesen systematisch darstellt. Auf die Systematik, also die logisch stringente Abfolge der Aussagen legt er ausserordentlichen Wert, denn das ist das Charakteristische der Mathematik: Das Wissen der Mathematik konzentriert sich in «Sätzen». Zur Formulierung der Sätze dürfen nur bereits definierte Begriffe benutzt werden. Jede Aussage muss beweisen werden. Dazu dürfen nur schon bewiesene Aussagen benutzt werden.

Schritt 2. In der «Vorlesung» schreibt der Dozent sein Manuskript mit Kreide an die Tafel. Vollständiges «Lehrbuch». Grosse Tafeln, meistens zwei oder drei hintereinander, die säuberlich von links oben nach rechts unten beschrieben werden Noch in der Generation meiner akademischen Väter war der perfekte Tafelanschrieb eine Königsdisziplin. Auch heute noch ist dies charakteristisch für das Fach Mathematik: Im Prinzip wird ein gesamtes Lehrbuch an die Tafel geschrieben. Das hat durchaus Vorteile für die Hörer, denn sie müssen nicht dem Dozenten lauschen und mühsam seine Gedanken zusammenfassen, vielmehr stehen die gesamten Gedanken explizit an der Tafel. Es müssen nicht zur Ergänzung noch zwanzig andere Bücher durchgearbeitet werden, sondern der gesamte Stoff steht an der Tafel, man muss ihn nur abschreiben – und verstehen. Dabei durchdenkt der Dozent den ganzen Stoff noch einmal; er lässt ihn vor seinem geistigen Auge noch einmal entstehen. Von aussen merkt man das an zwei Dingen: Zum einen spricht er jedes Wort beim Schreiben, manchmal auch mehrfach. Zum andern passiert es immer wieder, dass er «hängen bleibt». Das bedeutet, dass er ein Argument, das er schon oft durchdacht und das er auch so aufgeschrieben hat, im Moment des Aufschreibens nicht versteht. Das kann man als Ausdruck der kompromisslosen Wahrheitssuche sehen, wirkt aber auf Studierende mitunter wenig aufbauend: «Wenn schon der da vorne nicht durchblickt, wie soll dann ich ...?»

Schritt 3. Die Studierenden schreiben das, was der Dozent an die Tafel schreibt, ab. Sie versuchen, alles in ihr Heft zu übertragen. Das ist an sich schon eine Herausforderung. Sie wird zu einer Herkulessaufgabe, weil Mathematik schwierig ist und höchstens Genies eine Chance haben, den Stoff, der ihnen so präsentiert wird, spontan zu verstehen.

Von aussen betrachtet könnte man also sagen: Der Dozent arbeitet mit der Tafel, dabei achtet er peinlich darauf, dass an der Tafel nichts Falsches steht. Wenn er alles, von seinem Manuskript ausgehend, noch einmal durchdacht, seine Gedanken mündlich formuliert und in einwandfreier Form an die Tafel gebracht hat, dann ist er zufrieden mit seiner Arbeit.

Aus Sicht der Hörer gestaltet sich eine Vorlesung so: Sie nehmen einen Dozenten wahr, der sich erkennbar bemüht, sich den Stoff in seiner ganzen Komplexität präsent zu machen. Sie kämpfen damit, den Text an der Tafel zeitnah abzuschreiben und haben in der Regel keine Chance, den Stoff auch nur ansatzweise zu verstehen. Ausserdem sehen sie den Dozenten die allermeiste Zeit nur von hinten.

Auch der Dozent sieht seine Hörer fast nie: Zu Beginn bei der Begrüssung und am Ende, wenn er sich verabschiedet.

*Mathematikum Gießen e.V., Liebigstraße 8, 35390 Gießen, Deutschland.

