Zeitschrift: Programm / Technikum des Kantons Zürich in Winterthur

Herausgeber: Technikum des Kantons Zürich in Winterthur

Band: 29 (1902-1903)

Artikel: Die Bestimmung der Haupt- und Brennpunkte von Linsen und Linsensystemen

Autor: Lüdin, E.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1047764

Die Bestimmung der Haupt- und Brennpunkte von Linsen und Linsensystemen.

Mit 5 Figuren.

Von Prof. Dr. E. LÜDIN.

Beilage zum Programm des Technikums des Kantons Zürich
in Winterthur
für das Schuljahr 1903/1904.

Winterthur
Buchdruckerei von Geschwister Ziegler
1903.

Die Bestimmung der Haupt- und Brennpunkte von Linsen und Linsensystemen.

Von Prof. Dr. E. LÜDIN.

Die Aufgabe, den Durchgang eines Lichtstrahles durch ein Linsensystem zu berechnen, ist zuerst von Gauss gelöst worden. Er ging von dem allgemeinen Falle aus, dass ein optisches System von Medien gegeben sei, welche durch Teile von Kugelflächen voneinander getrennt sind, deren Mittelpunkte alle auf derselben Geraden liegen. Er bewies, dass auf dieser Geraden, der Axe des Systems, im allgemeinen vier Punkte existieren, mit Hülfe welcher zu einer gegebenen Geraden die entsprechende oder zu einem gegebenen Punkte, der zu ihm conjugierte, in einfacher Weise zu finden sind. Zwei dieser Punkte, die Brennpunkte, waren bereits bekannt, die beiden andern wurden von Gauss als Hauptpunkte bezeichnet. Es hat dann Listing gezeigt, dass ein drittes Punktpaar existiert, welches ebenfalls für die Konstruktionen ausgezeichnete Dienste leistet, es sind die Knotenpunkte. Die Berechnungen von Gauss setzen zentrale Lichtstrahlen voraus, das heisst solche, welche mit der Axe sehr kleine Winkel einschliessen. In neuerer Zeit hat Abbe nach einer neuen Methode eine geometrische Optik entwickelt. Abbe lässt zunächst alle einschränkenden Bedingungen über die Form und Anordnung der Grenzflächen, ferner über die Lage und Oeffnung der abbildenden Strahlenbüschel bei Seite; er sucht ganz allgemein die Gesetze der Abbildung von Punkten und Geraden in zwei gegebenen Räumen auf, welche sich dann auf den speziellen Fall der Linsen anwenden lassen. Die Abhandlungen von Gauss und Abbe sind nun in sehr abstrakter, analytischer Form abgefasst; ferner sind dieselben sehr umfangreich. Soll deshalb die geometrische Optik nach Gauss oder Abbe mit Erfolg an Schulen durchgenommen werden, so ist auch bei möglichster Einschränkung des Stoffes viel Zeit erforderlich. Aus diesen Gründen wird an Mittelschulen bei der Behandlung der Linsen und Linsensysteme gewöhnlich von der Einführung der Hauptpunkte Umgang genommen. Man begnügt sich mit der Besprechung der unendlich dünnen Linse und misst ihre Brennweite vom Mittelpunkte resp. Durchstosspunkte derselben mit der Axe. Dies mag bei einfachen Convex- und Concav-Linsen gestattet sein, ist aber bei Meniscen und zusammengesetzten Linsen unzulässig.

In den Lehrbüchern der Physik findet man ebenfalls gewöhnlich nur die unendlich dünne Linse behandelt, oder aber es wird einfach auf die Existenz der Hauptpunkte hingewiesen. In den grösseren Handbüchern sind dann die oben angeführten Entwicklungen von Gauss oder Abbe wiedergegeben.

Wie ich bereits angedeutet habe, hat Gauss das Problem unter der Voraussetzung gelöst, dass das erste und letzte Medium verschiedener Natur sind. Dies kommt aber nur selten vor, bei Immersionssystemen und beim Sehorgan. In allen andern Fällen sind Anfangs- und Endmedium dasselbe, nämlich Luft. Beschränken wir uns auf diese optischen Systeme, d. h. auf gewöhnliche Linsen und Linsensysteme, so lassen sich die Gauss'schen Gleichungen für die Haupt- und Brennpunkte direkt finden. Ebenso lassen sich die Eigenschaften dieser Punkte, sowie das Abbildungsgesetz ableiten.