E-mail: *albrecht.beutelspacher@mathematikum.de*
www.mathematikum.de

Albrecht Beutelspacher, Dr. rer.nat. Dr. h.c., studierte in Tübingen Mathematik, Physik und Philosophie. Danach wechselte er 1973 an die Universität Mainz, wo er 1976 promovierte und sich 1980 habilitierte. Dort war er bis 1985 Professor auf Zeit und arbeitete dann als wissenschaftlicher Mitarbeiter bei der Firma Siemens AG München. Seit 1988 ist Albrecht Beutelsbacher Professor für Geometrie und Diskrete Mathematik an der Universität Gießen und seit 2002 Direktor des Mathematikums in Gießen. Er hat zahlreiche Bücher geschrieben. Für seine Verdienste um die Popularisierung von Mathematik erhielt er zahlreiche Auszeichnungen, u.a. den Communicator-Preis der DFG (2000), den Ehrendoktor der Universität Siegen (2010) und den hessischen Verdienstorden (2016).

Viele Dozenten würden diese Sicht mehr oder weniger teilen, aber entschieden auf die so genannten Übungen verweisen als jenen Ort, an welchem die Studierenden selbst tätig werden können. Dies ist ein guter Gedanke und die Übungen sind eine gute Einrichtung. Dort werden zum Teil «Präsenzaufgaben» gelöst, aber auch die schriftlichen Hausaufgaben besprochen. Das ist ein im Prinzip gutes Vorgehen. Allerdings besteht manchmal die Gefahr, dass die wissenschaftlichen Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter, die typischerweise für die Übungen verantwortlich sind, der Versuchung erliegen, Aufgaben zu stellen, die für sie eine Herausforderung darstellen – und demzufolge für die meisten Studierenden unlösbar sind.

2. Kehrtwende

Vielleicht hatte ich schon länger unbewusst so gehandelt. Vielleicht hatte sich die Einsicht bei mir auch schon über längere Zeit aufgebaut. Aber irgendwann fiel es mir wie Schuppen von den Augen, und eine Einsicht von überwältigender Banalität wurde mir bewusst: In meiner Lehre geht es nicht darum, meinen akademischen Vätern und Übervätern zu imponieren. Ich muss nicht unter Beweis stellen, dass ich weiss, dass man den Stoff auch in viel grösserer Allgemeinheit darstellen könnte. Ich muss nicht an jeder Stelle zeigen, welche Super-Tricks ich kenne. Darum geht es vielleicht an einer anderen Stelle, aber nicht in einer Vorlesung. In der Vorlesung geht es darum – und nur darum, den Lernprozess der Studiereden zu initiieren, zu fördern und zu begleiten. Kurz gesagt: Das Ziel ist, dass die Studierenden etwas lernen, und nicht, dass ich, wem auch immer, zeige, was ich kann.

Das bedeutet eine bewusste Hinwendung zu den Lernenden. Die Erarbeitung des Stoffes ist unsere gemeinsame Aufgabe, bei der wir, natürlich, unterschiedliche Rollen haben. Die Aufgabe des Dozenten ist es, die Studierenden bei ihrer Erarbeitung des Stoffs als kundiger und erfahrener Experte zu führen, anzuleiten, ihnen Mut zuzusprechen, sie vor Abstürzen zu bewahren usw. Die Aufgabe der Lernenden besteht darin, sich dieser Führung ein Stück weit anzuvertrauen, aber auch selbständig in ihrem eigenen Tempo und ihren eigenen Zugängen, eventuell auch in dem ihnen angemessenen Abstraktionsgrad, immer wieder in Rückkopplung mit dem Dozenten sich ein mathematisches Gebiet zu erschliessen.

Aus Sicht der Lehrenden kommt es meiner Ansicht nach auf folgenden Dreiklang an:

1. *Die Studierenden ernst nehmen.* Adressat meiner Vorlesung ist nicht die Tafel, nicht mein nächstes Buch, nicht meine Kollegen, sondern die lernenden Studierenden.

2. *Die Wissenschaft ernst nehmen.* Es geht nicht darum, den Stoff zu banalisieren, «damit jeder mitkommt», sondern darum, ein authentisches Bild der Mathematik zu vermitteln.

3. *Sich selbst ernst nehmen.* Lehre passiert nicht nebenbei, sondern muss professionell betrieben werden. Dazu gehört auch, dass man die Praxis anderer Fächer und Erkenntnisse der Lernforschung zur Kenntnis nimmt.

3. Meine Vorlesungen

Eine Vorlesung ist, bei aller Standardisierung durch den «kanonischen» Stoff, stilbildende Lehrbücher, Tradition sowie Prüfungsordnungen und Modulhandbücher, immer noch etwas sehr Individuelles. Man steht vorne und erzählt keine persönlichen Erlebnisse, sondern spricht sozusagen für die Mathematik. Welche Rolle man dabei einnimmt, hängt aber auch von der eigenen Persönlichkeit ab: Manche agieren als Prediger und verkünden eine Botschaft, andere sehen sich als Bergführer und zeigen, wo es langgeht, manche versuchen sich als Entertainer, der die Hörer bei Laune hält. Kurz: Jede Dozentin und jeder Dozent pflegt in gewissem Mass eigene Zugänge, indem sie oder er inhaltliche Akzente setzt oder methodisch eigene Vorstellungen entwickelt. Insofern ist der folgende Einblick in die Praxis weder repräsentativ noch alternativlos, aber vielleicht anregend.

3.1. Grundlegende Ideen des Lehrens

Eine Vorstellung von Lernen, die ich zunehmend bewusst nutze, ist die des Weiterknüpfens des Netzes des Wissens: Die Studierenden wissen schon viel; man kann sie daran erinnern. Sie kennen viele mathematische Objekte und Gesetzmässigkeiten aus ihrem Alltag. Man kann diese benennen und ihre mathematische Seite herausarbeiten. So wird aber auch klar, dass ihr Wissen oft lückenhaft, unverstanden und unsystematisch ist. Daher sind die Studierenden bereit, den nächsten Schritt zu gehen.

Daraus ergibt sich folgende Konsequenz: Beginne mit einem Beispiel (oder vielen Beispielen) und *nicht* mit der Definition. Ein treffendes Beispiel *vor* dem Satz oder *vor* dem Beweis kann alles ganz leicht, manchmal selbstverständlich werden lassen.

Aus Sicht der traditionellen Lehrer würde man hier kritisch hinterfragen: Wie soll das gehen? Über etwas reden, bevor man es definiert hat? Eine der Säulen der Mathematik ist doch, dass man nicht ins Blaue hinein redet, sondern sich zunächst klar macht und definiert, was der Gegenstand der Untersuchung sein soll. (Wenn man über Kreise spricht, ist der erste Akt die Definition eines Kreises: Ein Kreis ist der Ort aller Punkte, die von einem festen Punkt den gleichen Abstand haben. Und dann darf man, wenn man Aussagen über Kreise – zum Beispiel Tangenten – beweist auch nur die Definition benutzen.)

Diese Einwände sind berechtigt. *Ja*, die Mathematik ist eine wunderbare «deduktiv geordnete Welt eigener Art» (Winter 1995) und gehört zu den grossartigsten Leistungen menschlicher Kultur. Mathematik oder wichtige Teilgebiete sind in vielen Büchern grossartig beschrieben, von denen das erste und einflussreichste die «Elemente» des Euklid (ca. 300 v. Chr.) ist.

Aber: Lernen funktioniert anders. Beim Lernen kämpft man mit Begriffen, indem man Beispiele und mögliche Gegenbeispiele betrachtet, indem man Verallgemeinerungen und Spezialisierungen ausprobiert, indem man versuchsweise eine Definition annimmt und ausprobiert, wie weit diese trägt. Man arbeitet sich an Sätzen und Beweisen ab, indem man Spezialfälle betrachtet, Voraussetzungen variiert, indem man versucht, die Behauptung treffend zu fassen usw. Das ist auch in der mathematischen Forschung so. Man hat Jahrhunderte gebraucht, bis man den Begriff einer «Funktion» gut gefasst hatte; es hat lange gedauert, bis man wusste, wie man «Stetigkeit» definieren kann. Und so weiter. Kurz: Beim Lernen muss man sich die Finger schmutzig machen oder zumindest die Ärmel hochkrempeln. Jeder muss seinen Weg finden.