Die Linsen.

Eine Linse ist ein aus drei Medien gebildetes zentriertes optisches System, bei welchem die beiden äussern Medien gleich sind und zwar Luft. Das zwischenliegende Medium ist Glas oder ein anderer durchsichtiger Körper, welcher das Licht stärker bricht als Luft. Die Linse ist bestimmt, wenn die Lagen der Scheitelpunkte S und S', die Krümmungsmittelpunkte C und C', sowie der Brechungsexponent n der Substanz bezüglich Luft gegeben sind.

Wir lassen einen Lichtstrahl parallel der Axe auf die Linse einfallen, konstruieren und rechnen den Gang desselben durch die Linse und bestimmen die Schnittpunkte des austretenden Strahles mit der Axe und dem gegebenen Strahl. Die Konstruktion habe ich nach Ferraris*) ausgeführt; selbstverständlich können die Strahlen auch in anderer Weise gefunden werden.

Wir lösen diese Aufgabe nur für homogenes Licht und unter der Voraussetzung, dass die Strahlen Zentralstrahlen sind; d. h. die Winkel, welche die Einfallslote mit der Axe einschliessen sind so klein, dass man den Sinus und die Tangente derselben gleich dem Winkel und den Cosinus gleich Eins setzen kann. Von gleicher Grösse sind auch die Winkel, die irgend ein Teil eines jeden der betrachteten Lichtstrahlen mit der Axe des Systems einschliessen. Diese Bedingungen machen die Konstruktion praktisch unmöglich. Wir können jedoch diese Schwierigkeit vermeiden, indem wir die Figur nicht als Darstellung der wirklichen Lagen der Punkte und Geraden betrachten, sondern als eine veränderte Figur, die aus der wirklichen hervorgeht, indem wir die Dimensionen parallel der Axe unverändert lassen, die Entfernung aller Punkte von der Axe hingegen mit einer konstanten, sehr grossen Zahl multiplizieren. Ist eine derartig abgeänderte Figur gegeben, so kann man umgekehrt aus ihr die wirkliche ableiten, indem man die Distanzen aller Punkte von der Axe durch dieselbe Zahl dividiert. Durch diese Uebereinkunft können die Konstruktionen zur wirklichen graphischen Lösung der Aufgabe dienen. Zur grösseren Genauigkeit der Konstruktionen wählen wir die Einfallspunkte in ziemlich grosser Entfernung von der Axe und bezeichnen ferner die Linien und Punkte der abgeleiteten Figur wie die entsprechenden Grössen der wirklichen Figur.

*) Ferraris, Die Fundamentaleigenschaften der dioptrischen Instrumente. Uebersetzt von Lippich. Leipzig 1879.

Ist der Strahl ein Zentralstrahl, so kann als Schnittpunkt desselben mit der Trennungsfläche derjenige mit der Tangentialebene im Scheitelpunkte genommen werden. Hierdurch erhält man folgende Konstruktion:

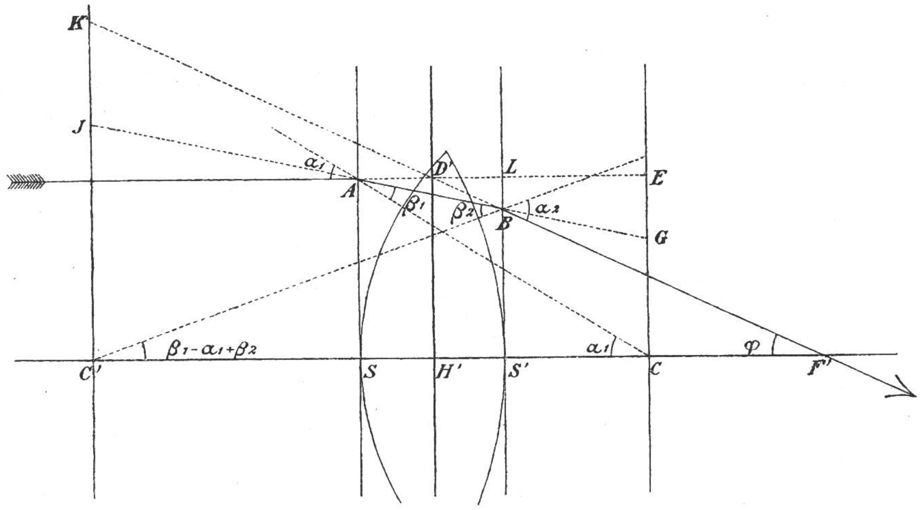

Fig. 1.