Ein spezielles Problem der Mathematiklehre sind die Formeln, Terme und Gleichungen. Allgemein werden Formeln als das Wesen der Mathematik angesehen; nach Meinung vieler drückt sich Mathematik nicht nur in Formeln aus, sondern Mathematik und Formeln sind das Gleiche. Ja, Formeln sind unzweifelhaft wichtig und eine grosse Errungenschaft menschlicher Kultur. Aber Formeln sind nicht das einzige der Mathematik, schon gar nicht das erste, und vielleicht auch nicht das Wichtigste. Denn das Wichtigste sind die Ideen und die Einsichten. In der Lehre schaffen Formeln zunächst Distanz. Nur mit viel Übung erfasst man eine Formel auf einen Blick.

Ich versuche, den Studierenden die Bedeutung von Formeln und Gleichungen nahezubringen, indem zum einen die Gleichungen nicht am Anfang, sondern eher am Ende einer gedanklichen Entwicklung stehen. Damit wird auch klar, in welch unvorstellbarer Konzentration eine Formel einen mathematischen Sachverhalt ausdrückt. Zum andern üben wir ganz pragmatisch, Gleichungen zu lesen. Die Devise heisst: langsam lesen, Symbol für Symbol, Zahl für Zahl, um die Bedeutung jeder Komponente zu erfassen.

Beispiel Teilbarkeitsregeln. Üblicherweise werden die Teilbarkeitsregeln formuliert, durch ein Beispiel illustriert und bewiesen. Man könnte aber auch mit einem Beispiel beginnen und fragen: Warum ist 5738 eine gerade Zahl, das heisst ohne Rest durch 2 teilbar? Wir schreiben 5738 = 5730 + 8. Wir sehen, dass 5380 eine Zehnerzahl ist und daher «immer» (das heisst, unabhängig davon, was die konkreten Zehner-, Hunderter- und Tausenderziffern sind) durch 2 teilbar ist. Daher kommt es bei der Teilbarkeit durch 2 nur auf die Einerziffer an, genauer gesagt darauf, ob diese gerade oder ungerade ist.

Das verallgemeinert sich dann sehr offensichtlich: Wenn e die Einerziffer einer natürlichen Zahl ist, kann man diese Zahl schreiben als 10a + e. Da 10a ein Vielfaches von 10 ist, also insbesondere gerade ist, ist die ganze Zahl genau dann gerade, wenn die Einerziffer gerade ist. Für manche Argumente reicht ein Beispiel oder ein Spezialfall, man muss es gar nicht allgemein formulieren.

Beispiel Addition von Vektoren. Üblicherweise führt man n-Tupel ein, definiert deren Addition und beweist die Eigenschaften dieser Addition. Man könnte aber auch mit Tripeln von Zahlen beginnen, also Folgen (3, 2, 5) oder allgemein (a, b, c). Die Summe zweier Tripel liegt auf der Hand: (3, 2, 5) + (1, 7, 3) = (3+1. 2+7, 5+3). Man addiert also die Zahlen in den einzelnen Komponenten. Im Allgemeinen lautet das so: (a, b, c) + (a', b', c') = (a+a', b+b', c+c'). Es ist ein Leichtes nachzuweisen, dass zum Beispiel das Kommutativ- und das Assoziativgesetz gelten. Von da aus könnte man jetzt weitergehen zu 4-Tupeln, 5-Tupeln oder allgemein n-Tupeln. Oder auch nicht, denn es ist ja «klar», wie man deren Addition definiert und die entsprechenden Eigenschaften beweist.