In Fig. 1 bedeuten S und S' die Scheitelpunkte, C und C' die Krümmungsmittelpunkte. Es sei A der Schnittpunkt des einfallenden Strahles mit der Tangentialebene in S, so sind AC das Einfallslot und $\sphericalangle\, \alpha_1$ der Einfallswinkel. Man verlängert nun den einfallenden Strahl bis zum Schnittpunkte E mit der Normalen zur Axe im Krümmungsmittelpunkte C und sucht einen Punkt G, so dass $\frac{EC}{GC} = n$ ist, dann ist AG die Richtung des Lichtstrahles in der Linse. (In Fig. 1 ist $n = 1{,}5$ angenommen.) $\sphericalangle\, GAC = \sphericalangle\, \beta_1$ ist der Brechungswinkel. Dieser Strahl AG trifft die Tangentialebene im Scheitelpunkte S' im Punkte B. $\sphericalangle\, ABC' = \sphericalangle\, \beta_2$ ist der neue Einfallswinkel. Wir verlängern AB bis zum Schnittpunkte J mit der Normalen im Krümmungsmittelpunkte C' und suchen den Punkt K, so dass $\frac{KC'}{JC'} = n$, dann ist KB der austretende Strahl. Derselbe schneidet die Axe im Punkte F' und den eintretenden Strahl im Punkte D'. Die Normale zur Axe durch D' trifft dieselbe im Punkte H'. Lässt man einen Lichtstrahl in entgegengesetzter Richtung parallel der Axe auf die Linse einfallen, so erhält man durch dieselbe Konstruktion zwei weitere Punkte F und H.

Bei der Berechnung berücksichtigen wir, dass die Winkel sehr klein sind. Ferner geben wir den Distanzen Vorzeichen, indem wir die Radien von den Scheitelpunkten aus zählen. Gehen sie im Sinne der Lichtfortpflanzung, so sind sie positiv, bei entgegengesetztem Sinne negativ. Ebenso zählen wir Strecken über der Axe positiv und unter der Axe negativ. In unserer Figur ist eine biconvexe Linse angenommen. Lässt man das Licht von links einfallen, so ist der erste Krümmungsradius positiv, der zweite negativ, d. h. es ist $SC = r$, $S'C' = -r'$. $SS' = \delta$ ist die Linsendicke. Wir bezeichnen $H'F' = f$ und den Winkel, welchen der austretende Strahl mit der Axe einschliesst, mit φ, so ist

$$\varphi = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2)$$

Es ist $D' H' = f \,.\, \mathrm{tg}\, \varphi = f \,.\, \varphi = f\,(\alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2)$

ebenso $D' H' = A S = r \,.\, \alpha_1$

oder $r\,\alpha_1 = f\,(\alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2)$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2 - \beta_2}{\alpha_1}\right) = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\frac{\alpha_2}{\beta_2} - 1}{\frac{\alpha_1}{\beta_2}}\right)$$

Nun ist $\dfrac{\alpha_1}{\beta_1} = n$ und $\dfrac{\alpha_2}{\beta_2} = n$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{n-1}{\frac{\alpha_1}{\beta_2}}\right)$$

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{r}\left(\frac{1}{n} + \frac{\beta_2}{\alpha_1}\right)$$

Andererseits ist $B S' = -\, r'\,(\beta_1 - \alpha_1 + \beta_2)$

$$B S' = A S - L B = r\,\alpha_1 - \delta\,(\alpha_1 - \beta_1)$$

oder $-\, r'\,(\beta_1 - \alpha_1 + \beta_2) = r\,\alpha_1 - \delta\,(\alpha_1 - \beta_1)$

$$r'\,\beta_2 = r'\,\alpha_1 - r'\,\beta_1 - r\,\alpha_1 + \delta\,(\alpha_1 - \beta_1)$$

$$\beta_2 = \alpha_1 - \beta_1 - \frac{r}{r'}\,\alpha_1 + \frac{\delta}{r'}\,(\alpha_1 - \beta_1)$$

$$\frac{\beta_2}{\alpha_1} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{r'} + \frac{\delta}{r'} \cdot \frac{n-1}{n}$$