An dieser Stelle sollte man das Wort des grossen italienischen Mathematikers F. Enriques bedenken, der schon 1915 in unüberbietbarer Klarheit gesagt hat: Man soll ein Problem nicht in der *grösst*möglichen Allgemeinheit behandeln, sondern in der *kleinst*möglichen, in der das Problem deutlich wird (*il primo grado in cui il problema stesso rivela la sua natura*, siehe Enriques 1915).

3.2. Konstruktives Lernen
Die Lernforschung hat nachgewiesen, dass konstruktive Elemente einen wichtigen Beitrag zum nachhaltigen Lernen darstellen. Natürlich ist klar, dass die

Studierenden sich nicht annähernd alles selbst erarbeiten können. Dazu ist das Gedankengebäude der Mathematik viel zu gross und komplex. Aber wichtig ist, dass sich die Studierenden den Stoff zu Eigen machen, indem sie damit umgehen. Dazu dienen einerseits die separat abgehaltenen Übungsstunden. Ich habe mir aber angewöhnt, zusätzlich Übungsphasen in die Vorlesung einzubauen. Etwa jede Viertelstunde stelle ich eine kleine, sehr leichte Übungsaufgabe, in der die Studierenden einfach den Begriff oder das Beispiel, das wir gerade behandelt haben, noch einmal mit leicht anderen Parametern durchdenken. Diese Aufgaben können nicht zu leicht sein.

Neben dem unmittelbaren Nutzen, den die Studierenden durch das Üben erfahren, erhalte ich auch eine Rückmeldung, wie gut der Stoff bei den Studierenden angekommen ist. Nicht zuletzt tragen diese Übungsphasen unglaublich zu Entspannung bei: Die Studierenden können Atem schöpfen, sich des Gelernten versichern und sind bereit für den nächsten Schritt.

3.3. Nutzen elektronischer Medien

Seit vielen Jahren nutze ich ppt-Folien, auf denen im Wesentlichen der gesamte Stoff steht, also Beispiele, Bilder, Definitionen, Sätze, Beweise, Bemerkungen. Die Studierenden laden sich die Folien vorher herunter und haben diese im Idealfall ausgedruckt vor sich liegen.

Ich habe gelernt, dass Folien ein eigenes Medium sind, das seine eigenen Gesetze und Möglichkeiten hat. Obwohl eine grosse Ähnlichkeit zu einem Buch besteht, sind Folien etwas anderes als ein Buch. Das liegt vor allem daran, dass die Hörer jeweils nur eine Folie sehen; theoretisch kann man zwar zurückblättern, dies führt allerdings meist zu mehr Verwirrung als Klarheit. Folien sind ein «diskretes» Medium im Gegensatz zu dem kontinuierlichen Medium «Buch». In einem Buch (denken Sie an einen Roman!) kann man kontinuierlich weiterlesen, es ist – wenn überhaupt – in grosse Abschnitte eingeteilt. Demgegenüber kommt eine Folie nach der anderen. Erst wenn eine Folie abgeschlossen ist, geht man zur nächsten über. Das heisst, durch Folien wird der Stoff in kleine Einheiten zerlegt. Das bedeutet umgekehrt, dass man den Fortgang der Vorlesung so organisieren muss, dass sich dieser in Einheiten von etwa drei bis fünf Minuten Dauer aufteilt. Wenn die Studierenden die Folien ausgedruckt vor sich haben, haben sie Zugriff auf den gesamten Stoff und können zum Beispiel selbständig unklare Sachverhalte klären. Ich habe mir angewöhnt, jede Folie mit einer Überschrift zu versehen, um klar zu machen, welches das Thema dieser Lerneinheit ist.