Setzen wir diesen Wert in die Gleichung für $\dfrac{1}{f}$ ein, so erhält man

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{r}\left(\frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{r'} + \frac{\delta}{r'} \cdot \frac{n-1}{n}\right)$$

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{r \,.\, r'}\left(r' - r + \frac{n-1}{n} \,.\, \delta\right)$$

Bezeichnen wir $r' - r + \dfrac{n-1}{n} \,.\, \delta = \rho$ 1.

so wird $f = \dfrac{1}{n-1} \cdot \dfrac{r \,.\, r'}{\rho}$ 2.

Zur Bestimmung der Lage des Punktes H' rechnen wir die Entfernung von H' vom zugehörigen Scheitelpunkte S'. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $D' L B$ und $F' S' B$ folgt

$$- S' H' : f = L B : L S' = L B : A S$$

$$S' H' = -f \,.\, \frac{L B}{A S} = -f \,.\, \frac{\delta\,(\alpha_1 - \beta_1)}{r \,.\, \alpha_1} = -f \,.\, \frac{\delta}{r}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$S' H' = -\frac{n-1}{n} \cdot \frac{\delta}{r} \cdot f$$

oder, wenn wir für f den Wert aus Gleichung 2 einsetzen

$$S' H' = - \frac{1}{n} \cdot \frac{r'}{\rho} \cdot \delta \qquad 3.$$

In den Gleichungen 1, 2 und 3 kommt der Winkel α_1 nicht vor, d. h. diese Gleichungen gelten für beliebige Einfallswinkel. Alle Strahlen, welche parallel der Axe einfallen, vereinigen sich in demselben Punkte F'. Ebenso liegen alle Schnittpunkte der austretenden Strahlen mit ihren entsprechenden Einfallsgeraden auf derselben Ebene, welche die Axe im Punkte H' schneidet. F' und H' sind also ausgezeichnete Punkte; es sind der Brennpunkt und der zugehörige Hauptpunkt; der Abstand beider $H' F' = f$ ist die Brennweite; die Ebene durch H' senkrecht zur Axe heisst Hauptebene.

Kommt der Lichtstrahl von der entgegengesetzten Seite, so hat man in der Rechnung an Stelle von $r \ldots -r'$ und für $-r' \ldots r$ zu setzen; man erhält für ρ und f dieselben Werte, d. h. beide Brennweiten sind einander gleich. Ferner wird

$$S H = \frac{1}{n} \cdot \frac{r}{\rho} \cdot \delta$$

Soll SH für die erste Linsenstellung angegeben werden, so ist das entgegengesetzte Vorzeichen zu setzen

$$S H = - \frac{1}{n} \cdot \frac{r}{\rho} \cdot \delta \qquad 4.$$

Diese Gleichungen 1, 2, 3 und 4 sind die bekannten Ausdrücke für die Brenn- und Hauptpunkte einer Linse. Die Knotenpunkte fallen bei Linsen mit den Hauptpunkten zusammen.

Liegt der Brennpunkt F' nach H', d. h. rechts davon, so ist die Brennweite positiv, die Linse ist eine Sammellinse; liegt der Brennpunkt F' vor H', so ist die Brennweite negativ und die Linse ist eine Zerstreuungslinse.

Die bisherigen Konstruktionen ergeben noch weitere Resultate. Da Strahlen parallel der Axe vom unendlich fernen Punkte derselben kommen, so folgt: dem unendlich fernen Punkte der Axe des Objektraumes entspricht der Brennpunkt des Bildraumes und umgekehrt. Jedem Strahl, welcher parallel der Axe einfällt, entspricht ein zweiter, welcher durch den Brennpunkt geht und jedem Strahle durch einen Brennpunkt entspricht ein Strahl parallel zur Axe.

Ist nun eine Linse (Fig. 2) durch Haupt- und Brennpunkte gegeben, so finden wir zu irgend einem leuchtenden Punkte A den Bildpunkt A'.

Wir ziehen durch A einen Strahl parallel zur Axe, der entsprechende geht durch F'. Ein zweiter Strahl durch A und den Brennpunkt F geht parallel der Axe weiter. Der Schnittpunkt beider Strahlen ist A'.

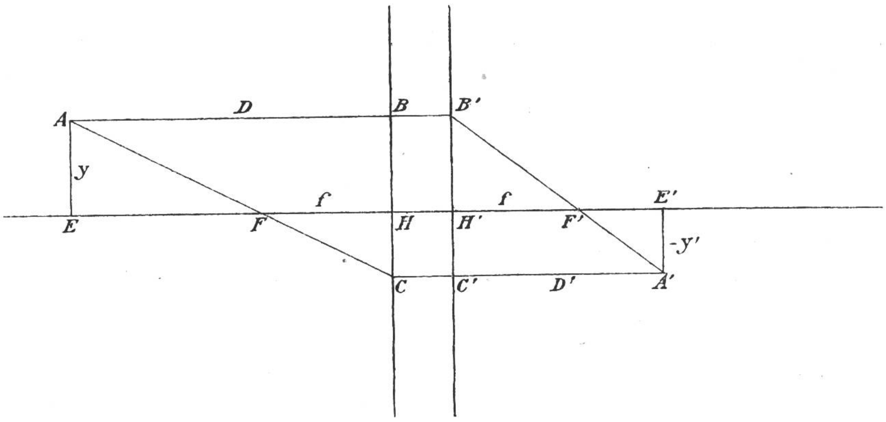

Fig. 2.

Es seien D und D' die Entfernungen von A und A' von den Hauptebenen; wir zählen sie positiv, wenn A vor und A' hinter ihrer Hauptebene liegen.

Ferner sind y und $-y'$ die Abstände derselben Punkte von der Axe; da $\triangle\, AEF \backsim \triangle\, CHF$, so ist

$$y : -y' = D - f : f$$

oder

$$\frac{y}{y - y'} = \frac{D - f}{D}$$

Ferner ist in Dreieck $B'C'A'$ die Gerade $H'F'$ eine Parallele zur Grundlinie, somit ist

$$\frac{y}{y - y'} = \frac{f}{D'}$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$\frac{f}{D'} = \frac{D - f}{D}$$

$$fD = DD' - fD'$$

$$\frac{1}{D'} + \frac{1}{D} = \frac{1}{f} \qquad 5.$$

Diese Gleichung gibt uns für die Entfernung D eines Punktes den Abstand D' des Bildpunktes. Da y und $-y'$ in Gleichung 5 nicht vorkommen, so folgt: Alle Punkte, welche in einer Ebene senkrecht zur Axe gelegen sind, haben Bildpunkte, welche wiederum in einer zur Axe senkrechten Ebene liegen. Im speziellen entspricht einer Ebene durch einen Brennpunkt, der Brennebene, die unendlich ferne Ebene.

Eigenschaften der Hauptebenen. Es sei in Fig. 3 eine Linse durch die Punkte F, H, H' und F' gegeben. Zieht man im Objektraum die Gerade AB parallel zur Axe, so ist die entsprechende im Bildraume die Gerade $B'A'$ durch F'.

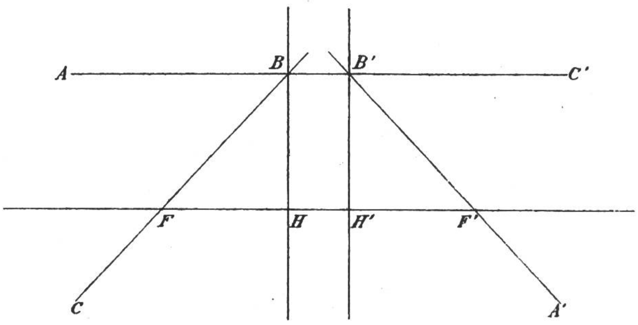

Fig. 3.

Ferner entspricht der Geraden CB durch F die Gerade $B'C'$ parallel zur Axe. B ist der Schnittpunkt von AB und CB, sein Bildpunkt ist somit der Schnittpunkt der entsprechenden Geraden $A'B'$ und $B'C'$, d. h. der Punkt B'. Daraus folgt: Jedem Punkte der einen Hauptebene entspricht ein Punkt der zweiten, welcher gleich weit von der Axe entfernt ist. Im besondern entspricht dem Punkte H der Punkt H'.

Ziehen wir ferner (Fig. 4) eine beliebige Gerade durch H, dann muss ihre entsprechende durch H' gehen. Die Gerade schneide die Brennebene in A.