Bei der Behandlung des Satzes des Pythagoras könnte das zum *Beispiel* so aussehen: Die erste Folie «Der Satz des Pythagoras vor Pythagoras» zeigt ein Beispiel des Satzes aus Mesopotamien, ca. 1000 Jahre vor Pythagoras. Die zweite Folie («Eine Anwendung») stellt dar, wie die Ägypter angeblich mit Hilfe des «12 Knoten-Seils» ein Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4, 5 und damit einen rechten Winkel konstruiert haben. Die darauffolgenden Folien würden den «Satz des Pythagoras» und «Die Umkehrung des Satzes des Pythagoras» behandeln. Darauf würde ein Beweis, in diesem Fall vermutlich sogar mehrere Beweise folgen. Den Abschluss könnten «Anwendungen» – etwa die Quadratwurzelschnecke – bilden.

Die Folien sollten vollständig, aber nicht vollgeschrieben sein. Die Studierenden haben die Möglichkeit, darauf noch Notizen unterzubringen. Das können zusätzliche Bemerkungen sein, oder Beispiele, die ich an der Tafel entwickle.

Das Erarbeiten der Folien bedeutet – vor allem bei ersten Mal – sehr viel Arbeit, aber diese lohnt sich. Denn während der Vorlesung bin ich entlastet und kann mich auf das Wesentliche konzentrieren, nämlich das eigentliche Lehren, also den Kontakt mit den Studierenden. Ich sehe die Studierenden und kann durch meine Präsenz auf die gemeinsame Konzentration hinwirken, auf Fragen eingehen und sensibel auf noch unausgesprochene Verständnisschwierigkeiten ("Fragezeichen im Gesicht") reagieren. Auch die Studierenden haben enorme Vorteile: Sie müssen nicht mitschreiben, sondern können sich auf das Mitdenken konzentrieren.

Die grundsätzliche Frage ist: Welchen Sinn hat dann noch die Vorlesung? Ich bin der Überzeugung, dass gerade dadurch, dass der Dozent von den «niederen Tätigkeiten» wie Anschreiben des Stoffs an die Tafel entlastet ist, er endlich Zeit für seine eigentlichen Aufgaben hat. Er kann wichtige Dinge hervorheben, Technik als solche kennzeichnen, Überblicke und Ausblicke bieten und differenzierend auf die Studierenden eingehen. Überspitzt könnte man sagen, dass bei einer «klassischen» Mathematik-Vorlesung der Dozent ersetzbar ist.

Neben den ppt-Folien sind andere elektronische Formate auch nützlich, aber bei weitem nicht so elementar wie die Folien. Man kann ein Diskussionsforum einrichten, man kann die Vorlesung aufnehmen und ins Netz stellen. Schliesslich habe ich auch schon einmal eine wöchentliche Videobotschaft ins Netz gestellt – mit mässigem Erfolg.

4. Verrückte Formate

Während meiner gesamten Lehrtätigkeit habe ich immer wieder versucht, die Grenzen der Lehrformen auszuloten und manchmal auch «verrückte» Dinge zu versuchen. Dies zwingt einen selbst, die klassischen Formate, die nach wie vor das Brot-und-Butter-Geschäft sind, aus einem neuen Blickwinkel zu sehen. Umgekehrt sind dies auch für die Studierenden Erlebnisse, die ihnen neue Erfahrungen in und mit der Mathematik ermöglichen. Jedes einzelne dieser Formate war für mich eine Mutprobe, die sich aber in jedem Fall gelohnt hat.