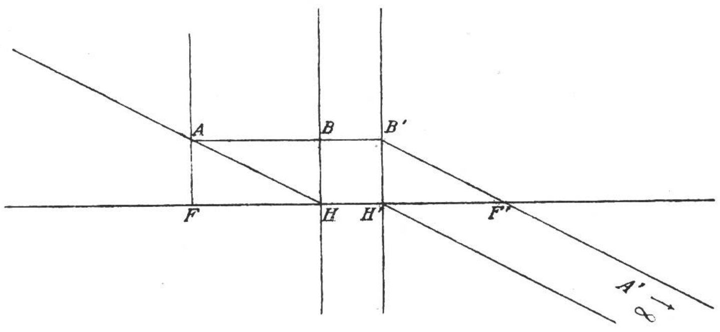

Fig. 4.

Zeichnen wir AB parallel zur Axe, so geht $A'B'$ durch den Brennpunkt F'. Unsere gesuchte Gerade geht durch H' und A'. A' liegt aber auf der unendlich fernen Ebene, somit geht die gesuchte Gerade durch H' und ist parallel zu $B'F'$. Nun ist $FA = H'B'$ und $FH = F'H'$, somit ist $\triangle AFH \cong \triangle B'F'H'$, d. h. $B'F' \parallel AH$ oder $H'A' \parallel HA$. Jeder Geraden durch den einen Hauptpunkt entspricht eine Gerade durch den zweiten Hauptpunkt, welche zur ersten parallel ist.

Mit Hilfe dieser Sätze ist es nun möglich, die Aufgaben zu lösen: Zu einer beliebigen Geraden ihre entsprechende und zu einem beliebigen Punkte den zugehörigen Bildpunkt zu finden.

Systeme von zwei Linsen.

Sind zwei Linsen durch ihre Haupt- und Brennpunkte gegeben, so können dieselben durch eine Linse ersetzt werden. Durch Konstruktion erhält man die Haupt- und Brennpunkte der äquivalenten Linse, indem man einen Strahl parallel der Axe einfallen lässt und den Gang durch die Linsen zeichnet. Der Schnittpunkt des austretenden Strahles mit der Axe gibt den Brennpunkt und derjenige mit der Verlängerung des einfallenden einen Punkt der Hauptebene.

Die beiden Linsen seien durch die Punkte $F_1\,H_1\,H_1'\,F_1'$ und $F_2\,H_2\,H_2'\,F_2'$ gegeben (Fig. 5). Wir ziehen eine Parallele zur Axe, welche die erste Hauptebene der ersten Linse in A_1 trifft. Diese tritt als $A_1'F_1'$ aus der ersten Linse aus. Sie trifft die zweite Linse in A_2, sie muss also durch A_2' weiter gehen und zu $C_2'F_2'$ parallel sein. Der Schnittpunkt mit der Axe gibt den Brennpunkt F'. Der Schnittpunkt D' mit der Verlängerung des einfallenden Strahles gibt die zugehörige Hauptebene und ihr Schnittpunkt mit der Axe den Hauptpunkt H'. Da der Brennpunkt vor dem Hauptpunkt liegt, so ist die Brennweite negativ. $H' F' = -f$. Lässt man einen Parallelstrahl in umgekehrter Richtung die Linsen passieren, so erhält man die Punkte F und H.