4.1. Events innerhalb einer Vorlesung

Vorlesung im Bus. Eine meiner ersten Mutproben: Es war eine Zeit der Streiks. Die Studierenden streikten für mehr Seminarräume und mehr Geld für die Bildung im Allgemeinen. Sie hatten eine originelle Idee, nämlich Professoren zu bitten, eine Vorlesungsstunde in einem Bus der Universitätslinie zu halten. In einer schwachen Stunde hatte ich zugesagt. Als der dafür vorgesehene Tag näher rückte, wurde mir die Unmöglichkeit des Vorhabens klar. Nicht nur gab es keine Tafel o.ä., vielmehr hatte ich auch keinen privilegierten Platz, sondern stand einfach mitten in der Menge. Wie konnte ich mich verständlich oder mich auch nur sichtbar machen? Die Rettung waren Handpuppen: Ich hatte einen Raben und einen Teufel erworben, die ich so weit hochhielt, dass alle Fahrgäste diese sehen konnten. Die beiden Figuren lieferten sich einen mathematischen Dialog. Der Anknüpfungspunkt war der Raum- und Geldmangel, das mathematische Thema – passend zum aktuellen Vorlesungsstoff – die Unendlichkeit. Die beiden Figuren unterhielten sich darüber, wie man – mit den Waffen der Mathematik – unendlich viel Geld beschaffen könnte. Dazu bewiesen Sie folgendes: Wenn es einmal unendlich viele Menschen gäbe, von denen jeder einen Euro besässe, dann würde man dieses Geld auf wundersame Weise so vermehren können, dass man alles bezahle könnte.

Pythagoras Day. Der 09.12.15 war ein «Pythagoras day» ($9^2 + 12^2 = 15^2$). Ich konnte die Studierenden der Anfängervorlesung dazu bewegen, in der Pause ein Quadrat zu bilden, dessen Seiten aus je 9 + 12 Menschen bestehen sollten, und da hinein noch ein Quadrat der Seitenlänge 15 zu stellen, so dass sich insgesamt eine berühmte Beweisfigur des Satzes des Pythagoras ergab. Ein Fotograf nahm das von oben auf und machte es zum Aufmacher der Lokalzeitung.

Liebesbriefe an die Mathematik. Dies war eines der offensten Projekte, das ich je durchgeführt habe. In einer Vorlesung für Haupt- und Realschullehrer erklärte ich in einer Stunde, dass auf den nächsten drei Übungsblättern jeweils eine besondere Aufgabe auftauchen würde, die besondere Anforderungen bereithalte, die aber auch korrigiert und bewertet werde. Es ging darum, einen Liebesbrief zu schreiben. Nicht an eine Person, sondern an ein mathematisches Objekt: eine Zahl, eine Figur und eine Formel. Ich versuchte, den Studierenden deutlich zu machen, was ich mir unter einem Liebensbrief vorstelle: Wenn man frisch verliebt ist, findet man alles am Anderen fantastisch gut: Das Aussehen, die Kleidung, das Lachen, die Bewegung, die Sprache usw. Das findet man ohne jede Einschränkung grossartig. Genau so sollten die Studierenden ein mathematisches Objekt beschreiben; sie sollten an dieser Zahl, der Figur, der Formel einfach alles gut finden.

Ich war sehr gespannt, wie das ausgehen würde. Denn in den Liebesprüfungen würde sich ja auch die Person des Schreibenden spiegeln. Das Ergebnis war sowohl quantitativ als auch qualitativ überzeugend. Fast alle Studierenden liessen sich darauf ein und fanden mathematische Objekte, die einen Liebesbrief wert waren.

4.2. Separate Events

Ich habe mitunter auch versucht, eine gesamte Veranstaltung «neu zu denken». Dies waren vor allem Seminare für Lehramtsstudierende, da diese die Diskrepanz zwischen ihrer Vorstellung des Berufs und der akademischen Realität besonders schmerzlich erleben.

Mathematik erleben. Einige Zeit lang mussten Studierende für das Lehramt an Grundschulen schon in einem frühen Semester ein Seminar belegen. Ich schlug ihnen «Mathematik erleben» vor. Im Kern ging es dabei darum, dass wir ein Wochenende lang (Freitag bis Sonntag) wegfuhren und dass sich jeder Student und jede Studentin an diesem Wochenende mit einem kleinen Thema beschäftigen sollte. Das konnte eine Zahl, eine Figur, ein Muster, ein Satz, ein Verfahren oder irgendetwas anderes nach freier Wahl sein. Entscheidend war, dass es ein kleines Thema war und dass man nur eines wählte.