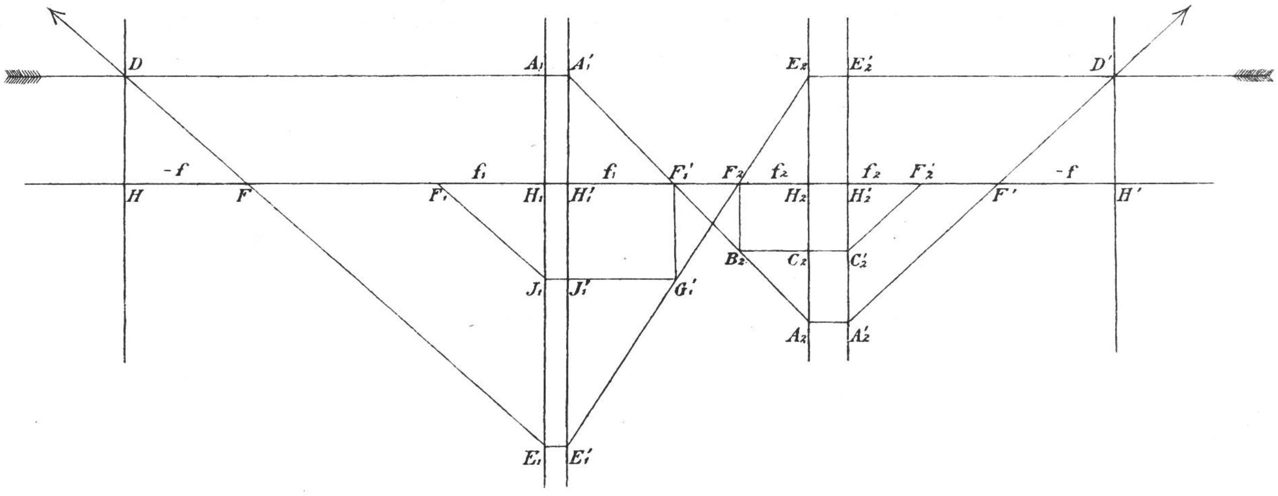

Fig. 5.

Es seien f_1 und f_2 die Brennweiten der beiden Linsen und $H_1' H_2 = \triangle$ ihr Abstand; dann bezeichnen wir $A_1 H_1 = A_1' H_1' = D' H' = a$, $B_2 F_2 = C_2 H_2 = C_2' H_2' = -b$ und $A_2 H_2 = A_2' H_2' = -c$.

Es ist $\triangle\, D' H' F' \infty \triangle\, C_2' H_2' F_2$, somit

$$a : -f = -b : f_2$$

und $\triangle\, B_2 F_2 F_1' \infty \triangle\, A_1' H_1' F_1'$, somit

$$a : f_1 = -b : \triangle - (f_1 + f_2)$$

Aus beiden Proportionen folgt

$$-\frac{a}{b} = -\frac{f}{f_2} = \frac{f_1}{\triangle - (f_1 + f_2)}.$$

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - \triangle} \qquad 6.$$

ferner ist $\triangle\, D' H' F' \infty \triangle\, A_2' H_2' F'$, somit ist

$$a : -b = -f : H_2' H' + f$$

und $\triangle\, A_1' H_1' F_1' \infty \triangle\, A_2 H_2 F_1'$, oder

$$a : -b = f_1 : \triangle - f_1$$

Aus diesen Proportionen folgt

$$\frac{-f}{H_2' H' + f} = \frac{f_1}{\triangle - f_1}$$

$$H_2' H' = -\frac{f \cdot \triangle}{f_1} = -\frac{f_2 \cdot \triangle}{f_1 + f_2 - \triangle} \qquad 7.$$

Lassen wir den Strahl in umgekehrter Richtung durch die Linse gehen und bezeichnen wir $J_1 H_1 = J_1' H_1' = G_1' F_1' = -d$ und $E_1 H_1 = E_1' H_1' = -e$, so ist da $\triangle E_2 H_2 F_2 \backsim \triangle G_1' F_1' F_2$

$$a : f_2 = -d : \triangle - (f_1 + f_2)$$

und $\triangle DHF \backsim \triangle J_1 H_1 F_1$

$$a : -f = -d : f_1$$

Hieraus folgt

$$\frac{a}{-d} = \frac{f_2}{\triangle - (f_1 + f_2)} = -\frac{f}{f_1}$$

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - \triangle} \qquad 6^a.$$

Gleichung 6^a ist identisch mit Gleichung 6, das heisst beide Brennweiten sind einander gleich.

Ferner ist $\triangle DHF \backsim \triangle E_1 H_1 F$, somit

$$a : -f = -e : HH_1 + f$$

und $\triangle E_2 H_2 F_2 \backsim \triangle E_1' H_1' F_2$, d. h.

$$a : f_2 = -e : \triangle - f_2$$

Hieraus folgt

$$\frac{-f}{HH_1 + f} = \frac{f_2}{\triangle - f_2}$$

$$HH_1 = -\frac{f \cdot \triangle}{f_1}$$

Da $HH_1 = -H_1 H$, so ist

$$H_1 H = \frac{f_2 \cdot \triangle}{f_1 + f_2 - \triangle} \qquad 8.$$

6, 7 und 8 sind die bekannten Gleichungen, mit welchen die Konstanten der äquivalenten Linse aus denjenigen der gegebenen berechnet werden.