Der Clou dieses Formats war, dass wir uns zwei oder drei Wochen vor dem Wochenende trafen und ich den Studierenden dabei erklärte, was von ihnen verlangt werden würde. Diese drei Wochen wirkten als Inkubationszeit, in der die Studierenden das Thema fanden, es sich in ihren Köpfen entwickelte und sie dann am Freitag «loslegen» konnten.

Die Wochenenden waren ausserordentlich intensiv, geschlafen wurde wenig, aber am Sonntagvormittag präsentierten alle das Ergebnis ihrer Überlegungen.

Das reichte von einem kurzen Vortrag über ein Poster oder ein Modell bis hin zu szenischen Darbietungen.

Mathematik zum Anfassen. Für ein Proseminar im Jahre 1993 für Lehramtsstudierende hatte ich vergleichsweise spontan, und jedenfalls ohne mir die Konsequenzen zu überlegen, die Idee, dass einerseits jede Studentin und jeder Student ein geometrisches Modell selber herstellen und andererseits die darin steckende Mathematik erklären sollte. Nach kurzer Zeit stellten sich bei allen Teilnehmenden eine starke Identifizierung mit ihren Objekten und eine Begeisterung für die Sache ein. Die Präsentationen waren so überzeugend, dass wir beschlossen, damit eine Ausstellung zu produzieren. Auch diese war sehr erfolgreich und die Initialzündung für das Mathematikum in Gießen – das erste mathematische Mitmachmuseum der Welt (siehe Beutelspacher 2015).

Mathematik neu denken. Dieses grosse Projekt war eine gemeinschaftliche Initiative der Universitäten Gießen und Siegen (Prof. R. Danckwerts). Es ging von altbekannten Defiziten der gymnasialen Lehrerbildung im Fach Mathematik aus (schon Felix Klein hatte die «doppelte Diskontinuität» gebrandmarkt) und hat zunächst das erste Studienjahr auf die Bedürfnisse der Lehramtsstudierenden zugeschnitten und dann ein Konzept für das gesamte Studium entworfen. Inhaltliches Ziel war es, die Schulmathematik, die Hochschulmathematik, die Geschichte und die Didaktik der Mathematik von Studienbeginn an konsequent miteinander zu verzahnen. Die Studierenden sollen nicht nur, wie üblich, «fertige Mathematik» kennen lernen, sondern von Anfang an in ihrem eigenen Lernprozess erleben, wie mathematisches Wissen entsteht. Dieses von der Deutschen Telekom Stiftung grosszügig geförderte Projekt «Mathematik neu denken» wurde ausführlich beschrieben (siehe Beutelspacher et al. 2011) und hat weit über die beteiligten Universitäten hinaus Wirkung gezeigt.

5. Resümee

Ich bin Hochschullehrer geworden, weil mich die Lehre mindestens so sehr begeistert wie die Forschung. In der Lehre gibt es nichts, was für alle Zeiten und unter allen Umständen vollkommen ist. Aber die ständigen Fragen: Kannst Du das mathematisch noch treffender sagen? Kannst Du die Studierenden noch besser an dem Prozess teilhaben lassen? Fällt Dir dazu noch irgendetwas Besonderes ein? – diese Fragen führen nicht nur dazu, dass meine Vorlesungen (hoffentlich!) mit jedem Mal besser werden, nicht nur dazu, dass ich selbst dem Stoff immer wieder neue Facetten abgewinne, sondern es macht einfach Freude: den Studierenden (hoffentlich!) und ganz bestimmt mir selbst. ■

Literatur

A. Beutelspacher, R. Danckwerts, G. Nickel, S. Spies, G. Wickel: *Mathematik neu denken. Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Gymnasien.* viii + 223 Seiten, Verlag Vieweg+Teubner, 2011.

A. Beutelspacher: Wie man in eine Seifenblase steigt. Die Welt der Mathematik in 100 Experimenten, 319 Seiten. C.H. Beck, 2015.

F. Enriques (a cura di O. Chisini): Lezinioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche. Zanchelli, 1915.

H. Winter: Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (1995), 37–46.